

Влияние запаздывания в звене Дуффинга на стационарные состояния неавтономного осциллятора Ван дер Поля-Дуффинга

Р. И. КОРЖИК

Исследовано влияние запаздывания в звене Дуффинга на динамические режимы укороченного уравнения неавтономного осциллятора Ван дер Поля-Дуффинга с внешним гармоническим воздействием. Выведено укороченное уравнение и построены карты динамических режимов для различных значений параметра, характеризующего запаздывание.

Ключевые слова: осциллятор Ван дер Поля-Дуффинга, стационарные состояния, влияние запаздывания, укороченное уравнение, внешнее периодическое воздействие, критерий устойчивости Рауса-Гурвица, бифуркации.

The influence of delay in Duffing link on the dynamical regimes of abridged equation of van der Pol-Duffing non-autonomous oscillator with an external harmonic influence is investigated in the article. The abridged equation is derived and the maps of dynamical regimes for different values of the parameter characterizing the delay are presented.

Keywords: van der Pol-Duffing oscillator, stationary states, influence of delay, abridged equation, external periodic effect, Routh-Hurwitz stability criterion, bifurcation.

В статьях [1] и [2] исследовалось влияние запаздывания на стационарные состояния неавтономного осцилляторов Ван дер Поля и Дуффинга, которые задаются соответственно уравнениями (1) и (2)

$$\ddot{x}_t - (\lambda - \beta x_{t-\delta}^2) \dot{x}_{t-\delta} + x_t = b \sin \omega t, \quad (1)$$

$$\ddot{x}_t + \gamma \dot{x}_t + \omega_0^2 x_t + \beta x_{t-\delta}^3 = b \sin \omega t. \quad (2)$$

В ходе исследования было выяснено, что варьирование запаздывания может привести к изменению режима работы системы. Рассмотрим более общий случай неавтономного осциллятора Ван дер Поля-Дуффинга с запаздыванием в звене, соответствующим уравнению Дуффинга:

$$\ddot{x}_t - (\lambda - \alpha x_t^2) \dot{x}_t + \omega_0^2 x_t + \beta x_{t-\delta}^3 = b \sin \omega t, \quad (3)$$

где $x_t = x(t)$, $x_{t-\delta} = x(t-\delta)$, параметр $\beta > 0$ введен по аналогии с параметром в осцилляторе Дуффинга, b, ω – амплитуда и частота внешнего гармонического воздействия, $\delta \geq 0$ – запаздывание в звене Дуффинга.

1 Вывод укороченного уравнения

Как и в работах [1–3], решение этого уравнения будем искать в виде квазигармонического колебания с медленно меняющейся амплитудой A_t :

$$x(t) = \operatorname{Re} \left(A(t) e^{i\omega t} \right) = \frac{1}{2} A(t) e^{i\omega t} + \frac{1}{2} A^*(t) e^{-i\omega t}, \quad (4)$$

накладывая на искомое решение дополнительное условие

$$\dot{A} e^{i\omega t} + \dot{A}^* e^{-i\omega t} = 0.$$

После подстановки (4) в (3) и усреднения за период $\frac{2\pi}{\omega}$ получаем укороченное урав-

нение:

$$\dot{A} + i \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} A - \frac{\lambda}{2} A + \left(\frac{\alpha}{8} - \frac{3\beta}{8\omega} i e^{-i\delta\omega} \right) |A|^2 A + \frac{b}{2\omega} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) можно свести к уравнению с меньшим числом параметров:

$$\dot{z}_\tau + i\Delta z_\tau - z_\tau - (\mu i e^{-i\theta} - 1) |z_\tau|^2 z_\tau + \varepsilon = 0, \quad (6)$$

где

$$\tau = \frac{\lambda t}{2}, \quad z_\tau = A \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}}, \quad \Delta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\lambda\omega}, \quad \varepsilon = \frac{b}{2\omega\lambda} \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}}, \quad \theta = \delta\omega, \quad \mu = \frac{3\beta}{\alpha\omega}.$$

Функцию z_τ можно записать в виде $R_\tau e^{i\phi_\tau}$, где R_τ и ϕ_τ – некоторые функции действительного переменного τ , принимающие действительные значения.

Тогда, выделяя в (6) действительную и мнимую части, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{R} = (\mu \sin \theta - 1)R^3 + R - \varepsilon \cos \phi, \\ \dot{\phi} = \mu R^2 \cos \theta - \Delta + \frac{\varepsilon}{R} \sin \phi. \end{cases} \quad (7)$$

2 Построение и анализ бифуркационных диаграмм

При помощи критерия Рауса-Гурвица можно получить условие устойчивости стационарного состояния (R_0, ϕ_0) :

$$\begin{aligned} 0 < 3(\mu^2 - 2\mu \sin \theta + 1)\xi_0^2 + 4(\mu \sin \theta - \Delta\mu \cos \theta - 1)\xi_0 + \Delta^2 + 1, \\ 0 > 2(\mu \sin \theta - 1)\xi_0 + 1, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\xi_0 = R_0^2$.

Само значение ξ_0 будет задаваться уравнением

$$(\mu^2 - 2\mu \sin \theta + 1)\xi_0^3 + 2(\mu \sin \theta - \Delta\mu \cos \theta - 1)\xi_0^2 + (\Delta^2 + 1)\xi_0 = \varepsilon^2. \quad (9)$$

На основе неравенств (8) и уравнения (9) можно построить линии бифуркации. На рисунке 1 приведены полученные линии для системы без запаздывания в плоскости параметров $\Delta - \varepsilon$. На нем видно пять различных областей. Хотя на самом деле областей шесть. Шестая область будет более отчетливо видна при наличии запаздывания.

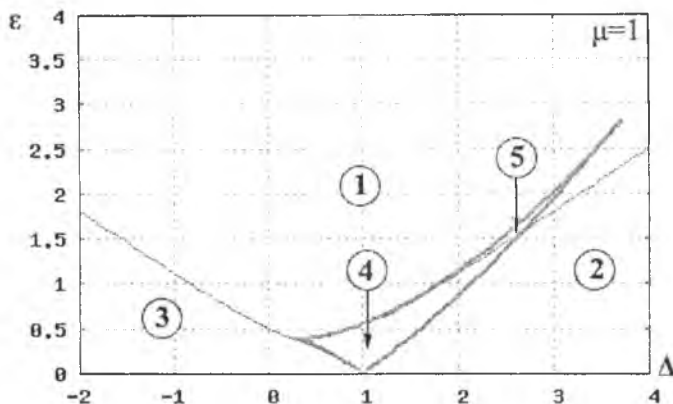


Рисунок 1 – Линии бифуркаций при отсутствии запаздывания в плоскости параметров $\Delta - \varepsilon$.

Для описания поведения системы при различных значениях параметров возьмем в пространстве параметром некоторую точку и будем ее постепенно перемещать между областями. При пересечении жирной линии будет меняться количество стационарных состояний, а при пересечении тонкой линии – одно из стационарных состояний будет менять свою устойчивость.

Если параметры системы будут соответствовать первой области, то на фазовом портрете будет одно устойчивое стационарное состояние. Если из первой области переместиться во вторую, то произойдет пересечение тонкой линии. Во второй области по-прежнему будет одно стационарное состояние, но оно будет неустойчивым. Это неустойчивое стационарное состояние будет находиться внутри устойчивого предельного цикла. При перемещении в четвертую область происходит пересечение жирной линии. Поэтому в четвертой области будет три стационарных состояния: одно устойчивое и два неустойчивых (одно из них будет седлом). В пятой области будет два устойчивых состояния равновесия и одно седло. Режим функционирования системы в третьей области схож с режимом функционирования во второй области.

Если начать изменять параметр θ в пределах полуинтервала $[0, \pi/2)$, то это будет приводить к деформированию линий бифуркаций. На рисунках 2а и 2б показаны бифуркационные диаграммы для различных значений параметра θ .

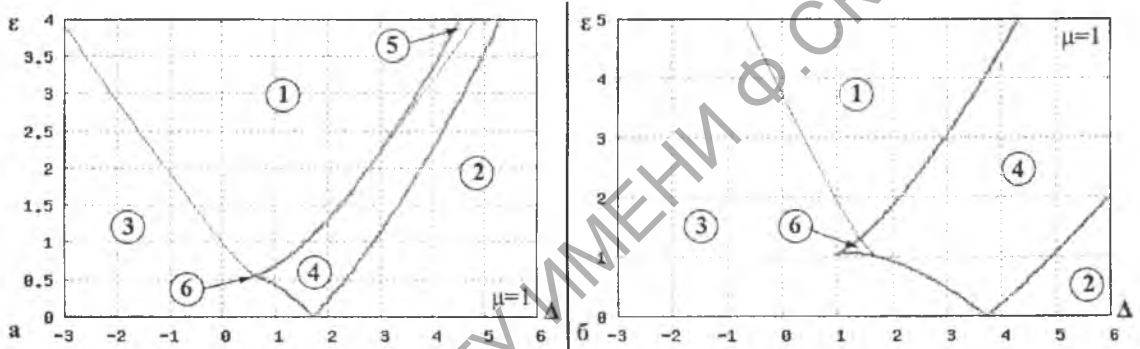


Рисунок 2 – Линии бифуркаций при $\theta = \pi/6$ (а) и при $\theta = \pi/3$ (б) в плоскости параметров $\Delta - \varepsilon$.

На рисунке 3а и 3б приведены диаграммы для $\theta \in (\pi/2; \pi)$. Из рисунка видно, что линии бифуркаций при $\theta = \theta' \in (\pi/2; \pi)$ и линии бифуркаций для $\theta = \pi - \theta'$ симметричны относительно прямой $\Delta = 0$.

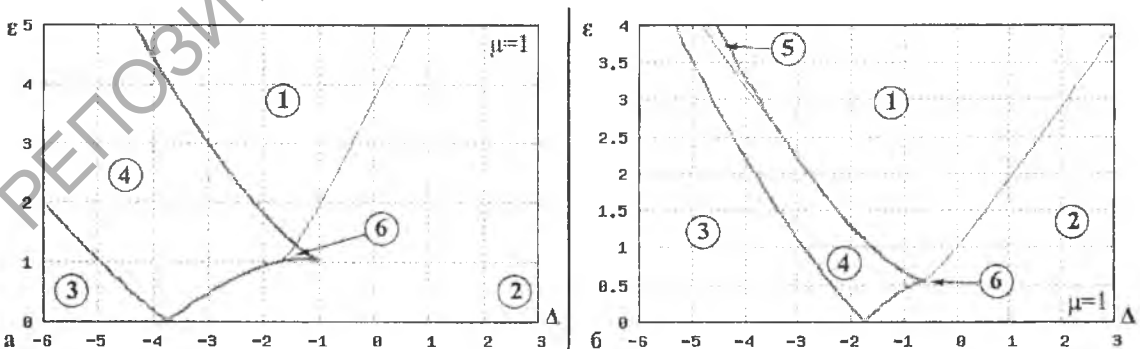


Рисунок 3 – Линии бифуркаций при $\theta = 2\pi/3$ (а) и при $\theta = 5\pi/6$ (б) в плоскости параметров $\Delta - \varepsilon$.

Когда параметр $\theta \in (\pi; 3\pi/2)$, диаграммы выглядят немного по-другому. Линии бифуркации приведены на рисунках 4а, 4б и 5а, 5б. В самих областях в системе по-прежнему наблюдается такое же количество состояний равновесия. Бифуркационные диаграммы при $\theta = \theta' \in (3\pi/2; 2\pi)$ и бифуркационные диаграммы при $\theta = 3\pi - \theta'$ также симметричны относительно прямой $\Delta = 0$.

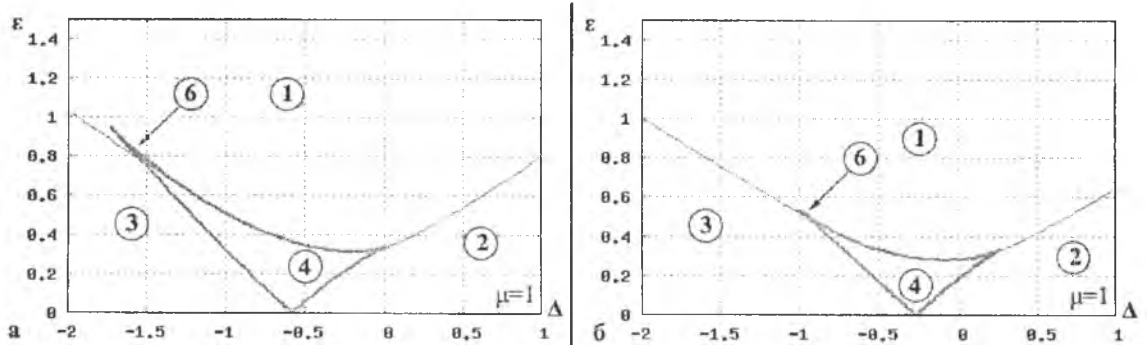


Рисунок 4 – Линии бифуркаций при $\theta = 7\pi/6$ (а) и при $\theta = 4\pi/3$ (б) в плоскости параметров $\Delta - \varepsilon$.

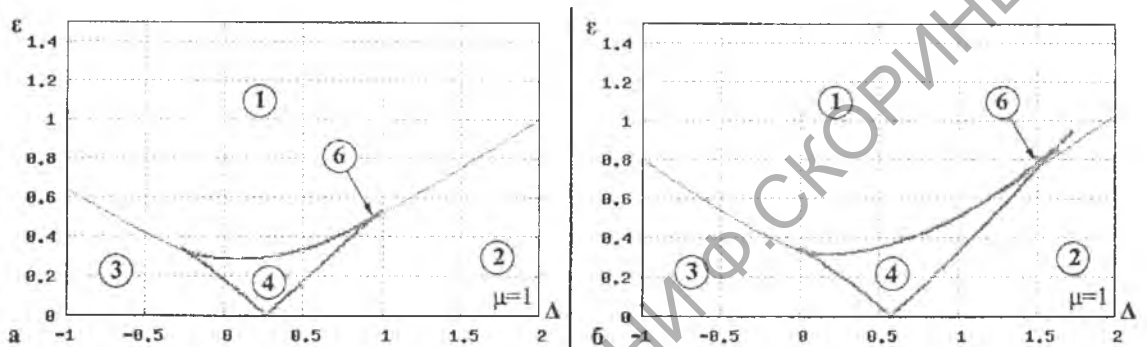


Рисунок 5 – Линии бифуркаций при $\theta = 5\pi/3$ (а) и при $\theta = 11\pi/6$ (б) в плоскости параметров $\Delta - \varepsilon$.

Заключение

Из полученных бифуркационных диаграмм видно, что изменение запаздывания при неизменных остальных параметрах может приводить к изменению устойчивости стационарных состояний, а также к изменению их количества.

Стоит также отметить, что при наличии запаздывания на основе приведенных диаграмм можно судить только о количестве стационарных состояний и их устойчивости. Наличие предельных циклов требует дальнейшего исследования. При наличии запаздывания и при определенных остальных параметрах системы, на фазовой плоскости может наблюдаться, к примеру, устойчивый фокус, окруженный неустойчивым предельным циклом, который в свою очередь находится внутри другого устойчивого предельного цикла.

Литература

1. Коржик, Р. И. Влияние запаздывания на стационарные состояния неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля / Р. И. Коржик, С. П. Жогаль // Известия Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. – 2010. – №3 (60). – С. 206-210.
2. Коржик, Р. И. Влияние запаздывания в неавтономном осцилляторе Дуффинга на стационарные состояния укороченного уравнения / Р. И. Коржик, С. П. Жогаль // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя П. М. Машэрава. – 2010. – №5 (59). – С. 8-11.
3. Кузнецов, А. П. Нелинейные колебания / А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин. – М.: Физматлит, 2002. – 292 с.