Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
"Гомельский государственный университет имени
Франциска Скорины"

В. Ф. Велесницкий, В. Н. Семенчук

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ Л.А. ШЕМЕТКОВА

ПРЕПРИНТ №1 *апрель 2012*

Гомель
УО "ГГУ им.Ф.Скорины"
2012

УДК 512.542
ББК 22.144.1
В 315

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор А. Н. Скиба,
кандидат физико-математических наук, доцент А. Э. Шмигирев

Рекомендован к изданию научно-методическим советом учреждения образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины"

Велесницкий, В. Ф.

В 315 Об одной проблеме Л. А. Шеметкова / В. Ф. Велесницкий, В. Н. Семенчук. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2012. — 16 с. — (Препринт / М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; №1).

Работа посвящена изучению проблемы Л.А. Шеметкова о классификации сверхрадикальных формаций, т.е. формаций $\mathfrak{F}$, замкнутых относительно произведения обобщенно субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Было получено полное решение проблемы для произвольных непустых наследственных формаций $\mathfrak{F}$, у которых минимальные не $\mathfrak{F}$-группы разрешимы.

УДК 512.542
ББК 22.144.1

Содержание

Введение

Классический результат Фиттинга состоит в том, что класс нильпотентных групп $\mathfrak{N}$ замкнут относительно взятия субнормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп. Формации Фиттинга, т. е. формации $\mathfrak{F}$, замкнутые относительно взятия субнормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, стали рассматривать с развитием теории формаций.

В 1970 году Хоукс поставил проблему об описании разрешимых наследственных формаций Фиттинга. В работе [1] Хоукс дал описание метанильпотентных наследственных формаций Фиттинга. Брайс и Косси в 1972 году [2] доказали, что любая разрешимая наследственная формация Фиттинга является насыщенной. В работах [3,4] В.Н. Семенчуком получено полное описание разрешимых наследственных формаций Фиттинга. Оказалось, что любую разрешимую наследственную формацию Фиттинга $\mathfrak{F}$ можно получить из формаций всех разрешимых π-групп (для различных множеств π простых чисел) с помощью операций произведения и пересечения формаций.

Развивая подход Хоукса Л.А. Шеметков в Коуровской тетради [5] поставил следующую проблему.

Проблема. *Классифицировать наследственные насыщенные формации $\mathfrak{F}$ с тем свойством, что любая группа $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы, принадлежит $\mathfrak{F}$.*

В настоящее время такие формации называют сверхрадикальными формациями.

Полное решение данной проблемы, в классе конечных разрешимых групп, было получено В.Н. Семенчуком в работе [6].

В настоящей работе получено полное решение проблемы для произвольных непустых наследственных формаций $\mathfrak{F}$, у которых минимальные не $\mathfrak{F}$-группы разрешимы.

Предварительные сведения

Все группы в работе конечны. В дальнейшем нам потребуются следующие определения и обозначения.

Обозначим через π — некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{S}_\pi$ — класс всех π-групп, $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп.

Если $\mathfrak{F}$ — класс групп и G — группа, то корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ — пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Формация — класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений. Формация называется насыщенной, если $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Обозначим через $\pi(\mathfrak{F})$ множество всех простых чисел p, для которых в $\mathfrak{F}$ имеется неединичная p-группа.

В теории классов конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппу H группы G называют $\mathfrak{F}$-субнормальной, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Несколько другое понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности введено Кегелем. Фактически оно объединяет понятие субнормальности и $\mathfrak{F}$-субнормальности.

Подгруппу H называют *$\mathfrak{F}$-субнормальной в смысле Кегеля* или *$\mathfrak{F}$-достижимой*, если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{X}$-сверхрадикальной, если любая группа $G \in \mathfrak{X}$, такая что $G = AB$, где $A, B \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$-субнормальны в G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{X}$ — класс всех групп, то $\mathfrak{X}$-сверхрадикальная формация является сверхрадикальной.

$G_{\mathfrak{S}}$ — произведение всех нормальных $\mathfrak{S}$-подгрупп(разрешимых подгрупп) группы G.

Формация $\mathfrak{F}$ называется композиционной, если из $G/\Phi(G_{\mathfrak{S}}) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H — подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G;

2) если H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то $H \cap K$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа K для любой подгруппы K группы G.

Доказательство. 1) Пусть H — подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$. Так как $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то подгруппа $H/G^{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой группы $G/G^{\mathfrak{F}}$. Отсюда согласно определению $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы существует максимальная цепь

$$G/G^{\mathfrak{F}} = H_0/G^{\mathfrak{F}} \supset H_1/G^{\mathfrak{F}} \supset \ldots \supset H_n/G^{\mathfrak{F}} = H/G^{\mathfrak{F}}$$

такая, что $(H_{i-1}/G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i/G^{\mathfrak{F}}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда получаем, что в группе G существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

А это значит, что H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G.

2) Пусть H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Тогда, по определению, существует максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Пусть K — некоторая подгруппа из G. Рассмотрим цепь подгрупп

$$K = H_0 \cap K \supseteq H_1 \cap K \supseteq \ldots \supseteq H_m \cap K = H \cap K.$$

Так как $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ и формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то из $H_{i-1}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ следует, что

$$(H_{i-1} \cap K)(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}.$$

Теперь ввиду изоморфизма

$$(H_{i-1} \cap K)(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \simeq H_{i-1} \cap K/H_{i-1} \cap K \cap (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}$$

имеем

$$H_{i-1} \cap K/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \cap K \in \mathfrak{F}.$$

Значит,

$$(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{F}} \subseteq (H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \cap K.$$

Так как $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, то $(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i \cap K$. Итак, $(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i \cap K$. Отсюда, по определению, $H \cap K$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы K. Лемма доказана. ⊠

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, H и N — подгруппы группы G, причем N нормальна в G. Тогда:*

1) если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то HN $\mathfrak{F}$-субнормальна в G и HN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N;

2) если $N \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G тогда и только тогда, когда H/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N

Доказательство. Пусть H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Тогда, по определению, существует максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Рассмотрим следующую цепь подгрупп

$$G = H_0N \supseteq H_1N \supseteq \ldots \supseteq H_mN = HN.$$

Так как $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, то

$$(H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}}N = (H_i)^{\mathfrak{F}}N.$$

Отсюда следует, что

$$(H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}} \subseteq (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N \subseteq H_iN.$$

Итак, для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$ $(H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_iN$. Отсюда, по определению, HN — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G.

Из свойств корадикала группы имеем

$$(H_{i-1}N/N)^{\mathfrak{F}} = (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N/N.$$

Поэтому для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ $(H_{i-1}N/N)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_iN/N$. Значит, HN/N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G/N.

Утверждение 2) следует из 1) и свойств корадикала группы. Лемма доказана. ⊠

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, если G не принадлежит $\mathfrak{F}$, а любая её собственная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$. Множество всех таких групп мы будем обозначать $M(\mathfrak{F})$.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, G — разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, тогда $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа.*

Доказательство. Поскольку G — разрешимая неединичная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Известно, что $\Phi(G) \subset F(G)$. Тогда существует такая p-группа N из $F(G)$, что $N \notin \Phi(G)$. Следовательно, найдется такая максимальная подгруппа M, что $G = NM$. Так как M — собственная подгруппа группы G и G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то $M \in \mathfrak{F}$.

Рассмотрим фактор-группу G/N.

$$G/N = MN/N \simeq M/M \cap N \in \mathfrak{F}.$$

Тогда $G^{\mathfrak{F}} \subseteq N$. Так как $G \notin \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа. Лемма доказана. ⊠

В следующих леммах приведем известные результаты о сплетениях групп.

Лемма 4 [8]. *Пусть* $W = Z_{p^{n-1}} \wr Z_p$ *и* B — *база сплетения,* $p \in \mathbb{P}$, $p \in \mathbb{N}$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) W *содержит субнормальную подгруппу, изоморфную* Z_{p^n}*;*

2) если $M = [B, Z_p]$, $N = MZ_p$ *и* $\omega \in N \setminus M$, *то* $\omega^p = 1$*;*

3) $W = BN$, *где* B *и* N — *нормальные подгруппы* W *экспоненты* p^{n-1}, *где* $n \geq 2$.

Лемма 5 [8]. *Пусть* N — *нормальная подгруппа группы* G. *Тогда существует мономорфизм*

$$\mu : G \to W = N \wr (G/N)$$

такой, что $B\mu(G) = W$ *и* $B \cap \mu(G) = \mu(N)$, *где* B — *база сплетения* W.

Лемма 6. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *непустая наследственная* $\mathfrak{S}$*-сверхрадикальная формация. Тогда* $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$.

Доказательство. Вначале докажем, что любая примарная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является циклической. Пусть $G \in M(\mathfrak{F})$ и G — p-группа. Если G не циклическая, то в G найдутся две различные максимальные подгруппы M_1 и M_2. Ясно, что они нормальны в G и $G/M_i \in \mathfrak{F}$, $M_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M_i$. Это значит, что M_1, M_2 $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G. Так как $G = M_1M_2$ и $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация, то $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно.

Покажем, что $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим противное и пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \setminus \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}$ — наследственная формация, то G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Покажем, что G — примарная группа. Пусть $\mid \pi(G) \mid > 1$. Так как G нильпотентна, то $G = A \times B$. Очевидно, что $G/A \in \mathfrak{F}$ и $G/B \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то $G \simeq G/A \cap B \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Итак, G — p-группа. Вначале было показано, что G — циклическая p-группа. Пусть $\mid G \mid = p^n$, где n — некоторое фиксированое натуральное число.

Если $n = 1$, то G — группа простого порядка p. Так как $G \in \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}$, где $\pi(\mathfrak{F})$ — характеристика формации $\mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно.

Пусть $n > 1$. Рассмотрим группу $W = Z_{p^{n-1}} \wr Z_p$. Тогда $W = [B]Z_p$, где B — база сплетения. По лемме 4 W содержит подгруппу P, изоморфную G. Так как $P \in M(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то W не принадлежит $\mathfrak{F}$.

Согласно лемме 4 $W = BN$, где B и N — нормальные подгруппы группы W экспоненты p^{n-1}. Заметим, что $B \in \mathfrak{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует ,что $W/B \in \mathfrak{F}$ и $W/N \in \mathfrak{F}$. А это значит, что $W^{\mathfrak{F}} \subseteq B \cap N$. Согласно лемме 1 B и N — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы W. Так как $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация, то $W \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Лемма доказана. ⊠

Напомним, что минимальную ненильпотентную группу называют группой Шмидта.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация. Если группа Шмидта $H = [H_p]H_q$, где $\mid H_q \mid = q$, принадлежит $\mathfrak{F}$, то формация $\mathfrak{F}$ содержит любую группу $G = [G_p]G_q$, где G_q — циличеcкая группа.*

Доказательство. Вначале, по индукции, докажем, что любая группа $G = [G_p]G_q$, где $\mid G_q \mid = q$, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Предположим, что G имеет нормальную подгруппу K, индекс которой в G есть степень простого числа p. Очевидно, что $K = [K_p]K_q$, где $\mid K_q \mid = q$. По индукции $K \in \mathfrak{F}$. По условию группа $H = [H_p]H_q \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $p, q \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. По лемме 6 $\mathfrak{N}_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $G/K \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K$. По лемме 1 K — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Аналогично, можно показать, что G_p — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Очевидно, что $G = G_pK$. Так как K, G_p принадлежат $\mathfrak{F}$, то из $\mathfrak{S}$-свехрадикальности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому можно считать, что $G' = G_p \neq 1$. Тогда в G найдется нормальная p-подгруппа T, что $G/T \simeq H$.

Если $T = 1$, то $G \simeq H \in \mathfrak{F}$. Пусть $T \neq 1$. Так как $G/T \in \mathfrak{F}$, то G_qT/T и G_p/T — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы G/T по лемме 2. По лемме 2 G_qT и G_p — $\mathfrak{F}$-субнормальные погруппы группы G. Так как $\mid G_qT \mid < \mid G \mid$, то по индукции $G_qT \in \mathfrak{F}$. Аналогично $G_p \in \mathfrak{F}$. Так как $G_qTG_p = G$ и $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация, то $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $G = [G_p]G_q$, где G_q — циклическая группа и $\mid G_p \mid = q^t$. Доказательство будем вести индукцией по t. Если $t = 1$, то, как показали выше, $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $t > 1$ и R — нормальная подгруппа группы G такая, что $\mid G : R \mid = q$. По лемме 5 существует мономорфизм $\mu : G \to E = R \wr A$, где $A \simeq Z_q$. Пусть B — база сплетения. Очевидно, что E — p-замкнутая группа. По индукции, $E_pA \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$. Очевидно, что E_pA — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы E и B — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа E. Так как $E = E_pAB$, то из $\mathfrak{S}$-сверхрадикальности $\mathfrak{F}$ следует, что $E \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим подгруппу $W = E_p\mu(G)$ группы E. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $W \in \mathfrak{F}$. Это значит, что $G \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана. $\boxtimes$

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется формацией Шеметкова, если любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа либо группа простого порядка, либо группа Шмидта.

Лемма 8 [9]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная разрешимая наследственная формация. f — её максимальный внутренний локальный экран. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — формация Шеметкова, когда $\mathfrak{F}$ имеет локальный экран h такой, что $h(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$ для любого простого числа $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $h(p) = \varnothing$ для любого простого числа $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.*

Основные результаты

В следующих теоремах получено решение проблемы для произвольных непустых наследственных формаций $\mathfrak{F}$, у которых минимальные не $\mathfrak{F}$-группы разрешимы.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация. Тогда любая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа либо группа простого порядка, либо группа Шмидта.*

Доказательство. Пусть G — произвольная разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. По лемме 3 $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа.

Покажем, что $|\pi(G)| \leq 2$. Предположим противное, т.е. $|\pi(G)| > 2$. Тогда найдутся, по крайней мере, три попарно различные простых числа p, q, r, принадлежащие $\pi(G)$. Так как G — разрешимая группа, то в G найдутся максимальные подгруппы M_1 и M_2, индексы которых есть q-число и r-число, соответсвенно. Так как G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то $M_1 \in \mathfrak{F}$ и $M_2 \in \mathfrak{F}$. Поскольку $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа, где $p \neq q$, $q \neq r$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M_1$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M_2$. По лемме 1 M_1 и M_2 — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G. Согласно теореме Оре любые две максимальные подгруппы в G либо сопряжены, либо перестановочны. Отсюда следует, что $G = M_1M_2$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация, то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $|\pi(G)| \leq 2$.

Пусть $|\pi(G)| = 1$. Покажем, что G — группа простого порядка p, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$. Действительно, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то из леммы 6 следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $p \notin \pi(\mathfrak{F})$. Так как G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то $|G| = p$.

Рассмотрим случай, когда $|\pi(G)| = 2$. Пусть $\pi(G) = \{p, q\}$, где $p \neq q$. Согласно лемме 3 $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа. Покажем, что $G^{\mathfrak{F}} = G_p$. Предположим противное, т.е. $G^{\mathfrak{F}} \subset G_p$. Рассмотрим подгруппы $G^{\mathfrak{F}} \leftthreetimes G_q$ и G_p. Так как они собственные подгруппы группы G, то $G^{\mathfrak{F}} \leftthreetimes G_q \in \mathfrak{F}$

и $G_p \in \mathfrak{F}$. Поскольку $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}} \rtimes G_q$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_p$, то по лемме 1 они $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G. Так как $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная и $G = (G^{\mathfrak{F}} \rtimes G_q)G_p$, тогда $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}} = G_p$. Получили, что G — бипримарная p-замкнутая группа, а также из леммы 6 G — ненильпатентна.

Итак, $G = [G^{\mathfrak{F}}]G_q$. Покажем, что G — группа Шмидта. Допустим противное. Пусть G — не группа Шмидта. Отсюда G ненильпотентна, но каждая ненильпотентная группа содержит группу Шмидта H. Отсюда следует, что $H/\Phi(H)$ — группа Шмидта, $|\ H/\Phi(H)\ | = p^{\alpha}q$. Так как $H \subset G$, то $H \in \mathfrak{F}$, а значит $H/\Phi(H) \in \mathfrak{F}$, но по лемме 7 $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Теорема доказана. ⊠

Теорема 2. *Любая непустая наследственная сверхрадикальная формация $\mathfrak{F}$, у которой $M(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$, является композиционной.*

Доказательство. Согласно теореме 1 и требования $M(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$ следует, что любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа — группа Шмидта либо группа простого порядка. Следовательно, $\mathfrak{F}$ — формация Шеметкова. Тогда, как показано в работе [10], $\mathfrak{F}$ — композиционная формация. ⊠

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация и $M(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$;

2) $\mathfrak{F}$ — формация Шеметкова.

Доказательство. Доказательство из 1) в 2) следует из теоремы 1 и требования $M(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$.

Теперь покажем из 2) в 1). Для этого надо показать, что любая разрешимая группа $G = AB$, где A, B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы($\mathfrak{F}$ — формация Шеметкова), принадлежит $\mathfrak{F}$. Доказательство проведем индукцией по порядку группы G.

Покажем, что G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N. Пусть G содержит две разрешемые минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2. По лемме 2 AN_i/N_i, BN_i/N_i(i=1,2) — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G/N_i. Очевидно, что $AN_i/N_i \in \mathfrak{F}$ и $BN_i/N_i \in \mathfrak{F}$. По индукции, $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Покажем, что $\Phi(G) = 1$. Предположим противное. Тогда как и выше, по индукции, нетрудно показать, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как G разрешима, то $G/\Phi(G) \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{F}$.

В работе [11] было доказано, что разрешимая наследственная формация Шеметкова является насыщенной. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, G имеет единственную минимальную нормальную p-подгруппу N и $\Phi(G) = 1$.

Отсюда следует, что $C_G(N) = N$.

Рассмотрим подгруппы AN и BN. Покажем, что они принадлежат $\mathfrak{F}$. Из того факта, что $G = AB$, где $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ следует, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Так как $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ — насыщенная формация и N — p-группа, где $p \in \pi(G)$, то $N \in \mathfrak{F}$. Из того факта, что $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq N$. По лемме 1 N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Если AN — собственная подгруппа группы G, то, по индукции, $AN \in \mathfrak{F}$. Итак, $G = AN$.

Так как $G/N \in \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$, то $N = G^{\mathfrak{F}}$. Так как A — собственная $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то $A \subseteq M$, где M — максимальная $\mathfrak{F}$-нормальная подгруппа группы G. Теперь, из того факта, что $N = G^{\mathfrak{F}}$ содержится в M следует, что $G = AN \subseteq M$, что невозможно. Итак, $AN \in \mathfrak{F}$. Аналогичным образом получим, что $BN \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ — насыщенная наследственная формация Шеметкова, то по лемме 8 она обладает локальным экраном h таким, что $h(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S})$, где f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Так как $AN \in \mathfrak{F}$ и N — p-группа, то по лемме 4.5 из [7] $AN/F_p(AN) \in h(p)$. Так как $C_G(N) = N$, то нетрудно показать, что $O_{p'}(AN) = 1$. Следовательно $F_p(AN)$ — p-группа. Так как h — полный экран, то $AN \in h(p)$. Поскольку $h(p)$ — наследственная формация, то $A \in h(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$. Очевидно, что $G = AB \in h(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$. Теперь из того факта, что $G/C_G(N) \in h(p)$ и $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Теорема доказана. ⊠

Заметим, что если в определении сверхрадикальной формации понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности заменить понятием $\mathfrak{F}$-достижимости, то теоремы 1, 2, 3 остаются верными.

Литература

[1] Hawkes, T. On Fitting formations / T. Hawkes // Math. Z. – 1970. – Vol. 117. – P. 177–182.

[2] Bryce, R.A. Fitting formations of finite soluble groups / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1972. – Bd. 127, № 3. – S. 217–233.

[3] Семенчук, В.Н. Разрешимые тотально локальные формации / В.Н. Семенчук // Сибир. мат. журн. – 1995. – Т. 36, № 4. – С. 861–872.

[4] Семенчук, В.Н. О разрешимых тотально локальных формациях / В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – 1997. – № 11. – С. 109–115.

[5] Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп) // Институт математики СО АН СССР. – Новосибирск, 1992. – 172 с.

[6] Семенчук, В.Н. Разрешимые $\mathfrak{F}$-радикальные формации / В.Н. Семенчук // Матем. заметки. – 1996. – Т.59, №2. – С. 261–266.

[7] Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М.: Наука. — 1978. — 272 с.

[8] Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

[9] Семенчук, В.Н. Характеризация локальных формаций $\mathfrak{F}$ по заданным свойствам минимальных не $\mathfrak{F}$-групп / В.Н. Семенчук, А.Ф. Васильев // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп: Тр. / Ин-т математики АН БССР. – Минск: Наука и техника, 1984. – С. 175–181.

[10] Каморников, С.Ф. О двух проблемах Л.А. Шеметкова / С.Ф. Каморников // Сибир. мат. журнал. – 1994. – Т. 35, № 4. – С. 801–812.

[11] Скиба, А.Н. Об одном классе локальных формаций конечных групп / А.Н. Скиба // Докл. Акад. наук БССР. – 1990. – Т. 34, № 11. – С. 382–385.

Научное издание

Велесницкий Василий Федорович,
Семенчук Владимир Николаевич

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ Л. А. ШЕМЕТКОВА

Препринт №1

В авторской редакции

Подписано в печать 27.04.2012. Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 0,7.
Уч.-изд. л. 0,76. Тираж 25 экз. Заказ № 268

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
"Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины".
ЛИ № 02330/0549481 от 14.05.2009.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.