Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Ковалькова Д.П.,
Скиба А.Н.

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СИСТЕМАМИ S-КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Октябрь 2009 Препринт N 10

Гомель
УО «ГГУ им. Ф.Скорины»
2009

Все рассматриваемые в данной работе группы являются конечными.

Напомним, что подгруппа H группы G называется *2-максимальной подгруппой* (или *второй максимальной подгруппой*) группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и т.д. Определим также понятие максимальной цепи, используемое в данной работе. Максимальной цепью длины n группы G называется всякая цепь вида $E_n < E_{n-1} < \ldots < E_1 < E_0 = G$, где E_i является максимальной подгруппой в E_{i-1}, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Легко заметить, что в несверхразрешимых группах одна и та же подгруппа может быть n-максимальной и m-максимальной одновременно для $n \neq m$. В связи с этим будем называть подгруппу H группы G *строго n-максимальной подгруппой* в G, если H является n-максимальной подгруппой в G, но не является n-максимальной подгруппой в любой собственной подгруппе группы G. Например, в группе $SL(2,3)$ единственная подгруппа порядка 2 является 2-максимальной подгруппой, но не является строго 2-максимальной подгруппой. Строго максимальной цепью длины n группы G называется всякая цепь вида $E_n < E_{n-1} < \ldots < E_1 < E_0 = G$, где E_i является строго n-максимальной подгруппой в G, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Связь между n-максимальными подгруппами (где $n > 1$) группы G и структурой группы G исследовалась многими авторами. Но, пожалуй, наиболее ранний результат в данном направлении был получен Хуппертом в работе [1], который доказал, что *группа является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы нормальны*. В этой же работе Хупперт доказал, что в случае, *когда каждая третья максимальная подгруппа группы G является нормальной в G, коммутант G' группы G нильпотентен и порядок каждого главного фактора группы G делится не более, чем на два (необязательно различных) простых числа.* Эта работа стимулировала многие другие исследования в данном направлении. В частности, развивая результаты Хупперта, Янко в работе [2] получил описание групп, в которых 4-максимальные подгруппы нормальны. Он доказал, что *если каждая 4-максимальная подгруппа разрешимой группы G является нормальной в G и порядок G делится по крайней мере на 4 различных простых числа, то G — сверхразрешимая группа.* Годом позже в работе [3] Янко изучил группы, у которых кроме единичной других 5-максимальных подгрупп не существует. Еще одним естественным развитием упомянутых выше результатов Хупперта и Янко стала работа А. Манна [4], в которой автор анализировал строение групп, в которых каждая n-максимальная подгруппа субнормальна. В более поздней работе [5] М. Асааду удалось усилить отмеченные выше результаты Хупперта и Янко, рассматривая лишь строго n-максимальные подгруппы для $n = 2, 3, 4$.

В работе [6] Агравалем была доказана *сверхразрешимость группы при условии, что все ее 2-максимальные подгруппы S-квазинормальны*, а в работе [7] было получено полное описание групп, у которых все 2-максимальные подгруппы S-квазинормальны, и групп, у которых все 3-максимальные подгруппы S-квазинормальны (подгруппа H группы G называется S-квазинормальной в G, если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G).

В связи с отмеченными выше результатами, Л.А. Шеметковым была поставлена задача описания групп, у которых в каждой максимальной цепи длины два или три группы G имеется собственная S-квазинормальная подгруппа. Данная работа связана с анализом этой задачи.

2. Предварительные результаты

Напомним некоторые свойства S-квазинормальных подгрупп.

Лемма 2.1 (см. [8]). *Пусть G — группа и $H \leq K \leq G$. Тогда*

(1) Если H S-квазинормальна в G, то H субнормальна в G.

(2) Если H является S-квазинормальной в G, то H является S-квазинормальной в K.

Лемма 2.2 (см. [8]). *S-квазинормальные субнормальные подгруппы группы G образуют (в общем случае собственную) подрешетку решетки всех субнормальных подгрупп группы G.*

Лемма 2.3 (см. [9, гл. А]). *Пусть U — субнормальная подгруппа группы G и N — нормальная подгруппы группы G. Тогда*

(1) UN/N — субнормальная подгруппа в G/N;

(2) если N — минимальная нормальная подгруппа группы G, то $N \subseteq N_G(L)$.

Группа G называется примитивной, если в ней имеется максимальная подгруппа M с $M_G = 1$.

Лемма 2.4 (см. [9, гл.А, теорема 15.2]). *Пусть G — примитивная группа и M — ее максимальная подгруппа с $M_G = 1$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, причем $N = C_G(N)$ и $G = [N]M$;

(2) группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, причем $C_G(N) = E$ и $G = NM$;

(3) группа G содержит точно две минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2, причем $G = [N_1]M = [N_2]M$, $N_i = C_G(N_{3-i})$, i=1,2 и $N_1 \simeq N_2$.

Лемма 2.5. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Если L субнормальна в G и $L \subseteq M$, то $L \subseteq M_G$.*

Доказательство. Предположив сначала, что $M_G \neq 1$, докажем утверждение леммы индукцией по $|G|$.

Так как L субнормальна в G, то по лемме 2.3(1), LM_G/M_G субнормальна в G/M_G. Кроме того, $LM_G/M_G \leq M/M_G$ и M/M_G — максимальная подгруппа в G/M_G, т.е. для LM_G/M_G условие леммы выполнено. Тогда $LM_G/M_G \subseteq (M/M_G)_{G/M_G} = M_G/M_G = 1$. Откуда следует, что $L \subseteq M_G$.

Значит, можем считать, что $M_G = 1$. Тогда пусть L_0 — минимальная субнормальная подгруппа в G, содержащаяся в M, и пусть $N = L_0^G$ — нормальное замыкание подгруппы L_0 в G. Предположим, что $N \not\subseteq M$. Тогда $G = NM$ и поэтому $L_0^G = L_0^{NM}$. Если L_0 — неабелева группа, то N — минимальная нормальная подгруппа в G и поэтому $N = L_0^{NM} = L_0^M \subseteq M$, что противоречит нашему допущению о N. Значит, N — p-группа для некоторого простого числа p.

Пусть R — минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в N. Тогда, по лемме 2.4, $G = [R]M$, $C_G(R) = R$ и, по лемме 2.3(2), $R \subseteq N_G(L_0)$. Значит, $L_0 \not\subseteq R$. Откуда следует, что $RL_0 = R \times L_0$ и, значит, $L_0 \subseteq C_G(R) = R$. Полученное противоречие и завершает доказательство леммы.

Лемма 2.6 (см. [10, гл. IV, теорема 7.4]). *Пусть H — максимальная нильпотентная подгруппа группы G и 2-силовская подгруппа группы H имеет класс нильпотентности, не превосходящий два. Тогда G разрешима.*

Лемма 2.7. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Предположим, что в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная S-квазинормальная подгруппа. Тогда любая 2-максимальная подгруппа из M содержится в M_G. В частности, $|M : M_G| \in \{1, p, pq\}$, где p и q — простые (не обязательно различные) числа.*

Доказательство. Предположим, что M — ненормальная в G подгруппа. Тогда M не является S-квазинормальной подгруппой в G. Пусть E_1 — максимальная подгруппа в M и E_2 — максимальная подгруппа в E_1. Если E_1 S-квазинормальна в G, то, по лемме 2.1(1), E_1 субнормальна в G и, ввиду леммы 2.5, $E_2 \subseteq E_1 = M_G$. Если E_2 S-квазинормальна в G, то аналогично заключаем, что $E_2 \subseteq M_G$. Следовательно, каждая максимальная подгруппа из M/M_G имеет простой порядок и поэтому $|M/M_G| = pq$ для некоторых (не обязательно различных) простых p и q. Лемма доказана.

Следствие 2.8. *Пусть G — примитивная группа и M — ее максимальная подгруппа с $M_G = 1$. Если в каждой максимальной* *цепи длины три группы G имеется собственная S-квазинормальная подгруппа, то $|M| \in \{1, p, pq\}$, где p и q — простые (не обязательно различные) числа.*

Лемма 2.9 (см. [11], гл.2). *Пусть $H \subseteq G$. Тогда $H \subseteq F(G)$ тогда и только тогда, когда H нильпотентна и субнормальна в G.*

Лемма 2.10 (см. [12]). *Пусть максимальная подгруппа M группы G является непримарной p-разложимой подгруппой. Тогда G имеет неединичную нормальную подгруппу одного из видов:*

(1) центр p-силовской подгруппы M.

(2) силовское p-дополнение в M или в G.

Напомним некоторые свойства групп Шмидта, необходимые в наших доказательствах (см. [11, гл. VI]).

Лемма 2.11. *Если G — группа Шмидта, то*

(1) $G = [P] < a >$, где P, $< a >$ — силовские p-подгруппа и q-подгруппа, соответственно;

(2) G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $P < a^q >$ и $P' < a >$.

Лемма 2.12 (см. [13, теорема 20.1.1]). *Пусть G — разрешимая группа и π — множество простых чисел. Тогда любые две π-холловы подгруппы группы G сопряжены между собой.*

3. Основные результаты

Теорема 3.1. *В каждой строго максимальной цепи длины два группы G имеется собственная S-квазинормальная подгруппа тогда и только тогда, когда G либо нильпотентна, либо $G = [P]M$, где $P = G^{\mathfrak{N}}$ — минимальная нормальная в G подгруппа, являющаяся силовской подгруппой в G, и каждая максимальная подгруппа из M, кроме может быть одной подгруппы T, действует приводимо на P и T нормальна в G.*

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что G не является нильпотентной. Тогда G имеет ненормальную максимальную подгруппу M. Понятно, что M не является S-квазинормальной в G. Пусть M_1 — максимальная подгруппа в M. Допустим, что M_1 не является строго 2-максимальной подгруппой в G. Это означает, что существует по крайней мере один максимальный ряд подгрупп G_i группы G $(0 \leq i \leq n)$ такой, что $M_1 = G_r$ для $r \geq 3$ и группа G_i максимальна в G_{i-1}. Среди всех таких рядов группы G выберем ряд наибольшей длины, например,

$$M_1 = G_r < \ldots < G_2 < G_1 < G_0 = G$$

В этом случае группа G_2 является строго 2-максимальной подгруппой в G. Так как $M_1 \leq M$ и $M_1 \leq G_2$, то $M_1 \leq G_2 \cap M$. Если

$G_2 \cap M = 1$, то $M_1 = 1$ и $|M| = p$ для некоторого простого числа p. Поэтому G — разрешимая примитивная группа. Следовательно, $G = [N]M$, где N — минимальная нормальная подгруппа в G.

Пусть теперь $G_2 \cap M \neq 1$ и G_1 S-квазинормальна в G. Тогда G_1 нормальна в G и, ввиду максимальности подгруппы M_1 в M, $M_1 = G_1 \cap M$. Из последнего следует, что M_1 нормальна в M. Если же G_1 не является S-квазинормальной в G, то, согласно условию, S-квазинормальной в G является подгруппа G_2. Тогда, по лемме 2.1(1), G_2 субнормальна в G.

Предположим вначале, что $G_2 \subseteq M$. Тогда G_2 является максимальной подгруппой в M, так как G_2 — строго 2-максимальная подгруппа в G. Так как G_2 субнормальна в G, то, по лемме 2.1(2), G_2 субнормальна в M. Кроме того, $M_1 \leq G_2 \cap M = G_2 \leq M$ и, значит, $M_1 = G_2$ и M_1 нормальна в M.

Пусть теперь $G_2 \not\subseteq M$. Тогда $M_1 = G_2 \cap M$ субнормальна в M. Из последнего, ввиду максимальности M_1 в M, следует, что M_1 нормальна в M.

Таким образом, все максимальные подгруппы из M нормальны в M и поэтому M — нильпотентная группа. Следовательно, в группе G каждая ненормальная максимальная подгруппа является нильпотентной.

Покажем, что группа G разрешима. Пусть M — максимальная ненормальная подгруппа в G. Тогда M нильпотентна, что влечет нильпотенность подгруппы M_G. Применяя индукцию по $|G|$, получаем, что если $M_G \neq 1$, то M_G и G/M_G разрешимы, а значит, G разрешима. Поэтому мы можем считать, что $M_G = 1$. Значит, G — примитивная группа и, по лемме 2.4, либо $G = NM$, где N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, либо $G = [N_1]M = [N_2]M$, где N_1, N_2 — две различные минимальные нормальные подгруппы в G и $N_1 \simeq N_2$.

Рассмотрим первый случай. Если N разрешима, то, по индукции, G разрешима. Пусть N не является разрешимой группой. Тогда $|N|$ делится по крайней мере на два различных простых числа, одно из которых нечетное. Пусть $p \neq 2$ делит $|N|$ и N_p — силовская p-подгруппа в N, которая содержится в некоторой силовской p-подгруппе P группы G. Тогда $N_p = P \cap N$, что влечет $P \leq N_G(N_p)$. Поскольку N — неабелева группа, то в G существует максимальная подгруппа T такая, что $N_G(N_p) \leq T$. Значит, $N_p \leq P \leq T$. Кроме того, $G = NN_G(N_p) = NT$ и, следовательно, $N \not\subseteq T$ и $T_G = 1$. Значит, как было показано выше, T — нильпотентная группа. Если T — примарная группа, т.е. $|T| = p^a$ для некоторого натурального числа a, то, по лемме 2.6, G разрешима.

Пусть T — непримарная группа. Тогда, по лемме 2.10, в G имеется неединичная нормальная подгруппа одного из следующих видов: 1) центр p-силовской подгруппы T; 2) силовское p-дополнение в T. В каждом из этих случаев в группе G имеется неединичная абелева нормальная подгруппа, что, как и выше, влечет разрешимость группы G.

Пусть теперь N_1 и N_2 — две различные минимальные нормальные подгруппы в G. Тогда $G \simeq G/N_1 \cap N_2$ разрешима.

Значит, по теореме 24.2 из [11, гл. VI] относительно группы G выполнены следующие условия:

1) $G^{\mathfrak{N}}$ является p-группой для некоторого простого числа p;

2) $G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ — главный фактор группы G;

3) любые две ненормальные максимальные подгруппы группы G сопряжены в G.

Покажем, что $G^{\mathfrak{N}}$ — силовская подгруппа в G. Воспользуемся индукцией по $|G|$. Если $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) \neq 1$, то $(G/\Phi(G^{\mathfrak{N}}))^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$. Значит, $G^{\mathfrak{N}}$ — силовская подгруппа в G. Поэтому мы можем считать, что $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$. Так как $G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ — главный фактор и $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$, то $G^{\mathfrak{N}}$ является минимальной нормальной подгруппой в G. Так как G — ненильпотентная группа, то $G^{\mathfrak{N}} \not\subseteq \Phi(G)$ и, следовательно, существует максимальная подгруппа M в G такая, что $G = [G^{\mathfrak{N}}]M$. Из того, что $G/G^{\mathfrak{N}} \simeq M$ следует, что M нильпотентна и, значит, силовская p-подгруппа M_p группы M нормальна в M. Значит, $M \subseteq N_G(M_p)$. Но $M_p < N_G(M_p)$ и, следовательно, $N_G(M_p) = G$. Из последнего следует, что M_p нормальна в G. Так как силовская p-подгруппа G_p из G имеет вид $G_p = [G^{\mathfrak{N}}]M_p$, то G_p нормальна в G.

Пусть M — максимальная ненормальная подгруппа в G. Тогда M нильпотентна и имеет вид $M = \Phi(G^{\mathfrak{N}})G_{p'}$, где $G_{p'}$ — некоторая холловская p'-подгруппа в G. Покажем, что $\Phi = \Phi(G_p) = 1$. Допустим обратное. Тогда в Φ имеется максимальная подгруппа Φ_1 такая, что $T = \Phi_1 G_{p'}$ — максимальная подгруппа в M. Допустим, что T не является строго 2-максимальной подгруппой в G. Тогда в G имеется отличная от M максимальная подгруппа V такая, что T является собственной немаксимальной подгруппой в V. Так как $\Phi \leq V$, то $V = \Phi(G_{p'})^x = M^x$ для некоторого $x \in G$. Пусть $T < L < \cdot M^x$. Так как T — максимальная подгруппа в M и M нильпотентна, то $|M : T| = p$. Кроме того, $|M^x| = |M|$. Значит, $p = |M : T| = |M^x : T| = |M^x : L||L : T| > p$. Полученное противоречие показывает, что T является строго 2-максимальной подгруппой в G. Тогда T S-квазинормальна в G и, по лемме 2.1(1), T субнормальна в G. Кроме того, нильпотентность группы M влечет нильпотентность группы T. Значит, по лемме 2.9, $T \subseteq F(G)$, что влечет $G = G_pT \subseteq F(G)$ и, следовательно, $G = F(G)$ — нильпотентная группа, что противоречит нашему исходному допущению о G. Таким образом, $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$.

Достаточность. Если G нильпотентна, то каждая максимальная подгруппа в G нормальна и, следовательно, S-квазинормальна в G.

Пусть теперь G не является нильпотентной группой. Тогда $G = [P]M$, где $P = G^{\mathfrak{N}}$ — минимальная нормальная подгруппа в G, и M — максимальная подгруппа в G.

Пусть L — произвольная максимальная подгруппа в G. Прежде предположим, что $|G : L| = p^a$ и $1 \neq P \cap L \neq P$. Так как $P \cap L$ нормальна в P и $P \cap L$ нормальна в L, то $P \cap L$ нормальна в G, что противоречит минимальности P. Значит, $P \cap L = 1$ и L является холловой p'-подгруппой в G. Откуда, по лемме 2.12, вытекает, что $L = M^x$ для некоторого $x \in G$. В частности, L — нильпотентная группа. Пусть теперь E — максимальная подгруппа в L. Предположим, что E является строго 2-максимальной подгруппой в G. Ввиду сопряженности подгрупп M и L, в M найдется такая максимальная подгруппа V, что $E = V^x$. Предположим, что V действует приводимо на P. Тогда P не является минимальной нормальной подгруппой в $[P]V$. А так как $[P]V^x = ([P]V)^x$, то P не является минимальной нормальной подгруппой в $[P]V^x$. Предположим теперь, что V действует неприводимо на P. Тогда $V = V^x$ — нормальная подгруппа в G.

Допустим теперь, что $|G : L| = q^b$ для некоторого простого $q \neq p$. Тогда $P \subseteq L$. Так как $P = G^{\mathfrak{N}}$, то G/P — нильпотентная группа. Кроме того, L/P является максимальной подгруппой в G/P и, следовательно, L/P нормальна в G/P, что влечет нормальность L в G. Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть G — ненильпотентная группа. Тогда в том и только в том случае в каждой максимальной цепи длины два группы G имеется собственная S-квазинормальная подгруппа, когда G — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.*

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что в каждой максимальной цепи длины два группы G имеется собственная S-квазинормальная подгруппа. Тогда, по теореме 3.1, $G = [P]M$, где $P = G^{\mathfrak{N}}$ — минимальная нормальная подгруппа в G, являющаяся силовской p-подгруппой в G для некоторого простого p, M — представитель единственного класса максимальных нильпотентных ненормальных подгрупп в G, каждая максимальная подгруппа которой, кроме может быть одной подгруппы T, действует приводимо на P и T нормальна в G.

Допустим, что в G имеется максимальная ненильпотентная подгруппа L. Прежде предположим, что $|G : L| = p^a$ и $1 \neq P \cap L \neq P$. Так как $P \cap L$ нормальна в P и $P \cap L$ нормальна в L, то $P \cap L$ нормальна в G, что противоречит минимальности P. Значит, $P \cap L = 1$

и L является холловой p'-подгруппой в G. Откуда, по лемме 2.13, вытекает, что $L = M^x$ для некоторого $x \in G$ и L — нильпотентная группа.

Допустим теперь, что $|G : L| = q^b$. Тогда $P \subseteq L$, $|G : L| = q$ и $L = PM \cap L = P(M \cap L)$. Заметим, что

$$q = |G : L| = \frac{|G|}{|L|} = \frac{|P||M|}{|P(M \cap L)|} = \frac{|P||M|}{|P||M \cap L|} = \frac{|M|}{|M \cap L|} = |M : M \cap L|$$

Значит, $M \cap L$ является максимальной подгруппой в M. Нильпотентность группы M влечет нильпотентность группы $M \cap L$. Кроме того, нильпотентной является группа P. Так как $M \cap L$ — максимальная подгруппа в M, то $M \cap L$ нормальна в G. Значит, L — нильпотентная нормальная подгруппа группы G. Полученное противоречие показывает, что G — группа Шмидта.

Покажем теперь, что P является абелевой группой. По лемме 2.11(2), G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $P < a >$ и $P < a^q >$. Так как M является максимальной ненормальной подгруппой в G, то $M = Q^x$ для некоторого $x \in G$ и $P' = 1$, что влечет абелевость группы P.

Достаточность. Предположим, что G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Тогда, по лемме 2.11, $G = [P]Q$, где P и $Q = < a >$ — силовская p-подгруппа и q-подгруппа, соответственно, и G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $P < a^q >$ и Q.

Пусть теперь $L < \cdot M < \cdot G$ — произвольная максимальная цепь длины два группы G. Если $M = P < a^q >$, то M нормальна в G. Пусть теперь $M = Q^x$ для некоторого $x \in G$. Тогда $< a^q >$ является максимальной в M и $< a^q >$ нормальна в G.

Следствие 3.3.(Луценко, Скиба [7]). *Пусть G — ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) G является группой Шмидта, нормальная силовская подгруппа которой имеет простой порядок;

(2) каждая 2-максимальная подгруппа группы G нормальна;

(3) каждая строго 2-максимальная подгруппа группы G S-квазинормальна.

Доказательство.

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $G = [P]Q$ — группа Шмидта, где P и Q — силовские p-подгруппа и q-подгруппа в G соответственно и $|P| = p$. Тогда по лемме 2.11(2) G имеет точно два класса максимальных подгрупп PQ_1 и Q^x, где Q_1 — максимальная подгруппа группы Q. Следовательно, подгруппы PQ_2 и Q_1 являются 2-максимальными подгруппами в G, где Q_2 — 2-максимальная подгруппа в Q. Согласно

[11, теорема 26.1(5)], подгруппы Q_1 и Q_2 являются нормальными в группе G и поэтому каждая 2-максимальная подгруппа группы G нормальна.

(2) $\Rightarrow$ (3). Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что каждая строго 2-максимальная подгруппа группы G является S-квазинормальной. Тогда, по теореме 3.1, $G = [P]M$, где $P = G^{\mathfrak{N}}$ — минимальная нормальная подгруппа в G, M — максимальная ненормальная нильпотентная подгруппа, все максимальные подгруппы которой, кроме может быть одной подгруппы T, действуют приводимо на P и T нормальна в G.

Допустим вначале, что каждая максимальная подгруппа из G нильпотентна. В этом случае $G = [P]Q$ является группой Шмидта. Пусть P_1 — некоторая максимальная подгруппа группы P и Q_1 — максимальная подгруппа группы Q. Тогда P_1Q_1 является строго 2-максимальной подгруппой в G. По условию, $(P_1Q_1)Q = Q(P_1Q_1)$ и поэтому P_1Q является подгруппой в G. Так как M не является S-квазинормальной в G, то M — примарная циклическая группа и, значит, $M = Q^x$, для некоторого $x \in G$. Откуда получаем, что $P_1Q = Q$, т.е. $|P| = p$ для некоторого простого p.

Теперь предположим, что в группе G существует ненильпотентная максимальная подгруппа L. Пусть H — максимальная подгруппа в L. Если H — строго 2-максимальная подгруппа в G, то ввиду условия H является S-квазинормальной подгруппой в G. Тогда, по лемме 2.1(2), H является S-квазинормальной подгруппой в L, и поэтому, по лемме 2.1(1), H субнормальна в L.

Допустим теперь, что H не является строго 2-максимальной подгруппой в G. Это означает, что существует по крайней мере один ряд подгрупп G_i группы G $(0 \leq i \leq n)$ такой, что $H = G_r$ для $r \geq 3$ и группа G_i максимальна в G_{i-1}. Среди всех таких рядов группы G выберем ряд наибольшей длины, например,

$$H = G_r < ... < G_2 < G_1 < G_0 = G.$$

В этом случае группа G_2 является строго 2-максимальной подгруппой группы G. Так как $H \leq L$ и $H \leq G_2$, то $H \leq G_2 \cap L$. Если $G_2 \cap L = 1$, то $H = 1$ и поэтому L нильпотентна, противоречие. Следовательно, $G_2 \cap M \neq 1$. Ввиду максимальности H в L, имеем либо $H = G_2 \cap L$, либо $G_2 \cap L = L$. Ясно, что второй случай не имеет место и поэтому $H = G_2 \cap L$. Ввиду условия G_2 является S-квазинормальной подгруппой в G и поэтому, по лемме 2.1(1), G_2 субнормальна в G. Тогда, по лемме 2.1(2), $H = G_2 \cap L$ субнормальна в L. Таким образом, в группе L каждая максимальная подгруппа является субнормальной и поэтому группа L нильпотентна, что противоречит рассматриваемому случаю. Следствие доказано.

Следствие 3.4 (Хупперт [1]). *Если каждая вторая максимальная подгруппа группы G нормальна в G, то G сверхразрешима. Если $|\pi(G)| \geq 3$, то G нильпотентна.*

Следствие 3.5 (Аграваль [6]). *Если каждая вторая максимальная подгруппа группы G S-квазинормальна в G, то G сверхразрешима. Если $|\pi(G)| \geq 3$, то G нильпотентна.*

Следствие 3.6 (Асаад [5]). *Если каждая строго вторая максимальная подгруппа группы G нормальна в G, то G сверхразрешима. Если $|\pi(G)| \geq 3$, то G нильпотентна.*

Теорема 3.7. *Пусть G — ненильпотентная группа. Если в любой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная S-квазинормальная подгруппа, то группа G разрешима и $l_p(G) \leq 1$ для любого простого p.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс всех разрешимых групп G таких, что $l_p(G) \leq 1$ для всех простых p. Известно, что $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация (см.[11], теоремы 5.4, 5.6). Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда условие теоремы выполняется в фактор-группе G/N и поэтому $G/N \in \mathfrak{F}$ по индукции. Следовательно, N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $N \nsubseteq \Phi(G)$, так как $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Прежде докажем, что группа G разрешима. Для этого нам достаточно показать, что N — абелева группа. Предположим, что это не так. Тогда для каждой разрешимой подгруппы E из G имеет место $E_G = 1$.

Пусть p — наименьший простой делитель $|N|$ и N_p — силовская p-подгруппа в N. Пусть G_p — силовская p-подгруппа группы G, содержащая N_p. Тогда $G_p \subseteq N_G(N_p)$ и $N_G(N_p) \neq G$. Следовательно, в G найдется такая максимальная подгруппа M, что $MN = G$ и $G_p \subseteq M$. Понятно, что $M_G = 1$ и поэтому M не является S-квазинормальной в G.

Прежде предположим, что M нильпотентна и все максимальные подгруппы из M S-квазинормальны в G. Тогда, ввиду леммы 2.2, M — циклическая примарная группа, так как M не является S-квазинормальной в G. Пусть M_1 — максимальная подгруппа в M. Тогда, по лемме 2.1(1) и по лемме 2.5, $M_1 = M_G = 1$. Тогда $|M| = p$ и, ввиду леммы 2.6, G разрешима. Пусть теперь M имеет максимальную подгруппу M_1, которая не S-квазинормальна в G. Тогда если M_2 — максимальная подгруппа в M_1, то M_2 S-квазинормальна в G и, по лемме 2.1(1) и по лемме 2.5, $M_2 \subseteq M_G = 1$, т.е $|M_1| = q$ для некоторого простого q. А так как M нильпотентна, то $|M| = pq$. Значит, по лемме 2.6, G разрешима.

Пусть теперь M ненильпотентна. По лемме 2.1(2) в каждой максимальной цепи длины два группы M имеется собственная S-квазинормальная подгруппа. Значит, по следствию 3.2, $M = [P]Q$ — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Тогда Q является максимальной ненормальной подгруппой в M и, если Q_1 — максимальная подгруппа в Q, то Q_1 S-квазинормальна в G. Откуда, по леммам 2.1(1) и 2.5, получаем, что $Q_1 \subseteq M_G = 1$, $|Q| = q$ для некоторого простого q. Откуда следует, что P — максимальная подгруппа в M. Предположим вначале, что P S-квазинормальна в G. Тогда, по леммам 2.1(1) и 2.5, $P \subseteq M_G = 1$. Поэтому P не является S-квазинормальной подгруппой в G. Если P_1 — максимальная подгруппа в P, то, по условию, P_1 S-квазинормальна в G и, по леммам 2.1(1) и 2.5, $P_1 \subseteq M_G = 1$, т.е $|P| = p$. Но тогда M является нильпотентной группой по [14, теорема 10.1.9], что противоречит нашему предположению о подгруппе M. Таким образом, группа G является разрешимой. Заметим также, что поскольку $C_G(N) \cap M$ — нормальная подгруппа в G и $M_G = 1$, то $C_G(N) = C_G(N) \cap NM = N(C_G(N) \cap M) = N$. А поскольку подгруппа Фиттинга содержится в централизаторе любого главного фактора группы по [10, VI, теорема 5.4], то $N = C_G(N) = O_p(G) = F(G)$ для некоторого простого p. Очевидно, что $O_{p'}(G) = 1$. Таким образом, чтобы доказать, что $l_p(G) \leq 1$, достаточно показать, что N является силовской p-подгруппой в G. Допустим обратное. Тогда $N \subset G_p$, где G_p — силовская p-подгруппа в G. Откуда следует, что p делит $|M|$. Но, согласно следствию 2.8, $|M| = q$ или $|M| = qr$, где q, r — простые (не обязательно различные) числа. Тогда получаем, что $|M| = pq$ и p-подгруппа ненормальна в M. Таким образом, $M = [C_q]C_p$

Теперь покажем, что силовская p-подгруппа G_p, которая является максимальной подгруппой в G, не S-квазинормальна в G. Допустим обратное. Тогда, по лемме 2.1(1), G_p субнормальна в G и, ввиду леммы 2.9, $G_p \subseteq F(G) \subseteq C_G(N) = N$. Данное противоречие показывает, что G_p не S-квазинормальна в G.

Так как N — нормальная подгруппа группы G, то в ней имеется максимальная нормальная подгруппа N_1. Тогда N_1C_p — 2-максимальная подгруппа в G_p. Допустим, что N_1C_p S-квазинормальна в G. Тогда, по лемме 2.1(1), N_1C_p субнормальна в G и, аналогично рассуждениям приведенным выше, $N_1C_p \subseteq F(G) \subseteq C_G(N) = N$. Противоречие. Значит, N_1C_p не S-квазинормальна в G. Тогда любая максимальная подгруппа в N_1C_p является S-квазинормальной в G. Значит, ввиду леммы 2.2, N_1C_p — циклическая примарная группа, так как N_1C_p не S-квазинормальна в G. Откуда следует, что $N_1C_p = C_p$ и, значит, $N_1 = 1$. Таким образом, получили, что $|N| = p$. Но тогда $G/C_G(N) = G/N \simeq M$ — циклическая группа. Полученное противоречие показывает, что $N = G_p$ и $l_p(G) \leq 1$. Теорема доказана.

Литература

1. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B.Huppert // Math. Z. — 1954. — V. 60. — P. 409–434.

2. Janko, Z. Finite groups with invariant fourth maximal subgroups / Z.Janko // Math. Z. — 1963. — V. 82. — P. 82–89.

3. Janko, Z. Finite simple groups with shot chains of subgroups / Z.Janko // Math. Z. — 1964. — V. 84. — P. 428–437.

4. Mann, A. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A.Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. — V. 132. — P. 395–409.

5. Asaad, M. Finite groups some whose n-maximal subgroups are normal / M.Asaad // Acta Math. Hung. — 1989. — V. 54, N 1–2. — P. 9–27.

6. Agrawal, R. K. Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K.Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. — 1976. — V. 54. — P. 13–21.

7. Луценко, Ю.В., Скиба, А.Н. О конечных группах, в которых каждая 2-максимальная или 3-максимальная подгруппа обобщенно перестановочна со всеми силовскими подгруппами. Гомель, 2009. (Препринт / Гомельский госуниверситет N 3).

8. Kegel, O. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.Kegel // Math. Z. — 1962. — V. 87. — P. 205–221.

9. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K.Doerk, T.Hawkes; Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. — 889 p.

10. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B.Huppert. — Berlin-Heidelberg: Springer, 1967. — 793 p. New York: Springer.

11. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л.А.Шеметков. — Москва: Наука, 1978.

12. Романовский, А.В. Конечные группы с холловскими нормальными делителями / А.В.Романовский // Сб. ст. Конечные группы. — Минск, 1966. — С. 96-115.

13.Каргополов, М.И., Мерзляков, Ю.И. Основы теории групп / М.И.Каргополов, Ю.И.Мерзляков. — Москва: Наука, 1982.

14. Derek P.S. Robinson. A course in the theory of groups / Derek P.S. Robinson. — New York, 1982.

Научное издание

Ковалькова Дина Петровна
Скиба Александр Николаевич

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СИСТЕМАМИ S-КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Препринт N 10

В авторской редакции

Лицензия N 02330/0549481 от 14.05.09. Подписано в печать 15.10.2009. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура "Таймс". Усл.-печ. л. 0,93. Уч.-изд. л. 1,01.
Тираж 25 экз. Заказ 348.
657-00
Отпечатано с оригинала-макета на ризографе учреждения образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины"
Лицензия N 02330/01500450 от 03.02.09.
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104.