

ПОЛНЫЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС
В ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. I

Ю. Е. Дукаревич

В работе проводится анализ классического измерительного процесса с точки зрения пространственной фильтрации световых полей в плоскости действительного изображения и в Фурье-плоскости. Показывается неполнота классического измерительного процесса, причиной которой является действительная форма пространственных фильтров и потеря фазовой информации в изображении. Рассматривается измерительный процесс (полный), характеризующийся применением фазовых пространственных фильтров в плоскости первичного изображения. Доказывается возможность построения активного преобразователя по разрешению.

1. Ниже будут рассматриваться оптические системы, предназначенные для анализа пространственной яркости некогерентного объекта. Для этих систем было показано [1], что традиционный измерительный процесс обладает определенной неполнотой, связанной с неполным использованием фазовых соотношений световых волн.

Рассмотрим основные свойства и возможности традиционного (неполного) и полного измерительных процессов с точки зрения пространственной фильтрации световых полей.

Для простоты записи будет рассматриваться одномерный случай плоских входящих волн, испускаемых удаленным некогерентным объектом при монохроматическом освещении.

Любой измерительный прибор ограничивает пространственные размеры входящих волн: это ограничение, осуществляемое входным зрачком прибора, можно рассматривать как первичную фильтрацию светового поля при помощи пространственного фильтра — зрачка $\Phi_0(x, 0)$ (рис. 1), т. е.

$$E^-(x, 0) \rightarrow E^+(x, 0), \quad (1)$$

где $E^+(x, 0) = E^-(x, 0)\Phi_0(x, 0)$, а $E^-(x, 0)$ и $E^+(x, 0)$ — невозмущенное (до фильтра $\Phi_0(x, 0)$) и возмущенное (после $\Phi_0(x, 0)$) прибором поле в плоскости $z=0$ соответственно.

Фильтр $\Phi_0(x, 0)$ в общем случае комплексный

$$\left. \begin{aligned} \text{mod } \Phi_0 &\leq 1 \text{ при } |x| \leq D, \\ \text{mod } \Phi_0 &= 0 \text{ при } |x| > D. \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

Такое задание $E^+(x, 0)$ не соответствует строго физической ситуации, так как поле является гармонической функцией координаты x (как решение волнового уравнения) и не может быть равным нулю в конечной (бесконечной) области (кроме случая $E^+(x, 0)=0$). Однако здесь будут рассматриваться только явления, для которых приближение (1a) допустимо (так же как и скалярное приближение Фраунгофера при вычислении световых полей).

Хорошо известно [2], что поле в плоскости изображения $z=2F$ выражается зависимостью

$$E^-(x, 2F) = C \int_{-\infty}^{\infty} E^+(y, 0) \exp \left\{ i \frac{k}{F} xy \right\} dy, \quad (2)$$

где k — волновое число, C — масштабный коэффициент.

Измерение пространственного распределения поля $E^-(x, 2F)$ при традиционном измерительном процессе эквивалентно введению в плоскости $z=2F$ действительного фильтра $\Phi_1(x, 2F)$. Фильтр $\Phi_1(x, 2F)$ состоит из набора «точечных» зондов, каждый из которых можно представить в виде действительного фильтра с узкой пространственной полосой пропускания и квадратичного детектора как последнего элемента измерительного процесса, осуществляющего энергетический обмен между полем и прибором.

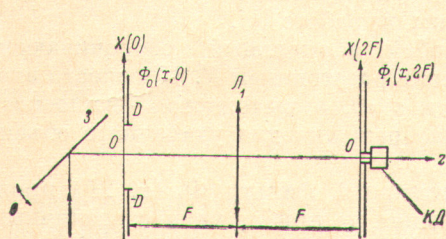


Рис. 1. Принципиальная схема традиционного измерительного процесса.

З — зеркало, $\Phi_0(x, 0)$ и $\Phi_1(x, 2F)$ — действительные фильтры, КД — квадратичный детектор.

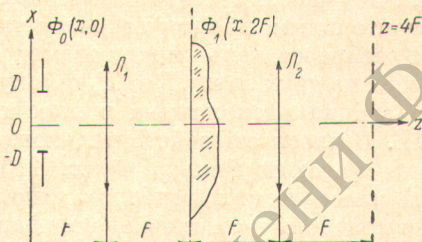


Рис. 2. Преобразователь волнового поля с фазовым фильтром.

L_1 и L_2 — линзы, $\Phi_0(x, 0)$ — входной фильтр-зрачок, $\Phi_1(x, 2F)$ — фазовый фильтр.

Формально измерительная информация $I_{\text{кл.}}$ записывается в виде

$$I_{\text{кл.}} = E^+(x, 2F) E^{+*}(x, 2F), \quad (3)$$

где $E^+(x, 2F) = E^-(x, 2F) \Phi_1(x, 2F)$, а $E^-(x, 2F)$ и $E^+(x, 2F)$ — поле в плоскости $z=2F$ до и после фильтра $\Phi_1(x, 2F)$.

В предельном случае, когда можно считать зонд измерительной аппаратуры бесконечно узким, информация идеального классического прибора записывает в виде интеграла суперпозиции

$$I_{\text{кл.}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B(y) I_0(x-y) dy, \quad (4)$$

где $B(y)$ — пространственная яркость предмета, $I_0(x-y)$ — функция рассеяния (аппаратная функция) системы.

Из выражения (4) непосредственно следуют все основные свойства классического прибора: пространственная инвариантность и конечная разрешающая способность, определяемая шириной аппаратной функции, зависящей в конечном счете от размеров фильтра $\Phi_0(x, 0)$ и волнового числа k .

(Сказанное выше не относится к частному случаю так называемого метода «сверхразрешения» ограниченного объекта [3], имеющего из-за практически нулевых величин сигналов только теоретический интерес).

Для дальнейшего без потери общности удобно классический прибор рассматривать с одним зондом — фильтром $\Phi_1(x, 2F)$ (и одним приемником)

и угловым сканированием объекта (рис. 1). Тогда выходная информация будет представлена в функции параметра сканирования Θ , т. е.

$$I_{\text{к.л.}}(\Theta) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) I_0(\Theta - \alpha) d\alpha, \quad (5)$$

здесь α — угловая координата объекта.

2. Рассмотрим теперь измерительный процесс, который в противоположность традиционному характеризуется применением фазовых фильтров $\Phi_1(x, 2F)$ в плоскости первичного изображения и более полной формой выходной информации, позволяющей извлекать сведения об объекте, содержащиеся в амплитуде и фазе волны. Как будет показано ниже (см. также [1]), такой измерительный процесс обладает повышенной разрешающей способностью и, следовательно, является более полным. Будем для краткости называть в дальнейшем этот процесс измерений полным.

Рассмотрим схему преобразователя с одним фазовым фильтром $\Phi_1(x, 2F)$ (рис. 2). Этот преобразователь, а также пример схемы с полным измерительным процессом рассмотрены в работе [1].

Преобразователь представляет собой афокальный оборачивающий элемент из двух линз L_1 и L_2 с фокусным расстоянием F . Плоскость входного зрачка расположена в плоскости $z=0$, а выходного — в плоскости $z=4F$. В плоскость действительного изображения для удаленного объекта введен фазовый фильтр $\Phi_1(x, 2F)$.

В классических приборах действительный фильтр $\Phi_1(x, 2F)$ производит контролируемые изменения падающих на прибор волн с различными направлениями α , причем эти изменения касаются в основном амплитуды волн. В принципе необходимые для измерений «метки» (контролируемые изменения) можно оставить на волнах с различными α и при помощи фазового фильтра $\Phi_1(x, 2F)$, что фактически и делается при полном измерительном процессе.

В этом случае изменения (метки) вносятся в фазу волны.

Итак $\Phi_1(x, 2F) = \exp\{i\Phi'_1(x, 2F)\}$. Тогда поле в плоскости $z=4F$, преобразованное прибором, изображенном на рис. 2, будет, очевидно, иметь вид

$$E(x, 4F) = \int_{-\infty}^{\infty} E^+(y, 2F) \exp\left\{i \frac{k}{F} xy\right\} dy = \int_{-\infty}^{\infty} E^+(-x - \nu, 0) \Phi'_{1s}(\nu) d\nu, \quad (6)$$

где

$$\Phi'_{1s}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\Phi'_1(x, 2F)\} \exp\left\{ik \frac{\nu}{F} x\right\} dx.$$

Поле $E(x, 4F)$ существенно отличается от начального $E^+(x, 0)$ и эти отличия касаются в основном фазовых соотношений. Преобразователь рис. 2 активно воздействует на фазовые соотношения и, как было показано в [1] и будет показано ниже, создает стационарные фазовые соотношения между «точками» некогерентного объекта, начальное поле которого вообще не содержало каких-либо стационарных фазовых соотношений. Эти фазовые соотношения выявляются в интерферометрической схеме (см. ниже, а также [1]).

Можно также отметить следующее: полный измерительный процесс фактически начинается там и тогда, где и когда традиционный заканчивается.

Действительно, в традиционной измерительной схеме в плоскости действительного изображения происходит необратимое взаимодействие волнового поля с прибором — волновой процесс заканчивает свое существование. При полном измерительном процессе в плоскости действительного изображения начинается первый этап измерений — фазовое (обратимое) преобразование волнового поля (волновой процесс не исчезает). На втором этапе происходит взаимодействие преобразованного волнового поля с «волной сравнения». На этом этапе, производимом интерферометрической

схемой, происходит выявление фазовой информации об объекте из преобразованного поля $E(x, 4F)$ [1]. И, наконец, на третьем этапе происходит обратимое взаимодействие поля с прибором при измерении светового потока, который однозначно связан с амплитудной и фазовой информацией преобразованного поля $E(x, 4F)$.

Рассмотрим действие мнимого квадратичного фильтра $\Phi_1(x, 2F)$ и покажем, что преобразователь с таким фильтром обладает активными свойствами по разрешению. Такое доказательство для входного зрачка с коэффициентом пропускания в виде функции Гаусса было проведено в работе [1].

Однако это доказательство нельзя, видимо, считать вполне строгим, так как при выбранном входном зрачке в плоскости $z=0$ поле задано в неограниченной области и поэтому можно интерпретировать полученные результаты по активности преобразования (6) как следствие неограниченного входного зрачка.

Приведем здесь доказательство активности преобразователя, изображенного на рис. 2, с фазовым квадратичным фильтром для ограниченного входного зрачка в виде прямоугольной функции $\text{rect}\{x/2D\}$.

Пусть $\Phi_1(x, 2F) = \exp\{-i\varepsilon(x + \gamma)^2\}$.

Поле в плоскости входного зрачка, создаваемое волной единичной амплитуды, равно

$$E^+(x, 0) = \exp\{ikax\} \text{rect}\left(\frac{x}{2D}\right).$$

Тогда на основании формулы (6) и с учетом масштабного коэффициента поле в плоскости $z=4F$ будет иметь вид

$$E(x, 4F) = \frac{k}{2\pi F} \int_{-D}^D \exp\{-ikxv\} \Phi_{1s}(x+v) dv, \quad (7)$$

где

$$\Phi_{1s}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i\varepsilon(x + \gamma)^2\} \exp\left\{ik \frac{v}{F} x\right\} dx. \quad (7')$$

Отметим, что последний интеграл не отвечает общепринятым математическим «условиям существования». Такое же положение будет наблюдаться и при вычислении Фурье-образов других фазовых фильтров $\Phi_1(x, 2F)$. С другой стороны, ясно, что рассматриваемый фильтр вполне физически осуществим. Поэтому примем в дальнейшем, что справедливо замечание Брэйсуэлла: «Физическая возможность осуществления — это достаточно обоснованное условие существования преобразования» [2].

Производя необходимые вычисления [4], получаем

$$\Phi_{1s}(v) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \exp\{-i\varepsilon\gamma^2\} \exp\left\{i \frac{k^2}{4\varepsilon F^2} \left(v - \frac{2F\varepsilon\gamma}{k}\right)^2\right\}.$$

Подставляя это выражение в формулу для $E(x, 4F)$, после преобразований получаем

$$E(x, 4F) = \frac{1}{\sqrt{2i}} \exp\{iW\} \exp\{-ikax\} [F(u_2) - F(u_1)], \quad (8)$$

где $W = -\varepsilon\gamma^2 - \frac{\pi}{4} - \varepsilon F^2 \alpha^2 + 2\varepsilon\gamma F\alpha$,

$$\left. \begin{aligned} u_{2,1} &= \frac{k}{F} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} (\pm D + T), \\ (\text{знак плюс соответствует } u_2, \text{ а минус } -u_1) \\ T &= -x + \frac{2F\varepsilon}{k} \gamma - \frac{2F^2\varepsilon}{k} \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (8')$$

$F(u)$ — интеграл Френеля.

Полученное выражение для $E(x, 4F)$ характерно следующим: бесконечно широкой областью существования отличного от нуля поля в плоскости $z=4F$, дополнительным фазовым множителем, зависящим от α и смещением центра «выходного зрачка», зависящим также от измеряемого параметра α . Интуитивно ясно, что в выражении (8) содержится больше информации об объекте, чем в начальной волне $E^+(x, 0)$.

Покажем, что это действительно так. Для этого рассмотрим двухлучевую интерференционную схему, аналогичную описанной в работе [1] и более подробно разбираемую во второй части — настоящей работы.

Рассматриваемая схема представляет собой двухлучевой интерферометр, в одну ветвь которой введен преобразователь, изображенный на рис. 2, а в другую — зеркальный элемент, осуществляющий одномерную зеркальную симметрию падающей на прибор волны. Поэтому в приборе осуществляется интерференция двух волн, одной из которых является преобразованное поле $(1/2)E(x, 4F)$, а второй — волна сравнения $(1/2)E^+(-x, 0)$.

Тогда суммарная амплитуда $E_{\Sigma}(x, 4F)$ волны, выходящей из интерферометра, будет равна

$$E_{\Sigma}(x, 4F) = \frac{1}{2} [E(x, 4F) + E^+(-x, 0)],$$

а интенсивность интерференционной картины

$$dI(x) = E_{\Sigma}(x, 4F) E_{\Sigma}^*(x, 4F).$$

Суммарный световой поток со всего поля интерференции, очевидно, запишется в виде

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\Sigma}(x, 4F) E_{\Sigma}^*(x, 4F) dx = D \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{2}D} \sqrt{\Gamma_c^2 + \Gamma_s^2} \cos\{W + \Theta\} \right], \quad (9)$$

где

$$\Gamma_c = \int_{-D}^D [C(u_2) - C(u_1)] dx,$$

$$\Gamma_s = \int_{-D}^D [S(u_2) - S(u_1)] dx;$$

$$\Theta = \frac{\pi}{4} + \arctg \frac{\Gamma_s}{\Gamma_c}.$$

Интегрируя последнее выражение с учетом известных формул [4]

$$\int S(\beta x) dx = xS(\beta x) + \frac{\cos \beta^2 x^2}{\beta \sqrt{2\pi}}$$

и

$$\int C(\beta x) dx = xC(\beta x) - \frac{\sin \beta^2 x^2}{\beta \sqrt{2\pi}},$$

получаем

$$\Gamma_c = \left(\frac{4F\epsilon\gamma}{k} - \frac{4F^2\epsilon}{k} a \right) C \left\{ \frac{k}{F} \sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon}} \left(-\frac{4F\epsilon\gamma}{k} + \frac{4F^2\epsilon}{k} a \right) \right\} -$$

$$- \left(\frac{4F\epsilon\gamma}{k} - \frac{4F^2\epsilon}{k} a + 2D \right) C \left\{ \frac{k}{F} \sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon}} \left(-\frac{4F\epsilon\gamma}{k} + \frac{4F^2\epsilon}{k} a - 2D \right) \right\} -$$

$$- \left(\frac{4F\epsilon\gamma}{k} - \frac{4F^2\epsilon}{k} a - 2D \right) C \left\{ \frac{k}{F} \sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon}} \left(-\frac{4F\epsilon\gamma}{k} + \frac{4F^2\epsilon}{k} a + 2D \right) \right\} +$$

$$+ \frac{F\sqrt{2\epsilon}}{k\sqrt{\pi}} \left[2 \sin \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{k^2}{F^2 2\pi\epsilon} \left(\frac{4F\epsilon\gamma}{k} - \frac{4F^2\epsilon}{k} a \right)^2 \right\} - \sin \left\{ \frac{k^2}{4F^2\epsilon} \left(\frac{4F\epsilon\gamma}{k} - \frac{4F^2\epsilon}{k} a + 2D \right)^2 \right\} - \right.$$

$$\left. \sin \left\{ \frac{k^2}{4F^2\epsilon} \left(\frac{4F\epsilon\gamma}{k} - \frac{4F^2\epsilon}{k} a - 2D \right)^2 \right\} \right];$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_s = & \left(\frac{4F\varepsilon\gamma}{k} - \frac{4F^2\varepsilon}{k} a \right) S \left\{ \frac{k}{F} \sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon}} \left(-\frac{4F\varepsilon\gamma}{k} + \frac{4F^2\varepsilon}{k} a \right) \right\} - \\
 & - \left(\frac{4F\varepsilon\gamma}{k} - \frac{4F^2\varepsilon}{k} a + 2D \right) S \left\{ \frac{k}{F} \sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon}} \left(-\frac{4F\varepsilon\gamma}{k} + \frac{4F^2\varepsilon}{k} a - 2D \right) \right\} - \\
 & - \left(\frac{4F\varepsilon\gamma}{k} - \frac{4F^2\varepsilon}{k} a - 2D \right) S \left\{ \frac{k}{F} \sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon}} \left(-\frac{4F\varepsilon\gamma}{k} + \frac{4F^2\varepsilon}{k} a + 2D \right) \right\} - \\
 & - \frac{F}{k} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\pi}} \left[2 \cos \left\{ \frac{k^2}{4F^2\varepsilon} \left(\frac{4F\varepsilon\gamma}{k} - \frac{4F^2\varepsilon}{k} a \right)^2 \right\} - \cos \left\{ \frac{k^2}{4F^2\varepsilon} \left(\frac{4F\varepsilon\gamma}{k} - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{4F^2\varepsilon}{k} a + 2D \right)^2 \right\} - \cos \left\{ \frac{k^2}{4F^2\varepsilon} \left(\frac{4F\varepsilon\gamma}{k} - \frac{4F^2\varepsilon}{k} a - 2D \right)^2 \right\} \right].
 \end{aligned} \tag{10}$$

Выражение (9) показывает, что суммарный световой поток $I(\alpha)$ фазочувствительной схемы с преобразователем рассматриваемого вида состоит из постоянного фона и потока, гармонически зависящего от измеряемого параметра α . Принимая последний за выходную информацию систем с полным измерительным процессом, можно показать, как это сделано в [1], что в этом случае предельно разрешимое угловое расстояние $\Delta\alpha_{\text{пр}}$ приближенно равно половине периода тригонометрического члена, т. е.

$$\Delta\alpha_{\text{пр}} \approx \frac{\pi}{2\varepsilon\gamma F}. \tag{11}$$

Из последнего выражения следует, что $\Delta\alpha_{\text{пр}} \rightarrow 0$ с возрастанием величин параметров фильтра ε и γ , значения которых ничем физически не ограничены. Другими словами, разрешающая способность рассматриваемых систем с преобразователем, изображенным на рис. 2, вообще говоря, бесконечна. Однако все это имеет смысл при величине сигнала, отличной от нуля, т. е. необходимо убедиться, что $\sqrt{\Gamma_e^2 + \Gamma_s^2} \neq 0$ при конечных ε и γ .

Из выражений (10) непосредственно следует, что $\Gamma_e \neq 0$ и, следовательно, $\sqrt{\Gamma_e^2 + \Gamma_s^2} \neq 0$.

Действительно, например, условие $\Gamma_e \equiv 0$ выполняется при

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{4F\varepsilon\gamma}{k} - \frac{4F^2\varepsilon}{k} a \right) C \left\{ \frac{k}{F} \sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon}} \left(-\frac{4F\varepsilon\gamma}{k} + \frac{4F^2\varepsilon}{k} a \right) \right\} - \left(\frac{4F\varepsilon\gamma}{k} - \frac{4F^2\varepsilon}{k} a + 2D \right) \times \\
 & \times C \left\{ \frac{k}{F} \sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon}} \left(-\frac{4F\varepsilon\gamma}{k} + \frac{4F^2\varepsilon}{k} a - 2D \right) \right\} - \left(\frac{4F\varepsilon\gamma}{k} - \frac{4F^2\varepsilon}{k} a - 2D \right) \times \\
 & \times C \left\{ \frac{k}{F} \sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon}} \left(-\frac{4F\varepsilon\gamma}{k} + \frac{4F^2\varepsilon}{k} a + 2D \right) \right\} \equiv -\frac{F}{k} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\pi}} \left[2 \sin \left\{ \frac{k^2}{4F^2\varepsilon} \left(\frac{4F\varepsilon\gamma}{k} - \frac{4F^2\varepsilon}{k} a \right)^2 \right\} - \right. \\
 & \left. - \sin \left\{ \frac{k^2}{4F^2\varepsilon} \left(\frac{4F\varepsilon\gamma}{k} - \frac{4F^2\varepsilon}{k} a + 2D \right)^2 \right\} - \sin \left\{ \frac{k^2}{4F^2\varepsilon} \left(\frac{4F\varepsilon\gamma}{k} - \frac{4F^2\varepsilon}{k} a - 2D \right)^2 \right\} \right],
 \end{aligned}$$

что, очевидно, невозможно, так как интеграл Френеля $C\{\alpha, \varepsilon, \gamma\}$ не может быть выражен через элементарные (тригонометрические) функции.

Литература

- [1] Ю. Е. Дукаревич. Опт. и спектр., 34, 000, 1973.
- [2] Д. Гудман. Введение в Фурье оптику. Изд. «Наука», М., 1971.
- [3] di Frangia, G. Togliardo. Nuovo Cimento, Suppl. (9), 2, 426, 1952.
- [4] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., 1951.

Поступило в Редакцию 29 июля 1971 г.