КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 539.184.01

ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ ВОДОРОДОПОДОБНОГО ИОНА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАРЯДОМ ЯДРА

Л. Н. Лабзовский

В работах [1–4] изучались уровни энергии многозарядных ионов с большими значениями заряда ядра Z. Такое исследование представляет интерес в связи с появившимися в последнее время возможностями экспериментального наблюдения многозарядных ионов в лабораторных плазменных установках [5–7]. В настоящей работе мы рассмотрим поведение одноэлектронного многозарядного иона, находящегося в основном состоянии, во внешнем электрическом поле.

Основной уровень энергии водородоподобного иона под действием внешнего однородного электрического поля испытывает сдвиг. Если поле можно считать слабым, то этот сдвиг пропорционален F^2, где F — напряженность поля. Коэффициент пропорциональности (умноженный на —2) называется поляризуемостью иона α и определяется по формуле (в единицах $\hbar=c=m=1$, m — масса электрона)

$$\alpha=2e^2 \sum_n{}' \frac{|\langle n \,|\, z \,|\, 0\rangle|^2}{\varepsilon_n-\varepsilon_0}, \tag{1}$$

где z — декартова координата (электрическое поле мы считаем направленным по оси z), а суммирование производится по полной системе невозмущенных собственных функций уравнения Дирака для электрона, движущегося в кулоновом поле ядра. Штрих означает, что в сумме пропущено основное состояние $n=0$. Внешнее поле мы считаем здесь слабым, однако для иона с зарядом Z это поле может быть в Z раз сильнее обычных слабых полей. В нерелятивистском пределе при малых значениях Z получается [8]: $\alpha=4.5/Z\,(e^2Z)^3$, однако с ростом Z поляризуемость убывает довольно медленно: при $Z\to 137$, как видно из (1), $\alpha\sim e^2$, т. е. $\alpha\sim 1/Z$.

Заметим, что штрих в сумме (1) может быть опущен, так как $\langle 0\,|\,z\,|\,0\rangle=0$ по соображениям четности. Таким образом, вместо (1) можно использовать выражение

$$\alpha=2e^2 \lim_{\varepsilon\to\varepsilon_0} \sum_n \frac{|\langle n \,|\, z \,|\, 0\rangle|^2}{\varepsilon_n-\varepsilon}. \tag{2}$$

Для вычисления поляризуемости по формуле (2) можно использовать функцию Грина для уравнения Дирака с кулоновским потенциалом. Такая функция Грина в форме, удобной для вычислений, была написана Мартином и Глаубером [9]. Сравнивая спектральное разложение для функции Грина

$$G_\varepsilon(\mathbf{r}\mathbf{r}')=\sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r})\,\bar{\psi}_n(\mathbf{r}')}{\varepsilon_n-\varepsilon}, \tag{3}$$

где $\bar{\psi}$ — дираковски-сопряженная функция, с выражением (2) для поляризуемости, получаем

$$\alpha=2e^2 \lim_{\varepsilon\to\varepsilon_0} \langle 0\,|\, zG_\varepsilon(\mathbf{r}\mathbf{r}')\,\beta z \,|\, 0\rangle. \tag{4}$$

Подставляя в (4) выражение для G_ε, приведенное в [9], и производя громоздкое интегрирование, мы приходим к следующему окончательному выражению для α (подробности расчета будут опубликованы отдельно):

$$\alpha=\frac{2e^2}{(e^2Z)^4\,\Gamma(2\gamma_1+1)}\left\{\frac{(4\gamma_1+5)(2\gamma_1+1)\,\Gamma(2\gamma_1+3)}{36\,(1+\gamma_1)}\left((1+\gamma_1)^3-(e^2Z)^2(1-\gamma_1)\right)+\right.$$

$$+\frac{\Gamma(1-\gamma_1+\gamma_2)}{9\gamma_2\,(2+\gamma_2)\,\Gamma(2\gamma_2+2)}\Big[\left((2+\gamma_2)^2(1-\gamma_1)-(e^2Z^2)(1+\gamma_1)\right)\times$$

$$\times \frac{\gamma_1 \Gamma(2\gamma_1+5)\,\Gamma^2(\gamma_1+\gamma_2+3)}{\Gamma(\gamma_1+\gamma_2+6)}\, {}_3F_2(\gamma_1+\gamma_2+3,\ \gamma_1+\gamma_2+3,\ \gamma_2-\gamma_1+1;$$

$$2\gamma_2+2,\ \gamma_1+\gamma_2+6;\ 1) + 2(e^2Z)^2((2+\gamma_2)^2(1-\gamma_1) - (2+\gamma_2)(1-\gamma_1) -$$

$$-(2+\gamma_1)(e^2Z)^2)\frac{\Gamma(2\gamma_1+4)\,\Gamma(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_2)\,\Gamma(\gamma_1+\gamma_2+3)}{\Gamma(\gamma_1+\gamma_2+5)}\times$$

$$\left.\times\, {}_3F_2(\gamma_1+\gamma_2+3,\ \gamma_1+\gamma_2+2,\ \gamma_2-\gamma_1+1;\ 2\gamma_2+2,\ \gamma_1+\gamma_2+5;\ 1)\right] +$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma_2-\gamma_1)}{9\gamma_2(2+\gamma_2)\,\Gamma(2\gamma_2)}\Big[((2+\gamma_2)^2(1+\gamma_1)-(e^2Z)^2(1-\gamma_1))\times$$

$$\times\frac{\gamma_1\Gamma(2\gamma_1+5)\,\Gamma^2(2+\gamma_1+\gamma_2)}{\Gamma(\gamma_1+\gamma_2+5)}\, {}_3F_2(\gamma_1+\gamma_2+2,\ \gamma_1+\gamma_2+2,\ \gamma_2-\gamma_1;\ 2\gamma_2,\ \gamma_1+\gamma_2+$$

$$+5;\ 1) + 2(e^2Z)^2((2+\gamma_2)^2(1+\gamma_1)+(2+\gamma_2)^2-(e^2Z)^2(1-\gamma_1)+(2+\gamma_2)(1-\gamma_1))\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2\gamma_1+4)\,\Gamma(\gamma_1+\gamma_2+1)\,\Gamma(\gamma_1+\gamma_2+2)}{\Gamma(\gamma_1+\gamma_2+4)}\, {}_3F_2(\gamma_1+\gamma_2+2,\ \gamma_1+\gamma_2+1,$$

$$\left.\left.\gamma_2-\gamma_1;\ 2\gamma_2,\ \gamma_1+\gamma_2+4;\ 1)\right]\right\}. \tag{5}$$

Здесь через ${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; x)$ обозначена обобщенная гипергеометрическая функция [10]

$$ {}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \beta_1\beta_2, \ldots, \beta_q; x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1+k), \ldots, \Gamma(\alpha_p+k)\,\Gamma(\beta_1), \ldots, \Gamma(\beta_q)}{\Gamma(\beta_1+k), \ldots, \Gamma(\beta_q+k)\,\Gamma(\alpha_1), \ldots, \Gamma(\alpha_p)}\,\frac{x^k}{k!}, \tag{6}$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция, $\gamma_1 = \sqrt{1-(e^2Z)^2}$, $\gamma_2 = \sqrt{4-(e^2Z)^2}$.

Произведем теперь разложение формулы (5) по параметру $(e^2Z)^2$ и вычислим нулевой и первый члены разложения. Опуская выкладки, приведем сразу результат

$$\alpha = \frac{9}{2}\,\frac{1}{Z(e^2Z)^3} - \frac{14}{3}\,\frac{1}{Z(e^2Z)}. \tag{7}$$

Поправочный член порядка $(e^2Z)^2$ к поляризуемости при малых значениях Z был вычислен также в работе [11] путем непосредственного решения неоднородного дираковского уравнения первого порядка теории возмущений по внешнему полю. Решение этого уравнения оказалось возможным получить с точностью до членов порядка $(e^2Z)^2$ включительно. Результат совпадает с нашим.

Заметим, наконец, что наши формулы дают возможность проследить, какие состояния в сумме (1) дают вклад в поляризуемость. После интегрирования по углам из формулы (4) следует, что вклад дают состояния $P_{1/2}$, $P_{3/2}$. В нерелятивистском пределе эти состояния оказываются вырожденными, а их вклады относятся как 1 : 2.

Литература

[1] Л. Н. Лабзовский. ЖЭТФ, *59*, 168, 1970.
[2] Л. Н. Лабзовский. ЖЭТФ, *59*, 2165, 1970.
[3] Г. Л. Климчицкая, Л. Н. Лабзовский. ЖЭТФ, *60*, 2018, 1971.
[4] Г. Л. Климчицкая, Л. Н. Лабзовский. Опт. и спектр., *34*, 608, 1973.
[5] Э. Я. Кононов. Опт. и спектр., *20*, 537, 1966.
[6] Э. Я. Кононов, Л. И. Подобедова, К. Н. Кошелев. Опт. и спектр., *30*, 394, 1971.
[7] Э. Я. Кононов, К. Н. Кошелев, А. Н. Рябцев. Опт. и спектр., *30*, 996, 1971.
[8] Г. Бете, Э. Солпитер. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. Физматгиз, М., 1960.
[9] P. C. Martin, R. J. Glauber. Phys. Rev., *109*, 1307, 1958.
[10] S. J. Slater. Generalized Hypergeometric Functions. Cambridge, 1966.
[11] M. L. Bartlett, A. E. Power. J. Phys. *A2*, 419, 1969.

Поступило в Редакцию 6 марта 1972 г.