Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
"Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины"

Задорожнюк Елена Андреевна

НЕСКОЛЬКО ХАРАКТЕРИЗАЦИЙ p-РАЗРЕШИМЫХ M_p-ГРУПП

Октябрь 2003 Препринт № 54

Гомель

Все рассматриваемые нами в данной работе группы конечны. Все используемые обозначения и определения соответствуют принятым в [7, 4].

Как показывают исследования многих авторов, строение конечной группы тесно связано со свойствами её минимальных подгрупп. Напомним, например, что если группа G имеет нечётный порядок и все её минимальные подгруппы входят в центр группы G, то группа нильпотентна [10]. Если же у группы нечётного порядка все минимальные подгруппы нормальны, то такая группа сверхразрешима [6]. Эти результаты получили развитие в работах многих авторов. Среди недавних работ по теории минимальных подгрупп отметим содержательную работу [1].

В данной работе изучаются группы, у которых для некоторого фиксированного простого числа p каждая подгруппа порядка p содержится в гиперцентре своего нормализатора. Оказалось, что такие группы совпадают в точности с группами, у которых все их p-сверхразрешимые подгруппы p-нильпотентны. Получены характеризации p-разрешимых групп, у которых каждая подгруппа порядка p содержится в гиперцентре своего нормализатора.

Напомним, что подгруппа H группы G называется *n-минимальной*, если в G существует такая цепь, что

$$1 = H_0 < \cdot \ldots < \cdot H_{n-1} < \cdot H_n = H,$$

и в любой максимальной цепи такого вида число членов не превосходит $n+1$. Введем следующее

Определение. Пусть $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $p \in \pi$. Группу G назовём *nM_π-группой* (в частности, nM_p-группой при $\pi = \{p\}$), если для любой её n-минимальной (а при $n > 1$ и неэлементарной) πd-подгруппы H выполняется включение

$$H \subseteq Z_\infty(N_G(H)).$$

В частности, $1M\pi$-группу будем называть M_π-группой.

1. Лемма. *Пусть A_1, A_2 — такие нормальные в G подгруппы, что для любого G-главного pd-фактора H/K, где $K < H < A_i$ для любого $i = 1, 2$, выполняется следующее условие:*

$$C_G(H/K) = G. \quad (1)$$

Тогда условие (1) выполняется и для любого G-главного pd-фактора подгруппы A_1A_2.

Доказательство. Рассмотрим нормальный ряд группы G

$$1 \subseteq A_1 \subseteq A_1A_2.$$

Уплотним его до главного ряда группы G:

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_t = A_1 \subset G_{t+1} \subset \ldots \subset G_{t+r} = A_1A_2.$$

Так как по условию леммы все G-главные pd-факторы группы A_1 удовлетворяют условию (1), то нам достаточно показать, что все G-главные pd-факторы между A_1 и A_1A_2 удовлетворяют условию (1). Пусть H/K — произвольный G-главный pd-фактор, где $A_1 \subseteq H \subseteq A_1A_2$. Согласно [5, с. 15] фактор H/K является G-изоморфным фактору $H \cap A_2/K \cap A_2$. Значит, фактор $H \cap A_2/K \cap A_2$ является G-главным pd-фактором. Кроме того, $H \cap A_2 \subseteq A_2$. Но тогда по условию леммы имеем

$$C_G(H \cap A_2/K \cap A_2) = G = C_G(H/K).$$

Лемма доказана.

2. Лемма. *Всякая подгруппа nM_π-группы G является nM_π-группой.*

Доказательство. Пусть T — произвольная собственная подгруппа nM_π-группы G. Покажем, что группа T является nM_π-группой. Пусть H — произвольная n-минимальная (а при $n > 1$ и неэлементарная) πd-подгруппа группы T. Покажем, что $H \subseteq Z_\infty(N_T(H))$. Пусть $N = N_G(H)$. Так как группа G является nM_π-группой, то $H \subseteq Z_\infty(N)$. Поэтому нам достаточно лишь проверить, что

$$Z_\infty(N) \subseteq Z_\infty(N_T(H)).$$

Рассмотрим произвольный N-главный ряд в $Z_\infty(N)$:

$$1 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N_t = Z_\infty(N).$$

Ввиду леммы 1 имеем

$$C_N(N_i/N_{i-1}) = N$$

для любого $i = 1, \dots, t$.

Рассмотрим ряд

$$1 = N_0 \cap T \subseteq N_1 \cap T \subseteq \dots \subseteq N_t \cap T = Z_\infty(N) \cap T. \qquad (2)$$

Пусть $T_i = N_i \cap T$, где $i = 1, \dots, t$. Заметим, что $T_{i-1} \lhd T_i$ для всех $i = 1, \dots, t$. Так как

$$T_i/T_{i-1} = N_i \cap T/N_{i-1} \cap T \cap N_i \simeq N_{i-1}(N_i \cap T)/N_{i-1} = N_{i-1}T_i/N_{i-1} \subseteq N_i/N_{i-1},$$

то

$$C_T(T_i/T_{i-1}) \supseteq C_T(N_i/N_{i-1}) = C_N(N_i/N_{i-1}) \cap T = N \cap T.$$

Но тогда

$$N \cap T \subseteq C_T(T_i/T_{i-1}) \cap N = C_{T\cap N}(T_i/T_{i-1}) \subseteq T \cap N.$$

Значит,

$$C_{T\cap N}(T_i/T_{i-1}) = T \cap N.$$

Заметим, что

$$(Z_\infty(N) \cap T) \lhd (N \cap T) = N_T(H).$$

Отбросив в ряду (2) повторяющиеся члены и уплотнив его до главного ряда группы $T \cap N$, видим, что $Z_\infty(N) \subseteq Z_\infty(N_T(H))$. Лемма доказана.

3. Лемма. *Каждая p-сверхразрешимая подгруппа группы G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда каждая минимальная p-подгруппа H группы G удовлетворяет условию*

$$H \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(H)),$$

где $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп.

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Предположим, что каждая p-сверхразрешимая подгруппа группы G является p-нильпотентной. Докажем, что для произвольной минимальной p-подгруппы H группы G имеет место включение

$$H \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(H)).$$

где $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп. Пусть $H = \langle x \rangle$, $N = N_G(H)$, N_p — силовская p-подгруппа в N. Тогда из того, что $H \lhd N_p$

следует, что $H \cap Z(N_p) \neq 1$. Так как группа H простого порядка, то $H \subseteq Z(N_p)$, и поэтому $N_p \subseteq C_G(H)$.

Пусть теперь y — такой элемент из N, что его порядок не делится на p. Тогда в группе $T = \langle x \rangle \langle y \rangle$ подгруппа $\langle x \rangle$ — силовская p-подгруппа, $\langle y \rangle$ — холловская p'-подгруппа. Очевидно, группа T является сверхразрешимой. Значит, она p-сверхразрешима. Тогда группа T по предположению является p-нильпотентной, что влечёт включение

$$y \subseteq C_G(\langle x \rangle).$$

Любой элемент $z \in N$ представим в виде $z = z_1 z_2$, где z_1 — p-элемент, z_2 — p'-элемент в N. Тогда согласно доказанному $z_1, z_2 \in C_G(H)$, откуда следует, что $z = z_1 z_2 \in C_G(H)$, т.е. $N \subseteq C_G(H)$. Получаем, что $H \subseteq \subseteq Z(N)$, а значит, $H \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(N)$.

Достаточность. Пусть каждая минимальная p-подгруппа H группы G удовлетворяет условию

$$H \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(H)),$$

где $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп. Докажем, что каждая p-сверхразрешимая подгруппа группы G является p-нильпотентной. Предположим, что это утверждение не верно. Выберем в группе G p-сверхразрешимую подгруппу H наименьшего порядка, не являющуюся p-нильпотентной. Тогда каждая собственная подгруппа группы H p-нильпотентна. Согласно [9, с. 434] группа H является группой Шмидта. Ввиду [4, с. 243] и [4, с. 244] имеем

$$H = PQ,\ C_P(Q) = P' = \Phi(P),$$

где P — нормальная силовская p-подгруппа группы H, Q — её циклическая силовская q-подгруппа, p и q — различные простые числа.

Так как группа H является p-сверхразрешимой, а $P/\Phi(P)$ — главный p-фактор в H, то $P/\Phi(P)$ — циклическая группа. Тогда ввиду [8, с. 173] группа P также циклическая, а значит, она является абелевой. Поэтому $P' = \Phi(P) = 1$. Но так как $P/\Phi(P) = P/1$ — главный p-фактор, то $|P| = p$. Ввиду того, что $N_H(P) = H$, получаем, что $P \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(H)$, т.е. $H/C_H(P) \in f(p) = (1)$, где f — локальный спутник формации всех p-нильпотентных групп. Тогда $C_H(P) = H$, т.е. $P \subseteq Z(H)$. Значит, H — нильпотентная группа. Противоречие. Лемма доказана.

4. Лемма. *Каждая p-сверхразрешимая подгруппа группы G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда группа G является M_p-группой.*

Доказательство. Необходимость доказывается так же, как и в лемме 3.

Достаточность вытекает из леммы 3.

5. Лемма. *Каждая p-сверхразрешимая подгруппа группы G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда каждая минимальная p-подгруппа H группы G удовлетворяет условию*

$$H \subseteq Z(N_G(H)).$$

Доказательство. Необходимость доказывается так же, как и в лемме 3.

Достаточность следует из леммы 3.

6. Лемма. *Каждая p-сверхразрешимая подгруппа группы G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда для любой 2-минимальной неэлементарной pd-подгруппы H группы G выполняется включение*

$$H \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(H)),$$

где $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп.

Доказательство. Необходимость. Пусть каждая p-сверхразрешимая подгруппа группы G является p-нильпотентной. Пусть H — любая 2-минимальная неэлементарная pd-подгруппа группы G, y — любой элемент из $N_G(H)$. Рассмотрим группу $H\langle y\rangle$. Понятно, что $H \triangleleft H\langle y\rangle$. Ввиду изоморфизма

$$H\langle y\rangle/H \simeq \langle y\rangle/H \cap \langle y\rangle$$

следует, что группа $H\langle y\rangle$ является циклической, а значит, — сверхразрешимой. Если $|H| = p^2$, то ввиду цикличности H и [7, с. 2] следует, что группа $H\langle y\rangle$ сверхразрешима. Если $|H| = pq$, где q — отличное от p простое число, то в группе $H\langle y\rangle$ имеется нормальный ряд, проходящий через H, с главными факторами простых порядков. Тогда группа H будет также сверхразрешимой, а значит, — p-сверхразрешимой. По условию леммы группа $H\langle y\rangle$ должна быть p-нильпотентной. Тогда для любого главного pd-фактора L/Z группы $H\langle y\rangle$, лежащего ниже H, имеет место равенство

$$C_{H\langle y\rangle}(L/Z) = H\langle y\rangle,$$

поэтому

$$y \in C_{H\langle y\rangle}(L/Z).$$

Тогда

$$N_G(H) \subseteq C_{H\langle y\rangle}(L/Z) \subseteq C_{N_G(H)}(L/Z).$$

Отсюда получаем, что

$$C_{N_G(H)}(L/Z) = N_G(H).$$

Значит,

$$H \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(H)),$$

где $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп.

Достаточность. Допустим, что для любой 2-минимальной неэлементарной pd-подгруппы H группы G выполняется включение

$$H \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(H)),$$

где $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп. Докажем, что каждая p-сверхразрешимая подгруппа группы G является p-нильпотентной. Предположим, что это утверждение не верно. Выберем в группе G p-сверхразрешимую подгруппу T наименьшего порядка, не являющуюся p-нильпотентной. Тогда каждая собственная подгруппа группы T p-нильпотентна. Согласно [9, с. 434] группа T является группой Шмидта. Ввиду [4, с. 243] и [4, с. 244] имеем

$$T = PQ,\ C_P(Q) = P' = \Phi(P),$$

где P — нормальная силовская p-подгруппа группы T, Q — её циклическая силовская q-подгруппа, p и q — различные простые числа.

Так как группа T является p-сверхразрешимой, а $P/\Phi(P)$ — главный p-фактор в T, то $P/\Phi(P)$ — циклическая группа. Тогда ввиду [8, с. 173] группа P также циклическая, а значит, она является абелевой. Поэтому $P' = \Phi(P) = 1$. Но так как $P/\Phi(P) = P/1$ — главный p-фактор, то $|P| = p$. Пусть Z_q — группа простого порядка q группы Q. Понятно, что в группе PZ_q все максимальные ряды имеют длину, равную 2, т.е.

подгруппа $H = PZ_q$ является 2-минимальной в группе T. Тогда ввиду предположения

$$H \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(H)).$$

Так как $H \lhd N_G(H)$, то у группы H все главные pd-факторы центральны в $N_G(H)$. Следовательно,

$$C_{N_G(H)}(P) = N_G(H).$$

Это влечет, что

$$C_H(P) = P,$$

т.е. H — нильпотентная группа. Противоречие. Лемма доказана.

7. Теорема. *Для группы G следующие условия эквивалентны:*

1) каждая p-сверхразрешимая подгруппа группы G является p-нильпотентной;

2) каждая минимальная p-подгруппа H группы G удовлетворяет условию

$$H \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(H)),$$

где $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп;

3) группа G является M_p-группой;

4) каждая минимальная p-подгруппа H группы G удовлетворяет условию

$$H \subseteq Z(N_G(H));$$

5) для любой 2-минимальной неэлементарной pd-подгруппы H группы G выполняется включение

$$H \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(H)),$$

где $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп.

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1) и 2) следует из леммы 3.

Эквивалентность утверждений 1) и 3) следует из леммы 4.

Эквивалентность утверждений 1) и 4) следует из леммы 5.

Эквивалентность утверждений 1) и 5) следует из леммы 6.

Теорема доказана.

Ввиду теоремы 7 $2M_p$-группа является M_p-группой.

8. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс всех M_p-групп, G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Тогда она является группой Шмидта порядка pq^n, где $q \mid (p-1)$, и в которой силовская p-подгруппа нормальна.*

Доказательство. Так как группа G не является M_p-группой, то ввиду леммы 4 в группе G существует p-сверхразрешимая подгруппа H, не являющаяся p-нильпотентной группой.

Допустим, что H — собственная подгруппа группы G. Тогда H является M_p-группой. Ввиду леммы 4 H — p-нильпотентная группа. Противоречие. Значит, $H = G$ и G — группа Шмидта. Согласно [4, с. 243] $G = PQ$, силовская p-подгруппа P нормальна в G, силовская q-подгруппа Q циклична.

Из того, что группа G является p-сверхразрешимой, следует, что $|P| = p$. Согласно [11, с. 4] факторгруппа $G/C_G(P)$ имеет экспоненту, делящую $p-1$. Значит, из изоморфизма $G/P \simeq Q$ следует, что $|G| = pq^n$ и q делит $p-1$. Лемма доказана.

Напомним следующее определение. *Подгруппой Томпсона $J(P)$ группы P* называется подгруппа, порождённая всеми абелевыми подгруппами группы P максимального ранга.

9. Теорема. *Пусть G — p-разрешимая группа, p — простое нечётное число. Группа G является M_p-группой тогда и только тогда, когда $N_G(Z(J(P)))$ является M_p-группой, где P — силовская p-подгруппа группы G.*

Доказательство. Необходимость следует из леммы 2.

Достаточность. Пусть $N_G(Z(J(P)))$ является M_p-группой, где P — силовская p-подгруппа группы G, а G не является M_p-группой. Пусть B — минимальная не $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G. Ввиду леммы 8 B является группой Шмидта порядка pq^n, где $q|(p-1)$.

Так как группа G p-разрешима, то ввиду [3] в G существует $\{p,q\}$-холловская подгруппа H, содержащая группу B.

Предположим, что $H < G$. Пусть T — силовская p-подгруппа группы H. Понятно, что T будет силовской p-подгруппой в группе G. По предположению $N_G(Z(J(T)))$ является M_p-группой. Но тогда и $N_H(Z(J(T)))$ является M_p-группой. По индукции получаем, что H — M_p-группа, поэтому и B является M_p-группой. Противоречие. Значит,

$$G = H = PQ,$$

где Q — силовская q-подгруппа группы G, $q|(p-1)$ и $p > 2$.

Покажем, что подгруппа $N_G(Z(J(P)))$ является p-нильпотентной. Для этого мы фактически покажем, что всякая M_p-группа порядка $p^a q^b$, где a и b — различные простые числа и $q \mid p-1$, является p-нильпотентной группой. Предположим, что это не верно. Пусть группа $N_G(Z(J(P)))$ — контрпример минимального порядка. Тогда согласно [9, с. 434] $N_G(Z(J(P)))$ является группой Шмидта. Так как q делит $p-1$, то каждый главный pd-фактор группы $N_G(Z(J(P)))$ имеет порядок p, поэтому группа $N_G(Z(J(P)))$ является p-сверхразрешимой. Так как $N_G(Z(J(P)))$ — M_p-группа, то ввиду леммы 4 она является p-нильпотентной. Противоречие.

Итак, группа $N_G(Z(J(P)))$ является p-нильпотентной. Тогда ввиду [8, с. 280] следует, что и группа G p-нильпотентна. Значит, и её подгруппа B является p-нильпотентной. Противоречие завершает доказательство теоремы.

Далее нам понадобятся следующие четыре леммы.

10. Лемма. *Пусть $G = [L]M$, где $M \neq G$. Если L — минимальная нормальная абелева подгруппа в группе G, то M является максимальной подгруппой группы G.*

11. Лемма. *Пусть P — нормальная силовская p-подгруппа группы G. Если $(P) = 1$, то $K = \cap K_i = 1$, где K_i пробегает все такие нормальные в G подгруппы, что P/K_i — главный фактор подгруппы P.*

Доказательство. Так как по условию $\Phi(P) = 1$, то P — элементарная абелева p-группа группы G. Следовательно, мы можем рассматривать группу G как $F(p)[G/P]$-модуль, где $F(p)$ — поле из p элементов. Но так как P — силовская p-подгруппа в G, то $(|P|, |G/P|) = 1$. Следовательно, ввиду [2, с. 182]

$$P = P_1 \times \ldots \times P_t,$$

где P_i — минимальная нормальная в G подгруппа.

Пусть $K_1, \ldots, K_n$ — набор всех таких нормальных в G подгрупп, что группа P/K_i является G-главным фактором.

Допустим, что лемма не верна, т.е. $K = K_1 \cap \ldots \cap K_n \neq 1$. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в K. Пусть T — наибольшая нормальная в G p-подгруппа со свойством $T \cap L = 1$.

Предположим, что $T \neq K_i$ для любого i. Тогда группа P/T не является главным фактором группы G. Ясно, что TL/T — минимальная нормальная подгруппа в группе G/T. Пусть D/T — минимальная нормальная p-подгруппа в G/T, не равная LT/T. Тогда $D \triangleleft G$ и D является p-подгруппой в G. Кроме того, если $L \subseteq D$, то

$$TL/T \subseteq D/T.$$

Отсюда следует, что

$$TL/T = D/T.$$

Противоречие. Следовательно, найдётся такое i, что $T = K_i$. Но так как $T \cap L = 1$, то $L \nsubseteq K_i$, а значит,

$$L \nsubseteq \cap K_i = K.$$

Противоречие. Лемма доказана.

12. Лемма. *Пусть в бипримарной группе G силовская p-подгруппа нормальна и циклична, где p — нечетное простое число. Тогда если подгруппа порядка p группы G содержится в $Z(G)$, то группа G является p-нильпотентной.*

Доказательство. Пусть $G = [P]Q$, где P — силовская p-подгруппа, Q — силовская q-подгруппа группы G. Так как P — циклическая группа, то в ней существует единственная подгруппа порядка p. Предположим, что группа G не является p-нильпотентной. Понятно, что ввиду [9, с. 434] в группе G существует подгруппа Шмидта $A = [A_p]A_q$. Так как p — нечетное простое число, то ввиду [4, с. 244] группа A_p имеет экспоненту p, а значит, $|A_p| = p$. Но тогда $A_p \subseteq Z(A)$, а значит, $A_q \triangleleft A$, что влечет p-нильпотентность группы A. Противоречие. Лемма доказана.

13. Лемма. *В произвольной группе G любая ее силовская подгруппа не входит в подгруппу Фраттини группы G.*

Доказательство. Пусть G_p — произвольная силовская p-подгруппа группы G. Предположим, что лемма не верна, т.е. $G_p \subseteq \Phi(G)$. Тогда факторгруппа $G/\Phi(G)$ является p'-группой, т.е. $G/\Phi(G) \in \mathfrak{G}_{p'}$, где $\mathfrak{G}_{p'}$ — формация всех p'-групп. Ввиду насыщенности формациии $\mathfrak{G}_{p'}$ следует, что группа G является p'-группой. Противоречие. Лемма доказана.

14. Теорема. *Пусть p — простое нечетное число, G — p-разрешимая группа. Группа G является M_p-группой тогда и только тогда, когда $N_G(X) = C_G(X)$ для каждой подгруппы X из G порядка p, не содержащейся в $Z_{\mathfrak{F}}(G)$, где $\mathfrak{F}$ — класс всех p-разрешимых M_p-групп.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G является M_p-группой, где p — простое нечетное число. Пусть X — подгруппа из G порядка p. Для каждого элемента y из $N_G(X)$ группа $X\langle y\rangle$ является сверхразрешимой, а значит, и p-сверхразрешимой подгруппой группы G. Ввиду леммы 4 группа $X\langle y\rangle$ является p-нильпотентной. Значит, $C_{X\langle y\rangle}(X) = X\langle y\rangle$. Поэтому группа $\langle y\rangle$ централизует подгруппу X. Итак, $N_G(X) = C_G(X)$.

Достаточность. Предположим, что $N_G(X) = C_G(X)$ для каждой подгруппы X из группы G порядка p, не содержащейся в $Z_{\mathfrak{F}}(G)$, но группа G не является M_p-группой. Допустим, что

$$G/Z_{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}.$$

Ввиду [1] следует, что и $G \in \mathfrak{F}$, т.е. группа G является M_p-группой. Противоречие. Значит,

$$G/Z_{\mathfrak{F}}(G) \notin \mathfrak{F}$$

и $G/Z_{\mathfrak{F}}(G)$ содержит минимальную не $\mathfrak{F}$-подгруппу $H/Z_{\mathfrak{F}}(G)$, которая ввиду леммы 8 является группой Шмидта порядка pq^n, где $q|(p-1)$.

Выберем в группе H группу B наименьшего порядка такую, что $H = Z_{\mathfrak{F}}(G)B$. Тогда ввиду [7, с. 30] следует, что

$$Z_{\mathfrak{F}}(G) \cap B \leq \Phi(B).$$

Из изоморфизма

$$B/B \cap Z_{\mathfrak{F}}(G) \simeq H/Z_{\mathfrak{F}}(G)$$

и леммы 13 следует, что группа $B/\Phi(B)$ имеет нормальную силовскую p-подгруппу $P\Phi(B)/\Phi(B)$ порядка p, где P — силовская p-подгруппа группы B. Так как $P \triangleleft B$, то ввиду [7, с. 30] имеем

$$\Phi(P) \leq \Phi(B) \cap P.$$

Кроме того ясно, что $B = PQ$, где Q — некоторая q-подгруппа группы B и $q|(p-1)$.

С другой стороны, если K — некоторая подгруппа группы P такая, что P/K — главный фактор в B, то

$$B/K = (QK/K)(P/K).$$

Поэтому ввиду леммы 10 QK/K является максимальной подгруппой в группе B/K. Отсюда следует, что KQ является максимальной подгруппой в группе B. Так как

$$P \cap \Phi(B) \leq KQ,$$

где K — p-группа, Q — q-группа, и $P \cap \Phi(B)$ является p-группой, то

$$P \cap \Phi(B) \leq K.$$

Тогда

$$\Phi(P) \leq K < P.$$

Из того, что $\Phi(P)$ *char* P а $P \triangleleft B$, ввиду [8, с. 16] следует, что $\Phi(P) \triangleleft B$.

Рассмотрим факторгруппу $B/\Phi(P)$. Пусть $K_1/\Phi(P), \dots, K_n/\Phi(P)$ — набор всех таких нормальных в $B/\Phi(P)$ подгрупп, что факторгруппа $(P/\Phi(P))/(K_i/\Phi(P))$ является $B/\Phi(P)$-главным фактором. Так как ввиду леммы 11

$$\cap(K_i/\Phi(P)) = (\cap K_i)/\Phi(P) = \Phi(P)/\Phi(P),$$

то $\cap K_i = \Phi(P)$. Следовательно,

$$\Phi(B) \cap P \subseteq \Phi(P).$$

Тогда, ввиду доказанного выше,

$$\Phi(B) \cap P = \Phi(P).$$

Из

$$P/\Phi(P) = P/P \cap \Phi(B) \simeq P\Phi(B)/\Phi(B)$$

следует, что $P/\Phi(P)$ — циклическая группа порядка p. Поэтому и P — циклическая p-группа.

Пусть X — подгруппа группы P порядка p. Допустим, что $X \not\subseteq$ $\subseteq Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Тогда по условию теоремы $N_G(X) = C_G(X)$. Так как $X \operatorname{char} P \triangleleft$ B, то ввиду [8, с. 16] $X \triangleleft B$, откуда следует, что $B \leq N_G(X)$. Значит, $X \subseteq$ $\subseteq Z(B)$. Докажем, что группа B будет нильпотентной. Предположим, что это не так, и пусть T — подгруппа Шмидта в группе B. Тогда ввиду [4, с. 243]

$$T = [T_r]T_m,$$

где T_r — нормальная силовская r-подгруппа группы T, T_m — циклическая силовская m-подгруппа группы T. Но так как B является $\{p, q\}$-группой с нормальной силовской p-подгруппой, то

$$T = [T_p]T_q.$$

Из того, что группа P циклическая, следует, что и группа T_p является циклической. Так как p — нечётное простое число, то группа T_p имеет экспоненту p, а значит,

$$|T_p| = p.$$

Отсюда следует, что

$$T_p \subseteq Z(T).$$

Но тогда ввиду леммы 4 группа T является p-нильпотентной. Противоречие с тем, что T — группа Шмидта. Значит, B является нильпотентной группой. Но тогда и факторгруппа $H/Z_{\mathfrak{F}}(G) \simeq B/B \cap Z_{\mathfrak{F}}(G)$ является нильпотентной. Противоречие. Поэтому

$$C_G(X) < N_G(X).$$

Тогда $X \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.

Пусть $Z = Z_{\mathfrak{F}}(G)$ и пусть

$$1 = Z_0 < Z_1 < \ldots < Z_l = Z -$$

G-главный ряд группы G ниже Z.

Пусть $X \leq Z_i$, но $X \not\leq Z_{i-1}$ для некоторого $i > 0$. Тогда $p \mid |Z_i/Z_{i-1}|$ и поэтому Z_i/Z_{i-1} — p-группа. Так как по определению $\mathfrak{F}$-гиперцентра имеем

$$G/C_G(Z_i/Z_{i-1}) \in f(p),$$

где спутник f такой, что $f(p) = p\text{-}\mathfrak{S}_{\pi'(p-1)}$, а $f(p') = \mathfrak{F}$, то $G/C_G(Z_i/Z_{i-1})$ является группой, чей порядок взаимно прост с $p-1$.

Докажем, что Q централизует факторгруппу Z_i/Z_{i-1}. Предположим, что это не так. Тогда

$$Q \not\subseteq C_G(Z_i/Z_{i-1}),$$

а значит,

$$q \mid |G/C_G(Z_i/Z_{i-1})|,$$

т.е. порядок Q взаимно прост с $p-1$. Но Q является q-группой, причём $q|(p-1)$. Противоречие. Значит, Q централизует Z_i/Z_{i-1}. В частности, Q централизует XZ_{i-1}/Z_{i-1}. Так как

$$X \leq P \lhd B$$

и P — циклическая p-группа, причём $p > 2$, то ввиду леммы 4 факторгруппа BZ_{i-1}/Z_{i-1} является p-нильпотентной. Ввиду изоморфизмов

$$BZ_{i-1}/Z_{i-1} \simeq B/B \cap Z_{i-1} \text{ и } H/Z = BZ/Z \simeq B/B \cap Z$$

следует, что факторгруппа H/Z является гомоморфным образом группы $B/B \cap Z_{i-1}$ и поэтому H/Z нильпотентна. Противоречие. Теорема доказана.

15. Теорема. *Пусть p — простое число, $\mathfrak{F}$ — класс всех M_p-групп. Если для каждой подгруппы X из $G^{\mathfrak{F}}$ порядка p группа $N_G(X)$ является M_p-группой, то группа G является M_p-группой.*

Доказательство. Предположим, что условия теоремы выполнены, но группа G не является M_p-группой. Ввиду леммы 8 в группе G содержится минимальная не $\mathfrak{F}$-группа H, которая является группой Шмидта порядка pq^n, причём $q|(p-1)$, в которой силовская p-подгруппа P нормальна, силовская q-подгруппа Q циклична.

Предположим, что $P \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Тогда по условию $N_G(P)$ является M_p-группой. Ввиду леммы 2 M_p-группой является и её подгруппа $N_H(P)$. Так как $H/P \simeq Q$ является сверхразрешимой группой, а P — циклической, то ввиду [7, с. 2] группа $H = N_H(P)$ является сверхразрешимой, а значит — p-сверхразрешимой. Ввиду леммы 4 группа H должна быть p-нильпотентной. Но тогда группа H нильпотентна. Противоречие. Таким образом $P \not\subseteq G^{\mathfrak{F}}$.

С другой стороны так как $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и ввиду леммы 2 формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то

$$H/H \cap G^{\mathfrak{F}} \simeq HG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}.$$

Так как группа H сверхразрешима, а значит — p-сверхразрешима, то и $H/H \cap G^{\mathfrak{F}}$ является p-сверхразрешимой. Но тогда ввиду леммы 4 группа $H/H \cap G^{\mathfrak{F}}$ является p-нильпотентной. Тогда $P \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Противоречие завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Аль-Шаро Х.А., Шеметков Л.А. О подгруппах простого порядка в конечной группе // Укр. мат. журнал.— 2002.— Т. 54, № 6.— С. 745—752.

[2] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп.— М.: Наука, 1972.— 240 с.

[3] Чунихин С.А. О π-свойствах конечных групп // Мат. сб.—1949.— 25, № 3.— С. 321—346.

[4] Шеметков Л.А. Формации конечных групп, М.: Наука, 1978, 272 с.

[5] Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем.— М.: Наука, 1989.— 256 с.

[6] Buckley J. Finite groups whose minimal subgroups are normal // Math. Z.—116(1970).— P. 15–17.

[7] Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups.— Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.— 892 p.

[8] Gorenstein D. Finite Groups.— New York: Harper and Rowk, reprinted by Chelsea, 1980.

[9] Huppert B. Endliche Gruppen I, Berlin etc.: Springer-Verlag.—1967.— 793 s.

[10] Ito N. Über eine zur Frattini-Gruppe duale Bildung. // Nagoya Math. J.— 1955.— № 9.— P. 123—127.

[11] Weinstein M. Between Nilpotent and Solvable.— Polygonal Publishing House, 1982.— 232 p.

Задорожнюк Елена Андреевна

Несколько характеризаций p-разрешимых M_p-групп

Препринты Учреждения образования "Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины"

Подписано в печать 21.10.2003 г. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. п. л. 1,06 Уч.-изд. л. 0,99 Тираж 15 экз. Заказ __.

Отпечатано на полиграфической технике ГГУ им. Ф.Скорины.
Лицензия ЛВ № 357 от 12 февраля 1999.
246019 г.Гомель, ул.Советская 104