Е. В. Ковалевская
(ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно)

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР ФЕЙЕРА

Пусть $\{\alpha_k\}$ – произвольная последовательность комплексных чисел, где $|\alpha_k| < 1,\ k \in N$. Введем следующие обозначения:

$$\lambda_n(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}, \ \alpha_k = |\alpha_k|e^{i\theta_k}, \ k \in N.$$

Для произвольной функции $f \in C_{2\pi}$ полагаем,

$$V_n(x, f) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_n^2(t,x)dt}{\int_{-\pi}^{\pi} D_n^2(t,x)dt}, \text{ где } D_n(t,x)dt = \frac{\sin\int_x^t \lambda_n(u)du}{\sin\frac{t-x}{2}}, \ k = 0,1..n. \quad (1)$$

Лемма 1. Справедливо равенство $\int_{-\pi}^{\pi} D_n^2(t,x)dt = \pi\lambda_n(x), x \in R.$

Заметим, что рациональная функция $\lambda_n(x)$ может быть представлена в виде

$$\lambda_n(x) = \frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-2|\alpha_k|\cos(x-\theta_k)+|\alpha_k|^2\right)},$$

где $p_n(x)$ – тригонометрический полином порядка не выше n не имеющий действительных корней.

Лемма 2. Функция $V_n(x, f)$ является тригонометрической рациональной порядка не выше n и имеет вид $V_n(x, f) = \dfrac{q_n(x)}{p_n(x)}$, где $q_n(x)$ тригонометрический полином порядка не выше n.

На основании формулы (1) и лемм 1 и 2 можно заключить, что $V_n(x, f)$ является интегральным тригонометрическим оператором Фейера, который отображает пространство непрерывных функций $C_{2\pi}$ в пространство тригонометрических рациональных функций порядка не выше n с заданным знаменателем, равным $p_n(x)$.

Доказаны теоремы о равномерной сходимости $\{V_n(x, f)\}$ для $f(x) \in C_{2\pi}$ и получена оценка равномерных приближений функций удовлетворяющих условию Липшица.

Впервые периодические операторы Фейера введены в работе В. Н. Русака [1]. Построенные нами операторы Фейера имеют в два раза меньший порядок и могут быть более эффективными в вопросах приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Русак, В. Н. О приближении рациональными дробями / В. Н. Русак // Докл. АН БССР. – 1964. – Т. 8, № 7. – С. 432–435.