Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
"Томельский государственный университет им. Ф.Скорины"

Близнец Ирина Михайловна

Элементы высоты 3 решетки τ-замкнутых ω-локальных формаций

Июнь 2003 Препринт № 52

Гомель

Все рассматриваемые нами группы конечны.

Мы используем стандартную терминологию [1–3]. Кроме того, нам будут необходимы некоторые определения и обозначения из работы А.Н.Скибы и Л.А.Шеметкова [4] и понятие подгруппового функтора, введенное А.Н.Скибой в монографии [5].

Напомним, что подгрупповой функтор Скибы сопоставляет каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место

$$H^{\varphi} \in \tau(B) \text{ и } T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A).$$

В дальнейшем τ обозначает некоторый фиксированный подгрупповой функтор Скибы. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой [5], если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$.

Далее ω — некоторое множество простых чисел. Согласно [4], всякая функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}$$

называется ω-локальным спутником. Спутник f называется τ-значным, если все значения f являются τ-замкнутыми формациями. Пусть $G_{\omega d}$ означает наибольшую нормальную подгруппу N в G такую, что $\omega \cap \cap \pi(H/K) \neq \varnothing$ для каждого композиционного фактора H/K из N ($G_{\omega d} = 1$, если $\omega \cap \pi(\mathrm{Soc}(G) = \varnothing)$.

Для произвольного спутника f символ $LF_{\omega}(f)$ обозначает [4] класс

$$\{G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\}.$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, то говорят, что она ω-локальна и f — ω-локальный спутник этой формации. Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то f называется внутренним спутником формации $\mathfrak{F}$.

Пересечение всех τ-замкнутых ω-локальных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначается через $\tau^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ и называется τ-замкнутой ω-локальной формацией, порожденной $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то формация $\tau^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ называется однопорожденной τ-замкнутой ω-локальной формацией.

Напомним, что τ^{ω}-неприводимые формации — это такие τ-замкнутые ω-локальные формации $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} \neq \tau^{\omega}\mathrm{form}(\cup\mathfrak{X}_i)$, где $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ — набор всех собственных τ-замкнутых ω-локальных подформаций из $\mathfrak{F}$.

Если τ-замкнутые ω-локальные формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ таковы, что $\mathfrak{M} \subset \subset \mathfrak{F}$ и не существует такой τ-замкнутой ω-локальной формации $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ называется максимальной τ-замкнутой ω-локальной подформацией в $\mathfrak{F}$.

Символом $\tau\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех таких τ-замкнутых формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Легко видеть, что множество всех τ-замкнутых ω-локальных формаций является полной решеткой. Целью данной работы является описание элементов высоты 3 этой решетки. Доказательство теоремы базируется на следующих леммах.

Лемма 1. *Если G — простая ω'-группа и $\tau(G) \subseteq \{1, G\}$, то* $\tau^{\omega}\mathrm{form}G = \mathrm{form}G$.

Доказательство. Поскольку G — ω'-группа, то

$$l_{\omega}\,\mathrm{form}\,G = \mathrm{form}\,G.$$

Действительно, ясно, что $l_{\omega}\,\mathrm{form}\,G \supseteq \mathrm{form}\,G$. Покажем, что

$$\pi(\mathrm{form}\,G) \subseteq \pi(G).$$

Так как $G \in \mathfrak{G}_{\pi}$, где $\pi = \pi(G)$ и, очевидно, $\mathfrak{G}_{\pi}$ — формация, то

$$\mathrm{form}\,G \subseteq \mathfrak{G}_{\pi}.$$

Следовательно,

$$\pi(\mathrm{form}\,G) \subseteq \pi(G).$$

Но по условию G — ω'-группа. Значит,

$$\mathrm{form}\,G \subseteq \mathfrak{G}_{\omega'}.$$

Поэтому, очевидно, $\mathrm{form}\,G$ — ω-локальная формация и $G \in \mathrm{form}\,G$. Следовательно,

$$l_{\omega}\,\mathrm{form}\,G \subseteq \mathrm{form}\,G.$$

Согласно лемме 3.2.1 [5] у формации $\mathrm{form}\,G$ все группы D, отличные от 1, имеют вид:

$$D = G_1 \times \ldots \times G_t,$$

где $G_1 \simeq \ldots \simeq G_t \simeq G$, $t \geqslant 1$. Поэтому, по лемме 5.2.16 [5], если $H \in \tau(D) \setminus \{1\}$, то

$$H \simeq G_1 \times \ldots \times G_r$$

при некоторых $r \in \{1, \ldots, t\}$. Следовательно, подгруппа $H \in \mathrm{form}\,G$.

Значит, ввиду определения, формация $\mathrm{form}\,G$ является τ-замкнутой формацией. Но

$$\mathrm{form}\,G = l_{\omega}\,\mathrm{form}\,G.$$

Значит, $l_{\omega}\,\mathrm{form}\,G$ — τ-замкнутая формация. Поэтому,

$$\tau^{\omega}\,\mathrm{form}\,G \subseteq l_{\omega}\,\mathrm{form}\,G.$$

Очевидно, что и

$$\tau^{\omega}\,\mathrm{form}\,G \supseteq l_{\omega}\,\mathrm{form}\,G,$$

поскольку $\tau^\omega \operatorname{form} G$ является ω-локальной формацией. Значит,

$$\tau^\omega \operatorname{form} G = l_\omega \operatorname{form} G = \operatorname{form} G.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — τ^ω-неприводимая формация. Тогда $\mathfrak{F}$ является однопорожденной τ-замкнутой ω-локальной формацией с единственной максимальной τ-замкнутой ω-локальной подформацией.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ — множество всех собственных τ-замкнутых ω-локальных подформаций формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{X}_i$. И пусть

$$\mathfrak{M} = \tau^\omega \operatorname{form}(\cup \mathfrak{X}_i).$$

Ясно, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$, т.к. $\mathfrak{F}$ — τ^ω-неприводимая формация.

Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная τ-замкнутая ω-локальная формация с условием:

$$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}.$$

Тогда $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$ и, следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$, что противоречит выбору формации $\mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{M}$ — максимальная τ-замкнутая ω-локальная подформация формации $\mathfrak{F}$.

Теперь покажем, что $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная τ-замкнутая ω-локальная подформация формации $\mathfrak{F}$. Предположим, что в $\mathfrak{F}$ найдётся ещё одна максимальная τ-замкнутая ω-локальная подформация. Обозначим её через $\mathfrak{M}_1$. Так как $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{X}$. И, следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$. Поэтому $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$, что противоречит выбору $\mathfrak{M}_1$. Значит, $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная τ-значная ω-локальная подформация формации $\mathfrak{F}$.

Пусть

$$G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}.$$

Тогда

$$\tau^\omega \operatorname{form} G \subseteq \mathfrak{F}.$$

Предположим, что

$$\tau^\omega \operatorname{form} G \subset \mathfrak{F}.$$

Тогда $\tau^\omega \operatorname{form} G \subseteq \mathfrak{X}$ и поэтому

$$\tau^\omega \operatorname{form} G \subseteq \tau^\omega \operatorname{form} \mathfrak{X} = \mathfrak{M}.$$

Т.е. $G \in \mathfrak{M}$, что противоречит выбору G. Значит,

$$\tau^\omega \operatorname{form} G = \mathfrak{F}$$

однопорожденная τ-замкнутая ω-локальная формация. Лемма доказана.

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ является элементом высоты n решетки всех τ-замкнутых ω-локальных формаций, когда n — точная верхняя грань длин цепей

$$\varnothing = \mathfrak{F}_0 \subset (1) = \mathfrak{F}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{F}_{n-1} \subset \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F},$$

в которой $\mathfrak{F}_i$ — τ-замкнутая ω-локальная формация при $i = 0, \ldots, n$.

Лемма 3. *Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ является элементом высоты 2 решетки всех τ-замкнутых ω-локальных формаций, когда $\mathfrak{F} = \tau^\omega \mathrm{form} G$, где G — либо неединичная p-группа для некоторого $p \in \in \omega$, либо некоторая простая ω'-группа с условием $\tau(G) \subseteq \{1, G\}$.*

Доказательство. Необходимость. Поскольку формация $\mathfrak{F}$ является элементом высоты 2 решетки всех τ-замкнутых ω-локальных формаций, то в $\mathfrak{F}$ имеется максимальная τ-замкнутая ω-локальная подформация $\mathfrak{F}_1$ высоты 1 в решетке всех τ-замкнутых ω-локальных формаций, т.е. $\mathfrak{F}_1 = (1)$.

Пусть G — группа минимального порядка в $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_1$. Тогда G — монолитическая группа и $G^{\mathfrak{F}_1}$ — её цоколь. Действительно, если L и R — две различные минимальные нормальные в G подгруппы, то $G/L \in \mathfrak{F}_1$ и $G/R \in \mathfrak{F}_1$. Тогда

$$G/(L \cap R) = G/1 \simeq G \in \mathfrak{F}_1,$$

что противоречит выбору G. Значит, L — единственная минимальная нормальная в G подгруппа, т.е. G — монолитическая группа.

Так как $G/L \in \mathfrak{F}_1$, то $L \supseteq G^{\mathfrak{F}_1}$. Если $L \supset G^{\mathfrak{F}_1}$, то $G^{\mathfrak{F}_1} = 1$ и

$$G/G^{\mathfrak{F}_1} = G/1 \simeq G \in \mathfrak{F},$$

что противоречит выбору группы G. Значит, $L = G^{\mathfrak{F}_1}$. Если $L \neq G$, то $|G/L| \neq 1$. Но

$$G/L = G/G^{\mathfrak{F}_1} \in \mathfrak{F} = (1)$$

— противоречие с выбором G. Значит, $L = G$. Но

$$L = A_1 \times \ldots \times A_t,$$

где $A_1 \simeq \ldots \simeq A_t$, $t \geqslant 1$ и A_i — простая группа. Так как при этом G — монолитическая группа, то $t = 1$ и $G = A_1$ — простая группа.

Кроме того, ясно, что

$$\mathfrak{F} = \tau^\omega \, \mathrm{form} \, G.$$

Пусть $\pi(G) \cap \omega \neq \varnothing$ и $p \in \pi(G) \cap \omega$. Тогда ввиду теоремы 3 [4]

$$\mathfrak{F} = l_\omega \, \mathrm{form} \, G = \mathrm{form}(G/O_\omega(G)) \bigcup_{q \in \omega} \mathfrak{N}_q \mathfrak{F}(F_q) =$$

$$= \mathrm{form}(G/O_\omega(G)) \bigcup_{q \in \omega} \mathfrak{N}_q \, \mathrm{form}(G/F_q(G)).$$

Значит,
$$(1) = \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}.$$
Следоватсльно,
$$\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F},$$
т.е. G — группа порядка $p \in \omega$.

Пусть теперь $\pi(G) \cap \omega = \varnothing$ и $\mathfrak{X} = \tau(G) \setminus \{G\}$. В случае, когда $\mathfrak{X} = \varnothing$, видим, что
$$\tau(G) \subseteq \{1, G\}.$$
Пусть $\mathfrak{X} \neq \varnothing$. Если группа $G = Z_p$ имеет простой порядок p, то $\tau(G) \subseteq \subseteq \{1, G\}$. Пусть G — неабелева группа. Ввиду леммы 1 [7] формация $\mathfrak{F}$ имеет единственную максимальную τ-замкнутую подформацию $\mathfrak{M}$, у которой внутренний ω-локальный спутник $\mathfrak{M}$ таков, что
$$m(a) = \begin{cases} \tau\operatorname{form}(G/F_p(G)), & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(G), \\ \varnothing, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(G), \\ \tau\operatorname{form}\mathfrak{X}, & \text{если } a = \omega', \end{cases}$$
где $\mathfrak{X}$ — множество всех собственных τ-подгрупп группы G. Поскольку
$$\pi(G) \cap \omega = \varnothing,$$
то
$$m(a) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } a = p \in \omega, \\ \tau\operatorname{form}\mathfrak{X}, & \text{если } a = \omega'. \end{cases}$$

Так как m — внутренний спутник формации $\mathfrak{M}$, то по лемме 1 формация
$$\mathfrak{M} = \tau\operatorname{form}\mathfrak{X}.$$
Но поскольку формация $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}_1 = (1)$, то
$$\tau\operatorname{form}\mathfrak{X} = (1).$$
Поэтому, $\mathfrak{X} = (1)$. Значит,
$$\tau(G) \subseteq \{1, G\}.$$

Достаточность. Пусть G — неединичная p-группа для некоторого $p \in \omega$. Тогда
$$\mathfrak{F} = \tau^{\omega}\operatorname{form} G = \mathfrak{N}_p.$$
Но в $\mathfrak{N}_p$ нет τ-замкнутых ω-локальных подформаций, отличных от (1) и $\mathfrak{N}_p$. Действительно, если
$$(1) \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{N}_p$$

и $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая ω-локальная формация, то, взяв $G \in \mathfrak{H} \setminus (1)$, видим, что $p \mid |G|$. Поэтому, $p \in \pi(\mathfrak{H})$. Следовательно, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Значит, в $\mathfrak{N}_p$ нет τ-замкнутых ω-локальных подформаций, отличных от (1) и $\mathfrak{N}_p$. Значит, $\mathfrak{F}$ — формация высоты 2 в решетке всех τ-замкнутых ω-локальных формаций.

Если G — простая ω'-группа, то по лемме 1 [7] формация $\mathfrak{F} = \tau^\omega \operatorname{form} G$ τ^ω-неприводима и ее максимальная τ-замкнутая ω-локальная подформация $\mathfrak{M}$ имеет такой внутренний ω-локальный спутник m, что

$$m(a) = \begin{cases} \tau \operatorname{form}(G/F_p(G)), & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(G), \\ \varnothing, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(G), \\ \tau \operatorname{form} \mathfrak{X}, & \text{если } a = \omega', \end{cases}$$

где $\mathfrak{X}$ — множество всех собственных τ-подгрупп группы G. В нашем случае, поскольку G — простая ω'-группа, то

$$\omega \cap \pi(G) = \varnothing.$$

Значит,

$$m(a) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } a = p \in \omega, \\ \tau \operatorname{form} \mathfrak{X}, & \text{если } a = \omega'. \end{cases}$$

Поскольку по условию $\tau(G) \subseteq \{1, G\}$, то $\mathfrak{X} \subseteq (1)$. Если $\mathfrak{X} = (1)$, то формация $\mathfrak{M} = (1)$. Если $\mathfrak{X} = \varnothing$, то формация $\mathfrak{M}$ также равна (1). Поэтому, высота формации $\mathfrak{M}$ в решетке всех τ-замкнутых ω-локальных формаций равна 1. Следовательно, высота формации $\mathfrak{F} = \tau^\omega \operatorname{form} G$ в решетке всех τ-замкнутых ω-локальных формаций равна 2. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть h — внутренний ω-локальный спутник формации $\mathfrak{H}$ и f — такой ω-локальный спутник, что*

$$f = \begin{cases} f(p) = \mathfrak{N}_p h(p), & \textit{если } p \in \omega, \\ f(\omega') = h(\omega'). \end{cases}$$

Тогда $\mathfrak{H} = LF_\omega(f)$.

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — некоторая система непустых подклассов $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$. Будем писать $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ (в частности, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_t$, если $I = \{1, \ldots$ $\ldots, t\}$), если для любых различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ и, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_t}$, где $A_{i_1} \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, A_{i_t} \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, \ldots, i_t \in I$.

Лемма 5. *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2$, *где* $\mathfrak{F}_i$ — *неединичная* τ*-замкнутая* ω*-локальная формация. Тогда*

$$h = h_1 + h_2 - 1,$$

где h, h_1 *и* h_2 — *высоты формаций* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$ *и* $\mathfrak{F}_2$ *в решетке всех* τ*-замкнутых* ω*-локальных формаций соответственно.*

Доказательство. Поскольку имеет место решеточный изоморфизм

$$\mathfrak{F}/_\omega^\tau\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2/_\omega^\tau\mathfrak{F}_1 \simeq \mathfrak{F}_2/_\omega^\tau(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{F}_2/_\omega^\tau(1),$$

то

$$h(\mathfrak{F}) = h_1 + h_2 - 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если* $\mathfrak{F}$ — *такая формация, что* $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \varnothing$, *то формация является* ω*-локальной.*

Доказательство. Пусть f — такой ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$, а $f(\omega) = \varnothing$. Покажем, что

$$\mathfrak{F} = LF_\omega(f).$$

Сначала покажем, что

$$\mathfrak{F} \subseteq LF_\omega(f).$$

Пусть группа $G \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $G \in LF_\omega(f)$. Поскольку $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \varnothing$, но $G \in \mathfrak{F}$, то G является ω'-группой. Значит,

$$G/G_{\omega d} = G/1 \in \mathfrak{F} = f(\omega') \subseteq LF_\omega(f).$$

Следовательно, $G \in LF_\omega(f)$. Значит,

$$\mathfrak{F} \subseteq LF_\omega(f).$$

Теперь покажем, что $LF_\omega(f) \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим противное. Пусть G — группа минимального порядка из $LF_\omega(f) \setminus \mathfrak{F}$ с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$. Предположим, что $\pi(R) \cap \omega \neq \varnothing$ и пусть $p \in \pi(R) \cap \omega$. Тогда, поскольку $G \in LF_\omega(f)$, то

$$G/F_p(G) \in f(p) = \varnothing.$$

Противоречие. Значит, R — ω'-группа. Тогда $G_{\omega d} = 1$ и

$$G \simeq G/1 = G/G_{\omega d} \in f(\omega') = \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Следовательно, $LF_\omega(f) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит,

$$\mathfrak{F} = LF_\omega(f).$$

Лемма доказана.

Для произвольных классов групп $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ положим

$$\mathfrak{M}\vee_{\omega}^{\tau}\mathfrak{H} = l_{\tau}^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{H}).$$

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая ω-локальная формация. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{F}$ является элементом высоты 3 решетки всех τ-замкнутых ω-локальных формаций, когда $\mathfrak{F} = \tau^{\omega}\,\mathrm{form}\,G$, где либо $G = A_1 \times A_2$, A_1 и A_2 — такие неизоморфные простые группы, что $\tau(A_i) \subseteq \{1, A_i\}$ и при p, делящем $|A_i|$, где $p \in \omega$, имеет место $|A_i| = p$, либо G — такая монолитическая группа с цоколем R, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $R = G^{\mathfrak{N}_p}$ — неабелева группа и все собственные τ-подгруппы группы G являются p-группами, причем $\pi(R)\cap\omega = \{p\}$ для некоторого $p \in \omega$;

2) $R \neq G$ — ω'-группа, $R = G^{\mathfrak{N}_p}$ для некоторого числа $p \in \omega$ и все собственные τ-подгруппы группы G являются p-группами;

3) G — циклическая примарная группа порядка p^2, где $p \notin \omega$;

4) G — неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты $p \notin \omega$;

5) $R \nsubseteq \Phi(G)$, $\pi(G) \cap \omega = \varnothing$, и найдется такая простая группа A с условием $\tau(A) \subseteq \{1, A\}$, что всякая неединичная группа из $(\tau(G) \setminus \{G\}) \cup \{G/R\}$ имеет вид

$$A_1 \times \ldots \times A_t,$$

где $t \geqslant 1$, $A_1 \simeq \ldots \simeq A_t \simeq A$, причем либо $R \neq G$, либо $R = G$ — простая группа с $\tau(G) \nsubseteq \{1, G\}$.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{F}$ является τ^{ω}-неприводимой формацией. Ввиду леммы 2 формация $\mathfrak{F}$ имеет единственную максимальную τ-замкнутую ω-локальную подформацию $\mathfrak{M}$. Так как при этом высота $\mathfrak{F}$ в решетке всех τ-замкнутых ω-локальных формаций равна 3, то $\mathfrak{M}$ — τ-замкнутая ω-локальная формация высоты 2 в этой решетке. Значит, согласно лемме 3, формация

$$\mathfrak{M} = \tau^{\omega}\,\mathrm{form}\,A,$$

где A — либо неединичная p-группа для некоторого $p \in \omega$, либо некоторая простая ω'-группа с условием $\tau(A) \subseteq \{1, A\}$.

Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{M}$. Тогда G — монолитическая группа с цоколем $R = G^{\mathfrak{M}}$. Кроме того, поскольку при этом всякая собственная τ-замкнутая ω-локальная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}$, то

$$\mathfrak{F} = \tau^{\omega}\,\mathrm{form}\,G.$$

Рассмотрим случай, когда

$$\mathfrak{M} = \tau^{\omega} \operatorname{form} A = \mathfrak{N}_r$$

для некоторого $r \in \omega$.

Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$. Тогда, поскольку G — монолитическая группа из $\mathfrak{F} \subseteq \subseteq \mathfrak{N}$, то G — q-группа для некоторого простого q. Если $q = r$, то $G \in \in \mathfrak{N}_r$, что противоречит выбору группы G. Значит, $q \neq r$. Но $G/R \in \in \mathfrak{M}$ и поэтому $R = G$ — группа простого порядка q. Но тогда G — простая группа. Значит, высота формации $\mathfrak{F}$ в решетке τ-замкнутых ω-локальных формаций равна 1. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{N}$.

Так как при этом всякая собственная τ-замкнутая ω-локальная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}$ и в рассматриваемом случае $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{F}$ — минимальная τ-замкнутая ω-локальная ненильпотентная формация. Значит, ввиду теоремы 1 [6]

$$\mathfrak{F} = \tau^{\omega} \operatorname{form} G,$$

где G — монолитическая группа с цоколем $R = G^{\mathfrak{N}}$ и либо $\pi = \pi(R) \cap \cap \omega = \varnothing$ и все собственные τ-подгруппы группы G нильпотентны, либо $\pi \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

а) $|\pi| \geqslant 2$, $G = R$ и группа G не имеет нетривиальных τ-подгрупп;

б) $\pi = \{p\}$ одноэлементно и либо G — группа Шмидта, либо $R = G^{\mathfrak{N}_p}$ — неабелева группа и все собственные τ-подгруппы группы G являются p-группами.

Пусть

$$\pi = \pi(R) \cap \omega \neq \varnothing$$

и группа G удовлетворяет условию а). Тогда, если $p, q \in \pi$ и $p \neq q$, то по теореме 1 [4]

$$\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}, \ \mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{F}.$$

Следовательно,

$$1 \subset \mathfrak{N}_p \subset \mathfrak{N}_p \oplus \mathfrak{N}_q \subset \mathfrak{F},$$

что противоречит, ввиду леммы 2, нашему допущению о том, что $\mathfrak{M} = = \mathfrak{N}_r$ для некоторого $r \in \omega$.

Пусть теперь группа G удовлетворяет условию б). Тогда

$$\pi = \pi(R) \cap \omega = \{p\}.$$

Прежде рассмотрим случай, когда G — группа Шмидта. Тогда формация порождается группой Шмидта вида $G = [R]H$, где $R = C_G(R)$ — минимальная нормальная p-подгруппа группы G и $|H| = q$, где q — простое число.

Рассмотрим случай, когда $q \notin \omega$. Тогда покажем, что

$$G/R \simeq H \in \mathfrak{M}.$$

Допустим, что $H \notin \mathfrak{M}$. Тогда

$$\tau^{\omega}\operatorname{form} H = \mathfrak{F}.$$

Покажем это. Действительно, если $\tau^{\omega}\operatorname{form} H \subset \mathfrak{F}$, то, поскольку $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная τ-замкнутая ω-локальная подформация формации $\mathfrak{F}$, то

$$\tau^{\omega}\operatorname{form} H \subseteq \mathfrak{M}.$$

А это противоречит нашему допущению о том, что $H \notin \mathfrak{M}$. Следовательно,

$$\tau^{\omega}\operatorname{form} H = \mathfrak{F}.$$

Но поскольку H — нильпотентная группа, то

$$\mathfrak{F} = \tau^{\omega}\operatorname{form} H \subseteq \mathfrak{N}.$$

Противоречие с тем, что $\mathfrak{F}$ — ненильпотентная формация. Значит, $H \in \in \mathfrak{M}$.

Но, поскольку $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_r$ для некоторого $r \in \omega$, а группа H является q-группой, где $q \notin \omega$, то снова получаем противоречие. Следовательно, случай, когда $q \notin \omega$ невозможен.

Рассмотрим теперь случай, когда $q \in \omega$. Поскольку $G = [R]H$, где H — q-группа, R — p-подгруппа группы G, то

$$R \in \mathfrak{N}_p, \ \ H \in \mathfrak{N}_q.$$

Следовательно, поскольку $p, q \in \omega$, то

$$\mathfrak{N}_p \oplus \mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{F}.$$

Значит, из максимальности $\mathfrak{M}$ следует, что

$$\mathfrak{N}_p \oplus \mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{M}.$$

Но $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_r$, где $r \in \omega$. Противоречие. Значит, случай, когда $q \in \omega$ также невозможен.

Поэтому, случай, когда G — группа Шмидта, невозможен.

Случай, когда $R = G^{\mathfrak{N}_p}$ — неабелева группа и все собственные τ-подгруппы группы G являются p-группами, совпадает с условием 1) теоремы.

Пусть теперь G — монолитическая группа с таким цоколем $R = G^{\mathfrak{N}}$, что $\pi = \pi(R) \cap \omega = \varnothing$ и все собственные τ-подгруппы группы G нильпотентны. Понятно, что R является ω'-группой.

Пусть $R = G$. Тогда, поскольку $\pi(R) \cap \omega = \varnothing$, то

$$\pi(G) \cap \omega = \varnothing.$$

Значит, $G \in \mathfrak{G}_{\omega'}$. Но формация $\mathfrak{G}_{\omega'}$ является τ-замкнутой. Значит,

$$\tau \operatorname{form} G \subseteq \mathfrak{G}_{\omega'}.$$

Поэтому,

$$\pi(\tau \operatorname{form} G) \cap \omega = \varnothing.$$

Следовательно, $\tau \operatorname{form} G$ — ω-локальная формация. Поэтому,

$$\tau \operatorname{form} G = \tau^{\omega} \operatorname{form} G = \mathfrak{F}$$

и все подформации из $\mathfrak{F}$ ω-локальны. Тогда, поскольку $R \not\subseteq \Phi(G)$, то ввиду леммы 2.1.5 [5], формация $\mathfrak{F}$ τ-неприводима и в ней имеется единственная максимальная τ-замкнутая подформация

$$\mathfrak{M} = \tau \operatorname{form}((G/R) \cup \mathfrak{X}),$$

где $\mathfrak{X}$ — множество всех собственных τ-подгрупп группы G. Но

$$\tau \operatorname{form}((G/R) \cup \mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{N}_r,$$

где $r \in \omega$. Значит, $\mathfrak{X} \subseteq (1)$, т.е. $\tau(G) \subseteq \{1, G\}$. Поэтому, согласно лемме 3, $\mathfrak{F}$ является элементом высоты 2 решетки всех τ-замкнутых ω-локальных формаций. Противоречие. Значит, $R \neq G$.

Покажем, что G/R — r-группа. Действительно, поскольку $G/R \in \mathfrak{F}$, то, если $\tau^{\omega} \operatorname{form}(G/R) = \mathfrak{F}$, значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$. Противоречие. Следовательно,

$$\tau^{\omega} \operatorname{form}(G/R) \subset \mathfrak{F}.$$

Значит,

$$\tau^{\omega} \operatorname{form}(G/R) \subseteq \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_r.$$

Итак, G/R — r-группа. Аналогично проверяется, что все собственные τ-подгруппы группы G являются r-группами, т.е. относительно группы G выполняется условие 2) теоремы.

Пусть теперь

$$\mathfrak{M} = \tau^{\omega} \operatorname{form} A,$$

где A — простая ω'-группа с условием $\tau(A) \subseteq \{1, A\}$. Согласно лемме 1,

$$\mathfrak{M} = \tau^{\omega} \operatorname{form} A = \operatorname{form} A.$$

Пусть R — pd-группа для некоторого $p \in \omega$. Тогда поскольку $G \in \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$, что невозможно, поскольку формация $\mathfrak{M} = \tau^{\omega} \operatorname{form} A$, где A — простая ω'-группа с условием $\tau(A) \subseteq \{1, A\}$, является единственной максимальной τ-замкнутой ω-локальной подформацией формации $\mathfrak{F}$. Следовательно, такой случай невозможен.

Пусть R — ω'-группа. Тогда, поскольку $G/R \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} = \mathrm{form}\, A$, где A — ω'-группа, то G также является ω'-группой. Значит, по лемме 3.1.2 формация $\mathfrak{F}$ и все ее подформации ω-локальны. Значит, высота формации $\mathfrak{F}$ в решетке всех τ-замкнутых формаций и в решетке всех τ-замкнутых ω-локальных формаций одна и та же. Значит, $\mathfrak{F}$ — формация высоты 3 в решетке всех τ-замкнутых формаций.

Предположим прежде, что $\mathfrak{F}$ — абелева формация. Тогда G — абелева группа и высота формации $\mathfrak{F}$ в решетке всех формаций и ее высота в решетке всех τ-замкнутых формаций совпадают. Значит, согласно основной теореме о конечных абелевых группах, G — циклическая примарная группа. Пусть $|G| = p^{\alpha}$. Тогда высота формации $\mathfrak{F}$ в решетке всех формаций равна $\alpha + 1$. Действительно, при $\alpha = 0$ это очевидно. Пусть $\alpha > 1$ и при $\alpha - 1$ утверждение верно. Пусть $\overline{M}$ — максимальная подгруппа в G. Тогда $|\overline{M}| = p^{\alpha-1}$. Значит, если $\overline{\mathfrak{M}} = \mathrm{form}\, \overline{M}$, то высота формации $\overline{\mathfrak{M}}$ в решетке всех формаций равна $\alpha - 1 + 1 = \alpha$. Но ввиду леммы 3.1.5 [5] $\overline{\mathfrak{M}}$ — максимальная подформация формации $\mathfrak{F}$. Значит, высота формации $\mathfrak{F}$ в решетке всех формаций равна $\alpha + 1$. Но, поскольку высота формации $\mathfrak{F}$ в этой решетке равна 3, то $\alpha = 2$. Значит, G — циклическая группа порядка p^2, где $p \notin \omega$, т.е. $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3) теоремы.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ — нильпотентная неабелева формация. Тогда по теореме 9.3 [3, Гл. А] высота $\mathfrak{F}$ в решетке всех формаций совпадает с ее высотой в решетке всех τ-замкнутых формаций. Согласно лемме 2.3.1 [5] в $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна минимальная неабелева подформация $\mathfrak{H}$. Ввиду леммы 2.2.4 [5]

$$\mathfrak{H} = \mathrm{form}\, A,$$

где A — либо группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты p, либо группа кватернионов порядка 8. Заметим, что в обоих случаях у формации $\mathfrak{H}$ имеется собственная подформация высоты 2 в решетке всех формаций (это подформация, порожденная группой простого порядка). Значит, высота формации $\mathfrak{H}$ в решетке всех формаций не меньше, чем 3, то есть $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$.

Предположим, что A — группа кватернионов порядка 8. Тогда у A имеется циклическая подгруппа M порядка 4. Согласно теореме 2.4 [1], $M \in \mathfrak{F}$. Но тогда мы имеем в $\mathfrak{F}$ цепь подформаций:

$$(1) \subset \mathrm{form}\, Z_2 \subset \mathrm{form}\, Z_4,$$

где Z_2 и Z_4 — циклические группы порядков 2 и 4 соответственно. Следовательно. формация $\mathrm{form}\, Z_4$ в решетке всех τ-замкнутых ω-локальных формаций имеет высоту 3. Значит,

$$\mathrm{form}\, Z_4 = \mathfrak{F}.$$

Противоречие, т.к. формация $\mathfrak{F}$ — неабелева. Таким образом, данный случай невозможен. То есть формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 4) теоремы.

Предположим теперь, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}$, т.е. $\mathfrak{F}$ — ненильпотентная формация. Если $R \not\subseteq \Phi(G)$, то формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 5) теоремы. Действительно, ввиду выбора группы G имеет место

$$(\tau(G) \setminus \{G\}) \cup \{G/R\} \subseteq \mathfrak{M}$$

и поэтому, согласно лемме 5.2.15 [5], все группы из $(\tau(G) \setminus \{G\}) \cup \{G/R\}$ имеют вид $A_1 \times \ldots \times A_t$, где $t \geqslant 1$ и $A_1 \simeq \ldots \simeq A_t \simeq A$. Допустим, что $R = G$. Тогда G — простая ω'-группа. Если при этом $\tau(G) \subseteq \subseteq \{1, G\}$, то, согласно лемме 3, $\mathfrak{F}$ является элементом высоты 2 в решетке всех τ-замкнутых ω-локальных формаций, что противоречит условию. Следовательно, $\tau(G) \not\subseteq \{1, G\}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $R \subseteq \Phi(G)$. Тогда согласно теореме 9.3 [3, Гл. А], R — абелева p-группа для некоторого простого числа p. Значит, $R \neq G$.

Пусть $C_G(R) = G$. Тогда, очевидно, что $R \in \operatorname{form} G$. Следовательно,

$$\tau \operatorname{form} R \subseteq \tau \operatorname{form} G = \mathfrak{F}.$$

Понятно, что $\tau \operatorname{form} R \neq \mathfrak{F}$ и поэтому $\tau \operatorname{form} R = \mathfrak{M}$. Но $G/R \in \mathfrak{M}$. Следовательно, G/R — p-группа. Значит, G является p-группой, и поэтому, $\mathfrak{F}$ — нильпотентная формация, что противоречит нашему допущению о формации $\mathfrak{F}$.

Пусть теперь $C = C_G(R) \neq G$. Рассмотрим группу $G_1 = [R](G/C)$. Тогда $G_1 \in \mathfrak{F}$. Кроме того, ввиду леммы 5.2.15 [5], $G_1 \notin \mathfrak{M}$. Следовательно, $\tau \operatorname{form} G_1 = \mathfrak{F}$. Если $T \in \tau(G_1) \setminus \{1, G\}$, то, с одной стороны, $T \in \mathfrak{F}$, с другой стороны (т.к. $|G_1| \leqslant |G|$) — $T \in \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \tau \operatorname{form} G_1$ и группа G удовлетворяют условию 5).

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathfrak{F}$ — τ^{ω}-приводимая формация. Покажем, что если $\mathfrak{F}$ является элементом высоты 3 решетки всех τ-замкнутых ω-локальных формаций, то

$$G = A_1 \times A_2,$$

A_1 и A_2 — такие неизоморфные простые группы, что $\tau(A_i) \subseteq \{1, A_i\}$ и при $p \mid |A_i|$, где $p \in \omega$, имеет место $|A_i| = p$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — максимальная τ-замкнутая ω-локальная подформация формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — собственная τ-замкнутая ω-локальная подформация из $\mathfrak{F}$, причем $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{M}$. Ввиду максимальности $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$ имеем:

$$\mathfrak{M} \vee_{\omega}^{\tau} \mathfrak{H} = \mathfrak{F}.$$

Ясно, что высота формации $\mathfrak{H}$ в решетке всех τ-замкнутых ω-локальных формаций $\leqslant 2$. Поскольку τ-замкнутая ω-локальная формация высоты 1 в решетке всех τ-замкнутых ω-локальных формаций —

это формация единичных групп (1), а формация $\mathfrak{H}$ не совпадает с формацией единичных групп (1), следовательно, высота формации $\mathfrak{H}$ в решетке всех τ-замкнутых ω-локальных формаций равна 2. Значит, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} = (1)$. Следовательно,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{H}.$$

Согласно лемме 5,

$$h = h_1 + h_2 - 1,$$

где h, h_1, h_2 — высоты формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ в решетке всех τ-замкнутых ω-локальных формаций соответственно. Значит, поскольку $h_2 = 2$, то $h_1 = 2$. Применяя теперь лемму 3, видим, что

$$\mathfrak{M} = \tau^\omega \operatorname{form} A_1, \ \mathfrak{H} = \tau^\omega \operatorname{form} A_2,$$

где A_i — либо неединичная p-группа для некоторого $p \in \omega$, либо некоторая простая ω'-группа с условием $\tau(A_i) \subseteq \{1, A_i\}$. А так как $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{H}$, то группа A_1 неизоморфна группе A_2, что удовлетворяет условию теоремы.

Достаточность. Пусть группа G удовлетворяет условию 1) теоремы, т.е. для некоторого $p \in \omega$ группа $R = G^{\mathfrak{N}_p}$ — неабелева группа и все собственные τ-подгруппы группы G являются p-группами, причем $\pi(R) \cap \omega = \{p\}$. Тогда ввиду леммы 2 [8] формация $\mathfrak{F} = \tau^\omega \operatorname{form} G$ является τ^ω-неприводимой и формация $\mathfrak{N}_p$ является ее максимальной подформацией. Но поскольку высота формации $\mathfrak{N}_p$ в решетке всех τ-замкнутых ω-локальных формаций равна 2, то высота формации $\mathfrak{F}$ в этой решетке равна 3.

Пусть выполняется условие 2) теоремы, т.е. G — монолитическая группа с таким цоколем $R = G^{\mathfrak{N}_p} \neq G$ для некоторого $p \in \omega$, R — ω'-группа и все собственные τ-подгруппы группы G являются p-группами. Тогда ввиду леммы 3 [8] формация $\mathfrak{F} = \tau^\omega \operatorname{form} G$ является τ^ω-неприводимой и формация $\mathfrak{N}_p$ является ее максимальной подформацией. Но поскольку высота формации $\mathfrak{N}_p$ в решетке всех τ-замкнутых ω-локальных формаций равна 2, то высота формации $\mathfrak{F}$ в этой решетке равна 3.

Пусть группа G удовлетворяет условию 3) теоремы, т.е. G — циклическая примарная группа порядка p^2, где $p \notin \omega$. Тогда ввиду леммы 1 формация

$$\mathfrak{F} = \tau^\omega \operatorname{form} G = \operatorname{form} G$$

и всякая подформация из $\mathfrak{F}$ τ-замкнута и ω-локальна. Пусть $\overline{M}$ — максимальная подгруппа в G. Тогда $|\overline{M}| = p$. Значит, если $\overline{\mathfrak{M}} = \operatorname{form} \overline{M}$, то высота формации $\overline{\mathfrak{M}}$ в решетке всех формаций равна 2. Но ввиду леммы 3.1.5 [5] $\overline{\mathfrak{M}}$ — максимальная подформация формации $\mathfrak{F}$. Значит, высота формации $\mathfrak{F}$ в решетке всех формаций равна 3, и поэтому высота где $\mathfrak{X}$ — множество всех собственных τ-подгрупп группы G. Поскольку по условию произвольная неединичная группа из $\mathfrak{X} \cup \{G/R\}$ имеет вид

$$A_1 \times \ldots \times A_t,$$

где $t \geqslant 1$ и $A_1 \simeq \ldots \simeq A_t \simeq A$ — такая простая группа, что $\tau(A) \subseteq \{1, A\}$, то

$$\tau\,\mathrm{form}(\{G/R\} \cup \mathfrak{X}) = \tau^{\omega}\,\mathrm{form}\,A.$$

Но так как по лемме 3 высота формации $\tau^{\omega}\,\mathrm{form}\,A$ в решетке всех τ-замкнутых ω-локальных формаций равна 2, то высота формации $\mathfrak{F}$ в этой решетке равна 3. Теорема доказана.

Литература

[1] Л.А.Шеметков, Формации конечных групп, Наука, Москва, 1978.

[2] Л.А.Шеметков, А.Н.Скиба, Формации алгебраических систем, Наука, Москва, 1989.

[3] K.Doerk, D. Hawkes, Finite Soluble Groups. Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1992.

[4] Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп, Математические труды, 1999, Т. 2, № 1, С. 114–147.

[5] Скиба А.Н. Алгебра формаций, Беларуская навука, Минск, 1997.

[6] Селькин В.М. О минимальных τ-замкнутых ω-локальных ненильпотентных формациях, Известия гомельского государственного университета 3(16), 2000, С. 48–51.

[7] Селькин В.М. Формации с единственной максимальной τ-замкнутой ω-локальной подформацией, Препринт / Гомельский госуниверситет. Гомель, 2001, № 107, 10 с.

[8] Близнец И.М. О дистрибутивных решетках τ-замкнутых ω-насыщенных формаций. — Гомель, 2002. — 12 с. — (Препринт // Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины; № 14).

Близнец Ирина Михайловна

Элементы высоты 3 решетки τ-замкнутых ω-локальных формаций

Препринты Учреждения образования "Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины"

Подписано в печать 4.06.2003 г. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. п. л. 1,58 Уч.-изд. л. 1,19 Тираж 25 экз.

Отпечатано на полиграфической технике ГГУ им. Ф.Скорины.
Лицензия ЛВ № 357 от 12 февраля 1999.
246019 г.Гомель, ул.Советская 104