Ю. А. Лобасенко
(ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно)

ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Теория вейвлетов является мощной альтернативой анализу Фурье и дает более гибкую технику преобразования функций. Одно из основных преимуществ вейвлет-анализа заключается в том, что он позволяет заметить хорошо локализованные изменения функции.

Наиболее распространенные базисы вейвлет-преобразования конструируются на основе производных функции Гаусса:

$$\varphi(t) = e^{-t^2/2}.$$

В настоящей работе в качестве базисного вейвлета рассматривается финитная бесконечно дифференцируемая функция $\psi(x)$, являющаяся второй производной известной функции Соболева, названный Соболевским вейвлетом:

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{6x^4 - 2}{(x^2 - 1)^4} \cdot e^{1/(x^2-1)}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Прямое вейвлет-преобразование функции $f(t)$ имеет вид

$$(Wf)(a,b) = a^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt,\ a > 0. \qquad (1)$$

Обозначим $\psi_a(t) = a^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{t}{a}\right)$, $\varepsilon = a,\ s = b$. Тогда (1) можно записать в следующем виде:

$$(Wf)(\varepsilon, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi_\varepsilon(s-t)dt = (f * \psi_\varepsilon)(s), \qquad (2)$$

где * означает операцию свертки.

Получаем равенство

$$(Wf)(\varepsilon, s) = (f * \psi_\varepsilon)(s), \qquad (3)$$

которое позволяет распространить вейвлет-преобразование на произвольные обобщенные функции.

Функция Wf обладает следующим свойством:

Если обобщенная функция f финитна, т.е. ее носитель содержится на $[a;b]$, то функция Wf будет финитна и ее носитель будет содержаться на $[a-\varepsilon;b+\varepsilon]$.