УДК 535.361.1

О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ФОТОНОВ ПО ПРОБЕГАМ В СЛАБОПОГЛОЩАЮЩИХ ПОРОШКАХ

В. И. Дианов-Клоков и *Е. В. Фокеева*

Экспериментально определены зависимости пропускания $\mathscr{P}(\alpha)$ монодисперсных порошков стекла ПС-7 от истинного коэффициента поглощения массивного вещества α методом, при котором параметры, характеризующие рассеяние, а также взаимное расположение частиц в образце оставались неизменными. Обратным преобразованием Лапласа экспериментальных функций $P(\alpha)$ получены функции распределения фотонов по пробегам внутри поглощающей среды $W(l)$. Найдены зависимости параметров этих функций от эффективного числа слоев зерен порошка N в образце. Анализ результатов показывает, что область линейной связи между спектрами оптических плотностей массивного и диспергированного вещества при малых α оказывается весьма широкой. При $N=15\div20$ она простиралась в условиях проведенных опытов вплоть до значений $\frac{\mathscr{P}(\alpha)}{\mathscr{P}(\alpha=0)} \simeq 0.15$.

Введение

Для решения задач по переносу излучения в рассеивающей и поглощающей среде перспективным является использование функции распределения фотонов по пробегам $W(l)$, предложенное Ирвином и Ван дер Хюлстом [1]. В случае достаточно малого коэффициента поглощения вещества α это распределение не зависит от α. Через $W(l)$ удобно выражать целый ряд оптических характеристик рассеивающего объекта, например, альбедо, полное пропускание, среднюю длину пробега фотонов $l_{ср.}$ и т. д. Так, для пропускания рассеивающего образца $\mathscr{P}(\alpha)$ можно написать при произвольной функции пропускания для плоской волны $P(\alpha, l)$

$$\mathscr{P}(\alpha) = \int_0^\infty W(l)\, P(\alpha, l)\, dl. \qquad (1)$$

Функции $W(l)$ применительно к некоторым модельным задачам оптики атмосферы теоретически исследованы и использованы в работах Ирвина и Романовой [1, 2]. Целью настоящей работы является получение функции распределения фотонов по пробегам $W(l)$ для плотно упакованных рассеивающих сред (порошков цветного стекла) в случае $P(\alpha, l) = e^{-\alpha l}$ (закон Бугера) методом обратного преобразования Лапласа по экспериментально определенным зависимостям $\mathscr{P}(\alpha)$, а также выявление связи параметров этих распределений с основными свойствами образца.

Объекты исследования и методика измерений

В качестве объектов исследования были взяты порошки дидимового стекла ПС-7, фракционированные по размерам [3]. Средний диаметр зерен в отдельных фракциях составлял $d_{ср.}=0.28$, 0.18, 0.12, 0.072, 0.055, 0.036 см. Форма зерен в более крупных фракциях была близка к чечевицеобразной; в мелких — приближалась к изометрической. Порошки засыпались в алюминиевые цилиндрические кюветы с полированными стен-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

ками[1] и стеклянными окошками со световым диаметром 20 мм. Толщина слоя порошка в кюветах была равна t_k=2.5, 2.0, 1.5, 1, 0.55, 0.3 см. В работе были исследованы образцы, отвечающие 27 комбинациям t_k и $d_{ср.}$.

В качестве спектрального прибора использовался двойной монохроматор ДФС-12. Источником служила прожекторная лампа ПЖ-61, свет которой модулировался механическим обтюратором с частотой 300 гц. Кюветы располагались за выходной щелью, причем входное окно освещалось почти параллельным пучком лучей, сформированным с помощью ограничительной диафрагмы и линзы (угол расхождения $\sim 1°$). Вплотную к выходному окну кюветы располагался фотоумножитель ФЭУ-28, так что регистрировался световой поток $\Phi(\lambda)$, выходящий из образца в пределах телесного угла ~ 3 стер. Сигнал с ФЭУ поступал на регистрирующее устройство с синхронным детектором [4]. Для определения зависимости пропускания образца от α в небольшом интервале длин волн 0.70÷0. 92 мкм при разрешении 20 Å сканировались характерные для стекла ПС-7 узкие полосы поглощения. При этом коэффициент поглощения массивного вещества варьировал в пределах α=0÷4 см$^{-1}$, а параметры, характеризующие рассеяние (показатель преломления вещества, объемный коэффициент рассеяния, индикатриса) и взаимное расположение частиц оставались неизмененными. Для получения значения падающего на порошок потока аналогичные измерения выполнялись с пустыми кюветами. По отношению соответствующих световых потоков $\Phi(\lambda)/\Phi_0(\lambda)=P(\lambda)$ и заранее определенной зависимости $\alpha(\lambda)$ для массивного стекла определялись функции $\mathscr{P}(\alpha)$ для каждого из 27 исследованных образцов.

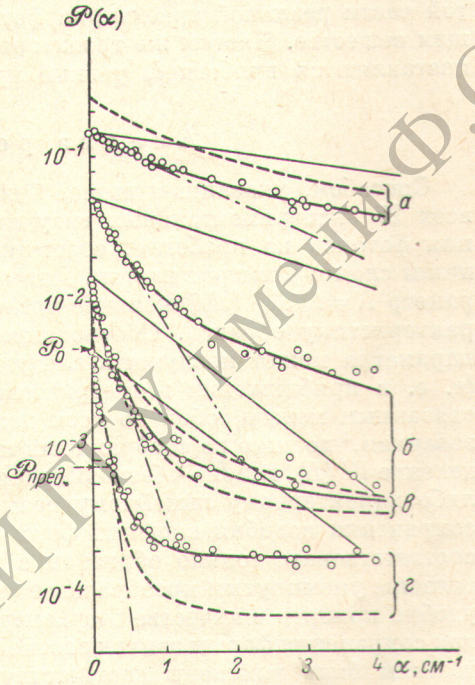

Рис. 1. Зависимость пропускания образца $\mathscr{P}(\alpha)$ от коэффициента поглощения массивного вещества.

Кружки — эксперимент; тонкие прямые отвечают закону Бугера при толщине массивного слоя $t_{масс.}=t_k\eta$; жирные кривые — интерполяция на ЭВМ; штрих-пунктирные — касательные к начальным участкам интерполяционных кривых, отвечающие закону Бугера при $t_{масс.}=\gamma t_k\eta$; жирные штриховые линии — расчет по упрощенной формуле (8). $а-t_k=0.3$ см, $d_{ср.}=0.18$ см, $N=1.67$; $б-t_k=0.55$, $d_{ср.}=0.072$ см. $N=7.64$; $в-t_k=1.51$ см, $d_{ср.}=0.18$ см, $N=8.4$; $г-t_k=1.51$ см, $d_{ср.}=0.072$, $N=22$.

Обработка экспериментальных данных

На рис. 1 в качестве примера представлены четыре наиболее характерные кривые $\mathscr{P}(\alpha)$ для образцов с различными толщинами слоев и различными размерами частиц. Жирные кривые — интерполяция экспериментальных данных априорно заданной формулой

$$\mathscr{P}(\alpha)=\frac{A\Gamma(\nu)}{(a+\alpha)^{\nu}}+\Delta, \qquad (2)$$

параметры которой A, a, ν, Δ найдены с помощью ЭВМ по методу наименьших квадратов.[2] Первый член в (2) может рассматриваться как упрощенный аналог известного разложения коэффициента яркости R_∞ по кратностям рассеяния [5]

[1] Для приближения к модели бесконечного плоского слоя.

[2] Пользуемся случаем поблагодарить З. И. Клушину за проведение вычислений на ЭВМ.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

$$R_\infty = \sum_2^\infty \frac{a_n}{(1+\beta)^n}, \tag{3}$$

где $\beta = \alpha/\sigma$, σ — коэффициент рассеяния.

На этом основании в (2) величине ν может быть придан смысл эффективной кратности рассеяния. Член Δ характеризует стремление $\mathscr{P}(\alpha)$ к некоторому пределу при возрастании α, связанное с возрастанием роли «засветок» за счет фотонов, не прошедших внутри частиц.

В нашем случае, когда в (1) $P(\alpha, l) = e^{-\alpha l}$, для отыскания $W(l)$ применимо обратное преобразование Лапласа [6]

$$W(l) = \mathscr{L}^{-1}[\mathscr{P}(\alpha)] = A l^{\nu-1} e^{-al} + \Delta\delta_+(0), \tag{4}$$

где A, a, ν, Δ имеют те же значения, что и в (2), $\Delta\delta_+(0)$ — односторонняя дельта-функция.

Здесь существенно отметить, что длина пробега l в (4) отвечает только той части реальной траектории фотонов, которая проходит в поглощающем веществе. Частям же траекторий, проходящим между частицами, сопоставляются пробеги l, равные нулю.[3]

Анализ результатов

Способом, указанным выше, были обработаны данные измерений для всех 27 экспериментальных ситуаций и получены функции распределения фотонов по пробегам, соответствующие различным вариациям толщины слоя и размеров частиц. При анализе результатов удобно ввести параметр $N = t_k/d_{ср.}$ (эффективное число слоев в кювете) как некоторую характеристику образца. Обоснованием целесообразности введения такого параметра может послужить следующее. При больших размерах частиц (т. е. в приближении геометрической оптики) рассеивающим образцам, связанным между собой во всех деталях изотропным афинным преобразованием,[4] должно из соображений подобия отвечать одно и то же распределение $W(L)$, где L — безразмерная длина пробега, отнесенная к какому-либо характерному линейному размеру образца. Отсюда видно, что при сохранении подобия внешних форм образцов отличающиеся $W(L)$ могут соответствовать только образцам с разным числом слоев N, которые не связаны упомянутым преобразованием. При сопоставлении распределений удобно принять в качестве безразмерной длины пробега $L = l/t_k$. При этом для сохранения формы записи соотношения (4) параметры, входящие в него, должны быть изменены соответствующим образом:

$$\left.\begin{aligned} A \to A^* &= A t_k^{\nu-1}, \\ a \to a^* &= a t_k, \\ \nu \to \nu^* &= \nu, \\ \Delta \to \Delta^* &= \Delta, \\ \alpha \to \alpha^* &= \alpha t_k, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

в чем легко убедиться прямой подстановкой. Рис. 2 иллюстрирует изменение выраженных таким способом параметров, характеризующих распределение $W(L)$ в зависимости от N.

Для выявления тенденций все 27 обследуемые ситуации были разделены на 5 групп по формальному признаку

$$\text{I} — 1 \leqslant N < 2,$$
$$\text{II} — 2 \leqslant N < 4,$$

---

[3] Это, в частности, означает, что найденные таким образом распределения могут использоваться только для вычисления оптических параметров образца, не зависящих от времени движения фотонов по траектории.

[4] Т. е. отличающимся только линейным масштабом при полном сохранении всех углов.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

$$III = 4 \leqslant N < 8,$$
$$IV - 8 \leqslant N < 16,$$
$$V - 16 \leqslant N < 32.$$

Для каждой из групп было найдено среднее значение соответствующего параметра и среднее значение N (кружки большого размера на рис. 2). Кроме того, для иллюстрации разброса результатов, относящихся к индивидуальным опытам, на этих графиках представлены данные, относящиеся к каждой из обследованных 27 ситуаций, причем тонкими линиями соединены значки, отвечающие одному и тому же размеру зерен $d_{ср.}$.

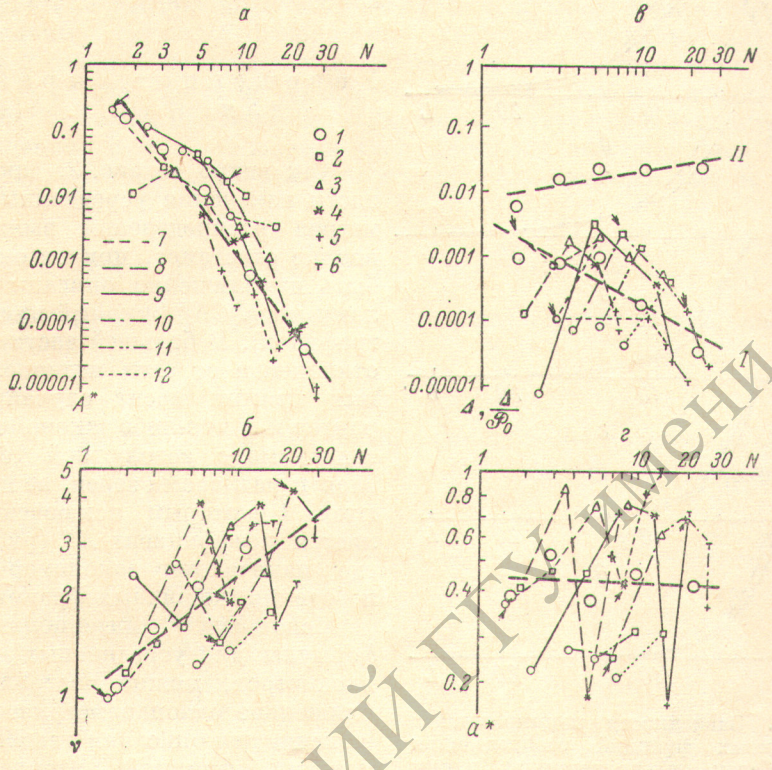

Рис. 2. Зависимости приведенных параметров распределений A^*, a^*, ν^*, Δ^* от эффективного числа слоев N.

Разным значкам соответствуют различные толщины слоев. *1* — $t_k = 0.3$ см, *2* — $t_k = 0.55$ см, *3* — $t_k = 1.0$ см, *4* — $t_k = 1.51$ см, *5* — $t_k = 2.0$ см, *6* — $t_k = 2.5$ см. Тонкими линиями соединены значки, отвечающие опытам с одинаковыми фракциями: *7* — $d_{ср.} = 0.28$ см, *8* — $d_{ср.} = 0.18$ см, *9* — $d_{ср.} = 0.12$ см, *10* — $d_{ср.} = 0.072$ см, *11* — $d_{ср.} = 0.05$ см, *12* — $d_{ср.} = 0.036$ см. Рис. 2, *в*: *I* — $\Delta/\mathscr{P}_0 = 0.0085N - 1.54$, *II* — $\Delta/P_0 = 0.0067N^{0.77}$.

Рис. 2, *а* показывает, что значение параметра A^*, величина которого в основном определяет пропускание образца в начальной точке $\mathscr{P}$ ($\alpha = 0$), падает с ростом N от 2 до 28 более чем на 4 десятичных порядка. Одновременно при этом величина эффективной кратности рассеяния ν существенно возрастает (рис. 2, *б*). Особо следует отметить, что относительное значение «засветки» $\Delta/\mathscr{P}_0$ также возрастает с увеличением N, хотя сама величина Δ при этом падает (рис. 2, *в*). Несколько неожиданным является практическое постоянство параметра a^* (рис. 2, *г*), определяющего затухание $W(L)$ при $L \to \infty$. Из сопоставления (2) и (3) этому параметру можно придать смысл коэффициента рассеяния единичного объема в масштабе L и его независимость от числа слоев N остается пока непонятной. Возможно, что здесь играет роль поглощение фотонов стенками кювет, диаметр которых в наших опытах оставался постоянным, т. е. имеет место недостаточное приближение к модели бесконечного протяженного слоя.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

На рис. 3 для каждой из пяти групп толстыми сплошными линиями изображены результаты усреднения предварительно нормированных распределений $W(L)/W_{max}$. Как видно, форма кривых $W(L)/W_{max}$ с ростом эффективного числа слоев N изменяется от практически экспоненциальной ($N < 2$) до кривой с явно выраженным максимумом распределения при $L > 1$ и намечающейся точкой перегиба в области малых L. Величина относительной засветки характеризуется вертикальным отрезком при $L=0$.

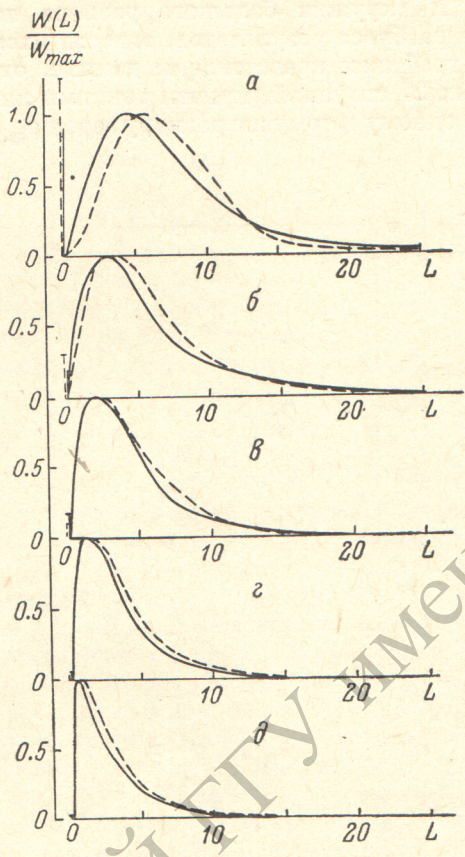

Рис. 3. Зависимости нормированных усредненных функций распределения по пробегам от приведенной длины $L=l/t_к$.

Сплошные линии — усредненные экспериментальные значения; штриховые линии — результаты вычислений по однопараметрической формуле (6).
Вертикальные отрезки в начале координат обозначают Δ/W_{max}. $а - 16 \leqslant N_V < 32$, $N_{ср.} = 25$; $б - 8 \leqslant N_{IV} < 16$, $N_{ср.} = 10.75$; $в - 4 \leqslant N_{III} < 8$, $N_{ср.} = 5.79$; $г - 2 \leqslant N_{II} > 4$, $N_{ср.} = 3.05$; $д - 1 \leqslant N_I < 2$, $N_{ср.} = 1.81$.

Упрощенные выражения для $W(L)$ и $\mathcal{T}(\alpha)$

Как видно из рис. 2, закономерности изменения усредненных параметров распределений выявляются вполне отчетливо, причем они могут быть приближенно описаны формулами типа CN^x (жирный пунктир на графиках). В большей части случаев отклонение от этих интерполяционных прямых носит случайный характер и какие-либо закономерности, связанные с абсолютной толщиной слоя и размерами зерен, не проявляются. Некоторым исключением является коэффициент A^* (рис. 2, *а*), где намечаются закономерности в поведении различных фракций.

Используя интерполяционные формулы для усредненных значений параметров, можно построить приближенное однопараметрическое выражение для описания тенденций изменения функций распределения $W(L)$ исследованных образцов. Подстановка в (4) выражений $A^* = 2N^{-3.4}$, $\nu^* = N^{0.428}$, $a^* = 0.45$, $\Delta = 0.0082N^{-1.54}$ дает

$$W(L, N) = 2N^{-3.4}L^{(N^{0.428}-1)}e^{-0.45L} + 0.0082N^{-1.54}\delta_+(0). \quad (6)$$

На рис. 3 жирными штриховыми линиями показаны нормированные распределения, вычисленные по этой формуле.

Видно, что расчетные кривые удовлетворительно совпадают с усредненными распределениями, полученными из экспериментальных данных. Это означает, что формула (6) достаточно хорошо передает тенденции в изменении формы $W(L)$, в частности, закономерное смещение максимума распределения от значений L, близких к нулю, до $L \approx 5$ с ростом $N_{ср.}$ в пределах обследованного диапазона величины. Что касается абсолютных ординат $W(L)$, то вычисления показали, что расхождение между их значениями, рассчитанными по формуле (6), и найденными обращением результатов отдельного эксперимента в худших случаях не превышает порядка величины, а большей частью они различаются менее чем в 2÷3 раза. Такое расхождение можно считать приемлемым для грубых оценок, имея

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

в виду, что в рассматриваемой серии опытов величина пропускания $\mathscr{P}(\alpha)$ варьировала примерно на 4 порядка.

Используя интерполяционные формулы для приведенных параметров и учитывая связь последних с истинными (5), можно из (2) получить оценочную формулу для пропускания исследованных образцов

$$\mathscr{P}(\alpha) = \frac{A^*\Gamma(\nu)}{t_k^{\nu-1}\left(\frac{a^*}{t_k}+\alpha\right)^{\nu}} + \Delta = \frac{2\Gamma(N^{0.428})}{N^{3.4}t_k^{(N^{0.428}-1)}\left(\frac{0.45}{t_k}+\alpha\right)^{N^{0.428}}} + 0.0082N^{-1.54}. \qquad (7)$$

Результаты расчета по этой формуле для четырех конкретных экспериментальных ситуаций изображены жирными штрихами на рис. 1 (на рис. 2 точки, отвечающие этим случаям, отмечены стрелками). Видно, что форма рассчитанных по (7) кривых $\mathscr{P}(\alpha)$, в частности, появление насыщения с ростом α при больших N, хорошо согласуется с экспериментом. Расхождение абсолютных значений в худших случаях (например $N=7.64$ на рис. 1) менее порядка величины; в остальных примерах оно не превосходит 2—3 раз.

Об участке линейной связи между α и $\ln[\mathscr{P}(\alpha)]$

Очевидно, что для ограниченного слабопоглощающего рассеивающего образца можно записать

$$-\ln\mathscr{P}(\alpha) = l_{\text{эфф.}}\alpha + B = \gamma t_k \eta\alpha + B, \qquad (8)$$

где $l_{\text{эфф.}}$ — эффективная длина пути фотонов в поглощающем веществе порошка, зависящая в общем случае как от коэффициента рассеяния, так и от α; $t_k\eta$ — эквивалентная толщина массивного слоя вещества; $\gamma = l_{\text{эфф.}}/t_k$ — коэффициент удлинения пути фотонов; B — оптическая толща, связанная с рассеивающими свойствами образца, но не зависящая от α.

Как следует из общих свойств функции $W(l)$, при достаточно малых $\alpha \leqslant \alpha_{\text{пред.}}$ величина $l_{\text{эфф.}}$, а следовательно, и коэффициент удлинения γ перестает зависеть от коэффициента поглощения и выражение (8) становится линейным относительно α [8].[5] Это означает, что при выполнении упомянутого условия спектр пропускания рассеивающего порошка в слое t_k эквивалентен спектру слоя массивного вещества толщиной $\gamma t_k \eta$, но интенсивность прошедшего света оказывается ослабленной за счет чистого рассеяния в e^{-B} раз.

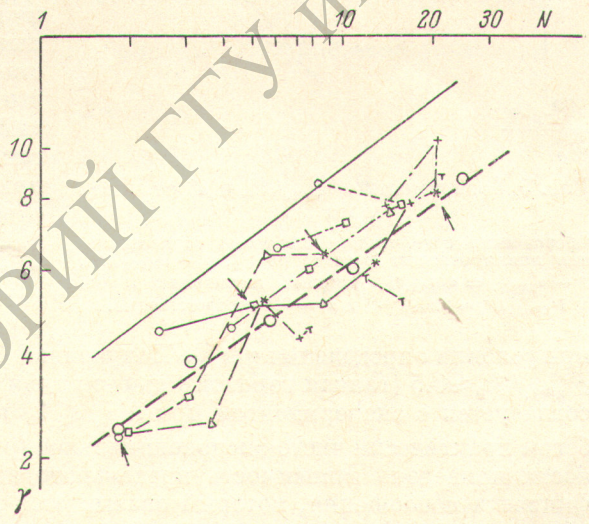

Рис. 4. Зависимость коэффициента усиления γ от числа слоев.

Обозначения те же, что на рис. 2; тонкая прямая — расчет по формуле (9), жирная штриховая линия — $\gamma = 2.67\ N^{0.324}$.

Как следует из распределений, представленных на рис. 3, можно ожидать увеличения γ с ростом эффективного числа слоев N, когда положение

[5] В случае закона Бугера вывод о существовании такой линейной связи при малых α можно сделать и на основании иных подходов (см., например, [7]), однако нам представляется, что из анализа свойств $W(l)$ он получается наиболее наглядно.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

максимума кривых $W(L)$ смещается в сторону больших L. Это действительно имеет место, как показывает рис. 4. На нем представлены индивидуальные и усредненные значения отношений тангенсов углов наклона касательных в начальном участке кривых — $\ln \mathscr{P}(\alpha)$ и углов наклона соответствующих бугеровских прямых $\alpha \eta t_k$ (рис. 1). С другой стороны, с учетом (4) можно найти для $\alpha=0$

$$\gamma_0 = \frac{l_{эфф.}^{(\alpha=0)}}{\eta t_k} = \frac{l_{ср.}}{\eta t_k} = \frac{\int_0^\infty lW(l)\,dl}{\eta t_k \int_0^\infty W(l)\,dl} = \frac{\nu}{at_k\eta}. \qquad (9)$$

На рис. 4 этому выражению при $\nu^*=N^{0.428}$ и $a^*=0.45$ отвечает тонкая сплошная линия. Она проходит выше экспериментальных значений γ, поскольку при графическом определении последних аппроксимируется область конечных значений α, т. е. определяется эффективная длина пробега $l_{эфф.}(\alpha) < l_{эфф.}(0)=l_{ср.}$

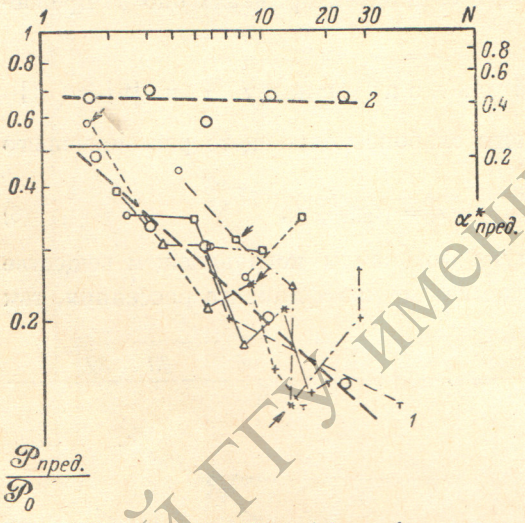

Рис. 5. Зависимости $\mathscr{P}_{пред.}/\mathscr{P}_0$ и α^* от числа слоев N.

Обозначения те же, что на рис. 2; тонкая горизонтальная линия отвечает расчету по [8], $1 - P_{пред.}/P_0$, $2 - \alpha^*_{пред.} = \alpha_{пред.} t_k$, жирные штриховые линии $P_{пред.}/P_0 \approx 0.61 N^{-0.47}$ и $\alpha^* \approx 0.4$ соответственно.

В прикладных целях представляет интерес проследить за протяженностью участка линейной связи, которая может характеризоваться отношением $\mathscr{P}_{пред.}/\mathscr{P}_0$, где $\mathscr{P}_0=\mathscr{P}(\alpha=0)$, а $\mathscr{P}_{пред.}=\mathscr{P}(\alpha_{пред.})$ отвечает границе применимости приближения (8) с постоянным коэффициентом γ. Рис. 5 показывает, что в случае наибольших значений N эта величина достигает ~ 0.15. Таким образом, при достаточно большом числе слоев почти вся область значений $\mathscr{P}(\alpha)$ для диспергированного образца может рассматриваться как спектральная характеристика массивного вещества при условии определения γ и B. Полученная в [8] для $W(l) \sim e^{-\mu l}$ оценка $\mathscr{P}_{пред.}/\mathscr{P}_0 \approx 0.5$ (тонкая горизонтальная линия на рис. 5) удовлетворительно согласуется с экспериментом при $N_{ср.} \leqslant 2$, когда распределение по пробегам практически чисто экспоненциальное (рис. 3). На рис. 5 для наглядности приведена зависимость предельного значения приведенного коэффициента поглощения, который оказывается почти неизменным и равным $\alpha^* = \alpha_{пред.} t_k \simeq 0.4$.

Заключение

Представляется очевидным, что полученные результаты в значительной мере приложимы к широкому кругу монодисперсных слабопоглощающих порошков изотропных веществ с показателями преломления, не слишком отличающимися от характерных для стекла, если размеры зерен достаточно велики по сравнению с длиной волны, а геометрия опыта сходна с описанной.

Однако, кроме того, здесь стоит отметить возможность использования результатов анализа распределений по пробегам для плотно упакованных рассеивающих образцов при исследовании оптических свойств облакоподобных объектов.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

Как известно, решения уравнения переноса, полученные для облачных моделей, в ряде случаев могут быть выражены через безразмерные оптические толщи σl. Это открывает путь для сопоставления моделей с различным коэффициентом заполнения объема рассеивающими центрами η, строго говоря, при надлежащем учете возможных кооперативных эффектов, могущих проявиться при плотной упаковке частиц.

В этой связи небезынтересна попытка (хотя и недостаточно строго обоснованная) использования интерполяционной формулы, вытекающей из графика рис. 4, для оценки коэффициента удлинения пути при прохождении света сквозь облака. В случае реальных облаков толщиной $t_{\text{обл.}}=0.5—10$ км, водностью $\xi=0.1—0.5$ г·м$^{-3}$ при среднем диаметре капель $d_k=10$ мкм эффективное число слоев в них при плотной упаковке капель

$$N_{\text{эфф.}} \approx \frac{\xi t_{\text{обл.}}}{\rho d_k} \approx 5 \div 500$$

($\rho=1$ г·м$^{-3}$ — удельный вес воды), откуда $\gamma=2.7\ N^{0.324} \approx 5 \div 20$.

Как известно, расчеты для облачных моделей на основании распределений по пробегам, проведенные в [10], и экспериментальные результаты, описанные в [11], дают $\gamma=2 \div 25$, т. е. практически те же значения. Хотя используемая в цитированных работах функция пропускания не является бугеровской, а соответствует «закону квадратного корня», сопоставление с результатами настоящей работы может быть проведено, так как величина γ для пропущенного облаками света практически не зависит от формы функций пропускания (см. там же).

Считаем своим приятным долгом выразить глубокую признательность Л. М. Романовой за многочисленные стимулирующие обсуждения и ценные замечания, а также Р. М. Джабар-Заде за содействие в проведении вычислительных работ на ЭВМ.

Кроме того, приносим благодарность О. Н. Скобеевой за помощь в обработке результатов.

Литература

[1] W. M. Irvine. Bull. Astron. Inst. Nederland. 1964; J. Q. S. R. T., *8*, 471, 1968; H. Van de Hulst, W. M. Irvine. Soc. Roy. Sci. Liege, *7*, 11 th Intern. Astrophys. Symposim. Liege.
[2] Л. М. Романова. Изв. АН СССР, ФАО, *2*, 844, 1966.
[3] И. А. Палицына, Е. П. Кропоткина, В. И. Дианов-Клоков. Ж. прикл. спектр., *10*, 137, 1969.
[4] В. И. Дианов-Клоков, И. А. Палицына, А. Д. Стаховский. ПТЭ, № 6, 89, 1963.
[5] Г. В. Розенберг. ДАН СССР, *145*, 77, 1962.
[6] Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике, 222. Изд. «Наука», М., 1968.
[7] Г. В. Розенберг. Усп. физ. наук, *91*, 569, 1967; Г. В. Розенберг, М. Ю. Сахновский, С. Г. Гуменецкий. Опт. и спектр., *23*, 797, 1967.
[8] В. И. Дианов-Клоков. Ж. прикл. спектр., *16*, 875, 1972.
[9] В. И. Дианов-Клоков, Л. Д. Краснокутская. Изв. АН СССР, ФАО, *8*, 843, 1972.
[10] В. И. Дианов-Клоков, Е. П. Кропоткина, И. П. Малков, О. А. Матвеева. Изв. АН СССР, ФАО, *4*, 780, 1970.

Поступило в Редакцию 14 апреля 1972 г.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины