

О НЕРАВЕНСТВЕ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

В. Н. Русак в 1963 г. в работе [1] получил неравенство Бернштейна для производной алгебраической рациональной функции, заданной на $\square$.

Теорема. Если функция $R_n(x) = \frac{P_n(x)}{\sqrt{h_{2n}(x)}}$, где $P_n(x)$ – многочлен

степени не выше n и

$$h_{2n}(x) = \prod_{k=1}^n [(\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2], \quad \alpha_k, \beta_k \in \square, \beta_k > 0, k = 1, 2, \dots, n,$$

удовлетворяет для всех $x \in \square$ неравенству $|R_n(x)| \leq 1$, то для производной справедлива оценка

$$|R'_n(x)| \leq \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{(\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2}, \quad x \in \square.$$

Как следствие отсюда можно получить неравенство Бернштейна для производной тригонометрической рациональной функции.

Тем не менее, в 1994 г. в работе [2], Р. В. Borwein, Т. Erdélyi, J. Zhang получили такое же неравенство для производной тригонометрической рациональной функции, не ссылаясь на работы В. Н. Русака. Доказательство в [2] строится на обобщении метода Сегё [3].

В нашей работе получено прямое доказательство неравенства Бернштейна для производной тригонометрической рациональной функции, опираясь на известный метод Рисса [4]. В его основе лежат свойства

тригонометрической рациональной функции $\cos \int_0^x \lambda_n(u) du, x \in \square$.

$$\text{где } \lambda_n(u) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k|(u - \theta_k) + |\alpha_k|^2}, \quad |\alpha_k| < 1, \theta_k = \arg \alpha_k, k = 1, 2, \dots, n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Русак, В. Н. Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для производной тригонометрического многочлена / В. Н. Русак. – ДАН БССР, Т. 7, № 9, 1963. – С. 580–583.
2. Borwein, P. B. Chebyshev polynomials and Markov-Bernstein type inequalities for rational spaces / P. B. Borwein, T. Erdélyi, J. Zhang // J. London Math. – Soc. 50. – 1994. – P. 501–519.
3. Сегё, Г. Ортогональные многочлены / Г. Сегё. – ГИФМЛ: Москва, 1962. – 500 с.
4. Гончаров, В. Л. Теория интерполирования и приближения функций / В. Л. Гончаров. – ГИФТЛ: Москва, 1954. – 327 с.