

С. В. Лемза

(ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно)

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ

Для того чтобы построить преобразование Лапласа для обобщённых функций экспоненциального роста, сначала определим простран-

ство экспоненциально убывающих бесконечно дифференцируемых функций.

Пусть $a \in \mathbb{R}$. Обозначим через E^a совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций удовлетворяющих условию:

$$\forall k \in \mathbb{N}_+ \exists C > 0: |\varphi^{(k)}(t)| \leq C e^{-a|t|}, \text{ где } t \in \mathbb{R}.$$

Обозначим $\varepsilon_c = \bigcup_{a>c} E^a$ и определим в ε_c строгую индуктивную локально выпуклую топологию, порождаемую семейством локально выпуклых пространств $\{E^a\}_{a>c}$.

Обобщенной функцией на \mathbb{R} экспоненциального роста степени c будем называть любой линейный непрерывный функционал на пространстве ε_c .

Преобразованием Лапласа обобщенной функции $f \in \varepsilon'_c$ называется функция \tilde{f} , определяемая на множестве $\Pi_c = \{\lambda \mid \operatorname{Re} \lambda > c\}$ равенством

$$\tilde{f}(\lambda) = \langle f(t), e^{-\lambda t} \rangle (\lambda \in \Pi_c).$$

Пример преобразования Лапласа от δ -функции:

Пусть $f = \delta$. Тогда $f \in \varepsilon'_c, \forall c \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ имеем:

$$\tilde{\delta}(\lambda) = \langle \delta(t), e^{-\lambda t} \rangle = e^{-\lambda t} \Big|_{t=0} = 1.$$

Преобразованием Лапласа обобщенной функции $f \in \varepsilon'_c$ называется функция \tilde{f} , определённая на множестве $\Pi_c = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda > c\}$ равенством

$$\tilde{f}(\lambda) = \langle f(t), e^{-\lambda t} \rangle (\lambda \in \Pi_c).$$

Доказаны следующие свойства обобщенного преобразования Лапласа:

1. Обобщенное преобразование Лапласа тензорного произведения любого конечного числа обобщенных функций экспоненциального роста равно тензорному произведению их обобщенных преобразований Лапласа.

2. Обобщенное преобразование Лапласа свёртки обобщенной функции экспоненциального роста f с обобщенной функцией экспоненциального роста g равно произведению обобщенного преобразо-

Материалы XVIII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов
«Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании,
производстве и научных исследованиях», Гомель, 23–25 марта 2015г.

вания Лапласа обобщённой функции g на обобщённое преобразова-
ние Лапласа обобщённой функции f .