

П. А. Кулагина, Е. А. Ружицкая

(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)

ДЕМПФИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА ПРИ БОЛЬШИХ НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Математическая модель нелинейного маятника имеет вид

$$\ddot{x} + \sin x = u, \quad (1)$$

где x – угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия, \ddot{x} – угловое ускорение, u – управление, действующее на систему, $t \geq 0$ – время. Устойчивыми состояниями равновесия системы (1) при $u = u(t) \equiv 0, t \geq 0$, на фазовой плоскости (x, \dot{x}) являются точки

$$(x = \pm 2k\pi, \dot{x} = 0), k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

В линейной теории при малых начальных отклонениях $(|x(0)| + |\dot{x}(0)|)$ для гашения колебаний маятника около устойчивого нижнего устойчивого состояния равновесия $(0, 0)$ используется линейное уравнение $\ddot{x} + x = u$.

Система (1) при выключенном управлении ($u(t) \equiv 0, t \geq 0$) совершает незатухающие колебания или вращения. Состояние равновесия (2) при $k = 0$ будем использовать при гашении колебаний. Функцию

$$u = u(x, \dot{x}), (x, \dot{x}) \in R^2, \quad (3)$$

назовем обратной связью. Замкнем систему (1), заменив управления u на функцию (3):

$$\ddot{x} + \sin x = u(x, \dot{x}). \quad (4)$$

Обратную связь (3) назовем демпфирующей в области G для состояния равновесия $x = 2k\pi, \dot{x} = 0$, если $u(2k\pi, 0) = 0$ и решение $x(t) \equiv 2k\pi, t \geq 0$ системы (4) асимптотически устойчиво в G . Обратные связи (3), удовлетворяющие неравенству $|u(x, \dot{x})| \leq L, (x, \dot{x}) \in G$ называются ограниченными.

Заменим нелинейную характеристику $\sin x$ системы (1) на периодическую кусочно-линейную функцию $f(x)$. Динамическую систему, $\ddot{x} + f(x) = u(x, \dot{x})$, назовем кусочно-линейной аппроксимацией системы (4).

Для построения демпфирующей обратной связи в классе дискретных управлений с периодом квантования $h > 0$ будем использовать следующую сопровождающую задачу оптимального управления:

$$B_{\Theta}(z) = \min_u \int_0^{\Theta} |u(t)| dt, \ddot{x} + f(x) = u, x(0) = z_1, \dot{x}(0) = z_2,$$

$$x(\Theta) = 0, \dot{x}(\Theta) = 0, |u(t)| \leq L, t \in T = [0, \Theta], z = (z_1, z_2),$$

где $\Theta = Nh$, N – натуральное число.

Изучен и реализован алгоритм построения демпфирующей обратной связи для демпфирования математического маятника при больших начальных возмущениях.