УДК 539.12:530.145

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА ПАУЛИ-ГЮРШИ В SU(3)-МОДЕЛИ

П.П. Андрусевич[1], **В.А. Плетюхов**[2], **В.И. Стражев**[1]

[1]*Белорусский государственный университет, Минск*
[2]*Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест*

TRANSFORMATIONS OF THE PAULI-GÜRSEY TYPE IN SU(3)-MODEL

P.P. Andrusevich[1],**V.A. Pletyukhov**[2], **V.I. Strazhev**[1]

[1]*Belarusian State University, Minsk*
[2]*A.S. Pushkin Brest State University, Brest*

Показано, что наиболее полной группой непрерывных преобразований внутренней симметрии лагранжевой формулировки теории безмассовой дираковской частицы с тремя внутренними степенями свободы является группа SU(3,3). В рамках релятивистской квантовой механики группа цветовой симметрии представляет собой максимальную непрерывную компактную подгруппу последней.

Ключевые слова: *преобразования, внутренняя симметрия, дираковское поле, генераторы, группа, инвариантность.*

It is shown that the group SU(3,3) is the complete continuous group of internal symmetry of the Lagrangian formulation of the theory of the massless Dirac fermion with three internal degrees of freedom. The color symmetry group SU(3) can be considered as a compact subgroup of the latter.

Keywords: *transformations, internal symmetry, Dirac field, generators, group, invariance.*

Введение

Симметрии уравнения Дирака, не связанные с преобразованиями пространственно-временых координат, обсуждаются в литературе в различных математических подходах достаточно давно (см. [1]–[3] и цитированную здесь литературу). Известно, что лагранжева формулировка массивного дираковского поля инвариантна относительно преобразований группы внутренней симметрии SO(2,1), получившей в работе [1] название зарядовой симметрии. Для безмассового дираковского поля известна также симметрия, описываемая группой SO(3) и получившая название группы Паули-Гюрши [4], [5]. При использовании матричной формы записи уравнения Дирака для безмассовых микрообъектов

$$\gamma_\mu \partial_\mu \psi = 0 \quad (\mu = 1,2,3,4) \tag{0.1}$$

преобразования группы Паули-Гюрши имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi' &= a\psi + b\gamma_5 C\bar{\psi}, \\ \bar{\psi}' &= b^* \gamma_5 C\psi + a^* \bar{\psi}, \end{aligned} \tag{0.2}$$

где $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_4$, $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, $C = \gamma_2\gamma_4$ – матрица зарядового сопряжения, a и b – произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию $|a|^2 + |b|^2 = 1$. В свою очередь, в работах [5], [6] отмечается, что при переходе к безмассовому дираковскому полю группа зарядовой симметрии расширяется до 6-параметрической группы SO(3,1) (будем называть ее полной группой Паули-Гюрши), включающей в себя вышеуказанные группы SO(2,1) и SO(3) в качестве подгрупп.

Как видно из (0.2), для нахождения наиболее полной группы внутренней симметрии безмассового дираковского поля в соответствующие преобразования надо включить, помимо волновой функции ψ, также сопряженную функцию $\bar{\psi}$, что фактически означает использование 8-компонентной волновой функции

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}. \tag{0.3}$$

В работе [7] показано, что данный прием эквивалентен вещественному описанию дираковского поля, при котором вещественные и мнимые компоненты комплексной функции ψ разделены. В рамках такого описания в [8] установлено, что полная группа Паули-Гюрши состоит из двух принципиально разных типов преобразований, которые коммутируют (три генератора) или антикоммутируют (три генератора) с матрицами Γ_μ 8x8 уравнения Дирака, представленного в вещественной форме. Группа зарядовой симметрии SO(2,1) задается генераторами преобразований, коммутирующими с вышеуказанными матрицами. Группа Паули-Гюрши включает в себя генератор фазовых преобразований дираковского поля, который присутствует и в группе зарядовой симметрии, а также преобразования, которые антикоммутируют с матрицами Γ_μ. Иными словами, расширение группы зарядовой симметрии до группы SO(3,1) связано, как и в случае перехода от группы вращений к группе Лоренца, с вовлечением в рассмотрение преобразований, имеющих иное физическое истолкование и следствия. В частности, это приводит к возможности рассмотрения внутренней симметрии SO(3,1) в теории двух типов полей Дирака с отличной от нуля массой [9], а также в теории вещественного поля Дирака-Кэлера [10].

В настоящей работе подход к установлению наиболее полной группы внутренней симметрии дираковских полей, базирующийся на использовании вещественной формы их описания, применяется к системе из трех уравнений Дирака с $m = 0$, лежащей, как известно, в основе SU(3)-калибровочной модели сильных взаимодействий.

1 Вещественная форма системы трех уравнений Дирака

Рассмотрим систему трех уравнений Дирака для безмассовых частиц ($m \neq 0$):

$$\gamma_\mu \partial_\mu \psi_1 = 0,\quad \gamma_\mu \partial_\mu \psi_2 = 0,\quad \gamma_\mu \partial_\mu \psi_3 = 0. \tag{1.1}$$

Метрику пространства $g_{\mu\nu}$ и матрицы γ_μ выберем в виде:

$$g_{\mu\nu} = diag(1,1,1,1), \tag{1.2}$$

$$\gamma_i = \sigma_2 \otimes \sigma_i,\quad \gamma_4 = \sigma_3 \otimes I_2 \ (i = 1,2,3). \tag{1.3}$$

Беря от (1.1) комплексное сопряжение и учитывая мнимый характер временной координаты x_4, для сопряженных функций $\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*$ получим уравнения:

$$\begin{gathered}\left(-\gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 - \gamma_3\partial_3 - \gamma_4\partial_4\right)\psi_1^* = 0,\\ \left(-\gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 - \gamma_3\partial_3 - \gamma_4\partial_4\right)\psi_2^* = 0,\\ \left(-\gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 - \gamma_3\partial_3 - \gamma_4\partial_4\right)\psi_3^* = 0.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Рассматривая системы (1.1) и (1.4) совместно, придем к 24-компонентной системе уравнений, которую можно представить в универсальной матричной форме:

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = 0. \tag{1.5}$$

При выборе волновой функции Ψ в (1.5) в виде

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*) - \text{столбец} \tag{1.6}$$

для матриц Γ_μ будем иметь выражения:

$$\Gamma_1 = \sigma_3 \otimes I_3 \otimes \gamma_1,\quad \Gamma_2 = I_6 \otimes \gamma_2,\quad \Gamma_3 = \sigma_3 \otimes I_3 \otimes \gamma_3,\quad \Gamma_4 = \sigma_3 \otimes I_3 \otimes \gamma_4. \tag{1.7}$$

Для дальнейшего удобно перейти к представлению, в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены:

$$\begin{gathered}\Psi = (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_3^r, \psi_1^i, \psi_2^i, \psi_3^i) - \text{столбец},\\ \psi_{1,2,3}^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2,3} + \psi_{1,2,3}^*),\\ \psi_{1,2,3}^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2,3} - \psi_{1,2,3}^*).\end{gathered} \tag{1.8}$$

Указанный переход от представления (1.6) осуществляется с помощью унитарного преобразования базиса в пространстве волновой функции Ψ :

$$\begin{gathered}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_{12} & I_{12} \\ I_{12} & -I_{12}\end{pmatrix},\\ u^{-1} = u^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_{12} & I_{12} \\ I_{12} & -I_{12}\end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{1.9}$$

Матрицы Γ_μ при этом принимают вид:

$$\Gamma_1 = \sigma_1 \otimes I_3 \otimes \gamma_1,\quad \Gamma_2 = I_6 \otimes \gamma_2,\quad \Gamma_3 = \sigma_1 \otimes I_3 \otimes \gamma_3,\quad \Gamma_4 = \sigma_1 \otimes I_3 \otimes \gamma_4. \tag{1.10}$$

Лагранжиан уравнения (1.5)

$$L = -\bar{\Psi}\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = -\Psi^+ \eta \Gamma_\mu \partial_\mu \Psi \tag{1.11}$$

эквивалентен лагранжиану исходной системы (1.1)

$$\begin{gathered}L = -\bar{\psi}_1\gamma_\mu\partial_\mu\psi_1 - \bar{\psi}_2\gamma_\mu\partial_\mu\psi_2 - \bar{\psi}_3\gamma_\mu\partial_\mu\psi_3 =\\ = -\psi_1^+\gamma_4\gamma_\mu\partial_\mu\psi_1 - \psi_2^+\gamma_4\gamma_\mu\partial_\mu\psi_2 - \psi_3^+\gamma_4\gamma_\mu\partial_\mu\psi_3\end{gathered} \tag{1.12}$$

при выборе матрицы билинейной формы η в (1.11) в виде

$$\eta = I_6 \otimes \gamma_4, \tag{1.13}$$

который инвариантен относительно преобразования (1.9).

Уравнение (1.5) с волновой функцией (1.8), матрицами Γ_μ (1.10) и лагранжианом (1.11), (1.13) будем называть вещественной формой исходной системы (1.1) с лагранжианом (1.12), поскольку соответствующая матричному уравнению (1.5) система 24-х уравнений, записанных в явном виде, является вещественной. Эту форму мы и будем использовать при установлении группы внутренней симметрии лагранжевой формулировки системы (1.1).

Как уже отмечалось во введении, данный подход аналогичен подходу Паули, который применялся в работе [4] при установлении полной группы внутренней симметрии безмассового уравнения Дирака, и является в определенном смысле его модифицированным обобщением на случай дираковских полей различных размерностей.

2 Внутренняя симметрия лагранжиана

Для решения поставленной задачи будем использовать фермионный базис, в котором диракоподобные матрицы Γ_μ, по определению, имеют следующую блочную форму:

$$\Gamma_\mu = I_6 \otimes \gamma_\mu. \tag{2.1}$$

Переход от представления (1.8) в фермионный базис может быть осуществлен посредством унитарного преобразования:

$$\begin{gathered}A = \frac{1}{2}\left[I_6 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + (\sigma_1 \otimes I_3)\otimes(I_4 + i\gamma_2)\right],\\ A^{-1} = A^+ = \frac{1}{2}\left[I_6 \otimes (I_4 + i\gamma_2) + (\sigma_1 \otimes I_3)\otimes(I_4 - i\gamma_2)\right].\end{gathered} \tag{2.2}$$

Матрица билинейной формы η принимает при этом вид:

$$\eta = (\sigma_1 \otimes I_3) \otimes \gamma_4. \qquad (2.3)$$

Инвариантность уравнения (1.5) с матрицами Γ_μ (2.1) относительно преобразований внутренней симметрии

$$\Psi'(x_\mu) = Q\Psi(x_\mu) \qquad (2.4)$$

обеспечивается матрицами двух типов

$$Q_1 = q^{(1)} \otimes I_4, \qquad (2.5)$$

$$Q_2 = q^{(2)} \otimes \gamma_5, \qquad (2.6)$$

где $q^{(1)}$, $q^{(2)}$ – комплексные матрицы 6х6, на которые накладываются ограничения, связанные с сохранением вещественного характера уравнения (1.5). При этом матрицы Q_1, Q_2 удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям с матрицами Γ_μ (2.1):

$$[Q_1, \Gamma_\mu]_- = 0, \qquad (2.7)$$

$$[Q_2, \Gamma_\mu]_+ = 0. \qquad (2.8)$$

Матричные преобразования (2.5), (2.6) можно параметризовать посредством 72-х базисных операторов

$$\begin{gathered} J_{00} = I_{24}, J_{i0} = (\sigma_i \otimes I_3) \otimes I_4, \\ J_{0A} = (I_2 \otimes \alpha_A) \otimes I_4, J_{iA} = (\sigma_i \otimes \alpha_A) \otimes I_4, \end{gathered} \qquad (2.9)$$

$$\begin{gathered} L_{00} = I_6 \otimes \gamma_5, L_{i0} = (\sigma_i \otimes I_3) \otimes \gamma_5, \\ L_{0A} = (I_2 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_5, L_{iA} = (\sigma_i \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_5, \end{gathered} \qquad (2.10)$$

где α_A $(A = 1 \div 8)$ – генераторы группы SU(3), которые выберем в виде:

$$\begin{gathered} \alpha_1 = e^{11} - e^{33},\ \alpha_2 = e^{22} - e^{33}, \\ \alpha_3 = e^{23} + e^{32},\ \alpha_4 = e^{13} + e^{31}, \\ \alpha_5 = e^{12} + e^{21}, \alpha_6 = -i(e^{23} - e^{32}), \\ \alpha_7 = -i(e^{31} - e^{13}),\ \alpha_8 = -i(e^{12} - e^{21}), \end{gathered} \qquad (2.11)$$

e^{ij} –элементы полной матричной алгебры [11, с. 307].

Возвращаясь теперь обратно в базис (1.8), получим для операторов (2.9), (2.10) выражения:

$$\begin{gathered} J_{00} = I_{24}, J_{10} = (\sigma_1 \otimes I_3) \otimes I_4, \\ J_{20} = -(\sigma_3 \otimes I_3) \otimes \gamma_2, J_{30} = (\sigma_2 \otimes I_3) \otimes \gamma_2, \\ J_{0A} = (I_2 \otimes \alpha_A) \otimes I_4, J_{1A} = (\sigma_1 \otimes \alpha_A) \otimes I_4, \\ J_{2A} = -(\sigma_3 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_2, J_{3A} = (\sigma_2 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_2; \end{gathered} \qquad (2.12)$$

$$\begin{gathered} L_{00} = (\sigma_1 \otimes I_3) \otimes \gamma_5, \\ L_{10} = I_6 \otimes \gamma_5, \\ L_{20} = -i(\sigma_2 \otimes I_3) \otimes \gamma_2\gamma_5, \\ L_{30} = -i(\sigma_3 \otimes I_3) \otimes \gamma_2\gamma_5, \\ L_{0A} = (\sigma_1 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_5, \\ L_{1A} = (I_2 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_5, \\ L_{2A} = -i(\sigma_2 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_2\gamma_5, \\ L_{3A} = -i(\sigma_3 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_2\gamma_5. \end{gathered} \qquad (2.13)$$

Условие сохранения вещественного характера уравнения (1.5) относительно преобразований, задаваемых базисными операторами (2.12), (2.13), накладывает на соответствующие параметры $\omega_N \leftrightarrow J^N$, $\theta_N \leftrightarrow L^N$ следующие ограничения:

$$\begin{gathered} \omega_{00}, \omega_{20}, \omega_{30}, \omega_{01}, ..., \omega_{05}, \omega_{16}, \omega_{17}, \\ \omega_{18}, \omega_{21}, ..., \omega_{25}, \omega_{31}, ..., \omega_{35} \\ \theta_{10}, \theta_{06}, \theta_{07}, \theta_{08}, \theta_{11}, ..., \theta_{15}, \theta_{26}, \theta_{27}, \\ \theta_{28}, \theta_{36}, \theta_{37}, \theta_{38} - \text{вещественные}; \end{gathered} \qquad (2.14)$$

$$\begin{gathered} \omega_{10}, \omega_{06}, \omega_{07}, \omega_{08}, \omega_{11}, ..., \omega_{15}, \omega_{26}, \\ \omega_{27}, \omega_{28}, \omega_{36}, \omega_{37}, \omega_{38}, \\ \theta_{00}, \theta_{20}, \theta_{30}, \theta_{01}, ..., \theta_{05}, \theta_{16}, \theta_{17}, \\ \theta_{18}, \theta_{21}, ..., \theta_{25}, \theta_{31}, ..., \theta_{35} - \text{мнимые}. \end{gathered} \qquad (2.15)$$

Требование инвариантности лагранжиана (1.11) относительно преобразований внутренней симметрии (2.4) приводит к условию

$$Q^+ \eta \Gamma_\mu Q = \eta \Gamma_\mu, \qquad (2.16)$$

которое для матриц Q_1, Q_2 принимает соответственно вид:

$$Q_1^+ \eta Q_1 = \eta, \qquad (2.17)$$

$$Q_2^+ \eta Q_2 = -\eta. \qquad (2.18)$$

Каждое из условий (2.17), (2.18) накладывает по 15 связей на параметры этих преобразований (мы их не будем выписывать ввиду громоздкости). В результате получаем 42-параметричекую группу матричных преобразований, задаваемую 72 базисными операторами (2.12), (2.13), на параметры которых (2.14), (2.15) накладывается 30 условий, вытекающих из (2.17), (2.18).

Для того чтобы выяснить структуру данной группы преобразований, выделим из них непрерывные преобразования, представимые в форме Ли. С этой целью запишем условие (2.16) для бесконечно малых преобразований

$$Q_1 = 1 + \omega J,\ Q_2 = 1 + \theta L. \qquad (2.19)$$

В результате получим соотношения

$$(\omega J)^+ \eta = -\omega\eta J, \qquad (2.20)$$

$$(\theta L)^+ \eta = \theta\eta L, \qquad (2.21)$$

в которых базисные операторы J, L (за исключением единичного J_{00}) выступают в качестве генераторов. Непосредственная проверка показывает, что условия (2.20), (2.21) выполняются для 36 однопараметрических преобразований, задаваемых генераторами

$$\begin{gathered} J_{i0}, J_{06}, J_{07}, J_{08}, J_{11} ..., J_{15}, \\ J_{21}, ..., J_{25}, , J_{31}, ..., , J_{35}; \end{gathered} \qquad (2.22)$$

$$\begin{gathered} L_{00}, L_{01}, ..., L_{05}, L_{16}, L_{17}, \\ L_{18}, L_{26}, L_{27}, L_{28}, L_{36}, L_{37}, L_{38}. \end{gathered} \qquad (2.23)$$

Остальные 6 однопараметрических преобразований представляют собой дискретные преобразования, являющиеся аналогом γ_5-преобразования, которое в случае трех безмассовых уравнений Дирака реализуется в $3!=6$ вариантах.

Что касается непрерывной группы Ли, задаваемой генераторами (2.22), (2.23), то один из них (L_{00}) коммутирует со всеми остальными и представляет собой непрерывный аналог γ_5-преобразования ($e^{\theta_{00}L_{00}}$) для системы из трех безмассовых уравнений Дирака. Оставшиеся 35 генераторов образуют унитарную группу SU(3,3) с 18 вещественными ($\omega_{20}, \omega_{30}, \omega_{21}, ..., \omega_{25}, \omega_{31}, ..., \omega_{35}, \theta_{26}, \theta_{27}, \theta_{28}, \theta_{36}, \theta_{37}, \theta_{38}$) и 17 мнимыми ($\omega_{10}, \omega_{06}, \omega_{07}, \omega_{08}, \omega_{11}, ..., \omega_{15}, \theta_{01}, ..., \theta_{05}, \theta_{16}, \theta_{17}, \theta_{18}$) параметрами.

Заключение

Итак, наиболее полной непрерывной группой внутренней симметрии лагранжевой формулировки теории безмассовых дираковских фермионов с тремя внутренними степенями свободы является группа SU(3,3). Она состоит из преобразований двух типов Q_1 и Q_2, соответственно коммутирующих и антикоммутирующих с матрицами Γ_μ уравнения (1.5), представляющего собой вещественную матричную форму исходной системы (1.1). Генераторы (2.22), относящиеся к преобразованиям Q_1, образуют в группе SU(3,3) 21-параметрическую подгруппу с 12-тью вещественными ($\omega_{20}, \omega_{30}, \omega_{21}, ..., \omega_{25}, \omega_{31}, ..., \omega_{35}$) и 9-тью мнимыми ($\omega_{10}, \omega_{06}, \omega_{07}, \omega_{08}, \omega_{11}, ..., \omega_{15}$) параметрами, изоморфную группе SO(4,3) и являющуюся наиболее полной группой внутренней симметрии лагранжиана системы трех уравнений Дирака для частиц с ненулевой массой [13]. В свою очередь, группа SU(3) цветовой симметрии является максимальной компактной подгруппой последней и задается генераторами $J_{06}, J_{07}, J_{08}, J_{11}, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{15}$ [7]. Тем самым допускается возможность трактовать происхождение цветовой симметрии как результат спонтанного нарушения симметрии SO(4,3), что является предметом исследования авторов в настоящее время.

Что же касается преобразований Q_2, которые задаются генераторами (2.23), антикоммутирующими с матрицами Γ_μ, то они представляют расширение типа Паули-Гюрши симметрии SO(4,3) до группы SU(3,3). Возможные физические следствия наличия такого расширения также будут рассмотрены в последующих работах авторов. В первую очередь, представляет интерес вопрос, какие из вышеуказанных симметрий, помимо цветовой, «выживают» на квантовом уровне.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стражев, В.И.* О группе зарядовой симметрии релятивистских волновых уравнений / В.И. Стражев, П.Л. Школьников // Известия вузов. Физика. – 1981. – № 11. – С. 115–117.

2. *Pursey, D.L.* Symmetries of the Dirac equation / D.L. Pursey, J.F. Plebanski // Phys. Rev. – 1984. – Vol. 29. – P. 1848–1850.

3. *Фущич, В.И.*, Симметрия уравнений квантовой механики / В.И. Фущич, А.Г. Никитин // – М. : Наука, 1990. – 400 с.

4. *Pauli, W.* On the conservation of the lepton charge / W. Pauli // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 6. – P. 204–214.

5. *Gürsey, F.* Connection of charge independence and barion number conservation with the Pauli transformation / F. Gürsey // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 8. – P. 411–415.

6. *Ибрагимов, Н.Х.* Об инвариантности уравнений Дирака / Н.Х. Ибрагимов // ДАН СССР. – 1969. – Т. 185. – С. 1226–1228.

7. *Pletyukhov, V.A.* Internal symmetry of the three Dirac fields / V.A. Pletyukhov, V.I. Strazhev, P.P. Andrusevich // NDCS. – 2011. – Vol. 14. – № 1. – P. 96–101.

8. *Плетюхов, В.А.* Внутренние симметрии безмассовых дираковских полей / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев, П.П. Андрусевич // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 2. – С. 13–17.

9. *Андрусевич П.П.* О внутренней симметрии дираковских полей / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ўн-та. Сер. 4 «Физика. Математика». – 2010. – № 2. – С. 5–12.

10. *Плетюхов, В.А.* Вещественное поле Дирака-Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ. – Сер. 1. – 2009. – № 2. – С. 3–7.

11. *Богуш, А.А.* Введение в полевую теорию электрослабых взаимодействий / А.А. Богуш // – Минск : Наука и техника. – 1987. – 359 с.

Поступила в редакцию 25.10.11.