М. С. Романовский, Т. А. Романчук
(БГУИР, Минск)

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ СУММЫ ДВУХ МАТРИЦ

Как известно, определитель произведения двух (или более) матриц равен произведению их определителей, однако данное свойство не переносится на определитель суммы. Попытки получить формулу для нахождения определителя суммы матриц предпринимались разными математиками в связи с прикладными задачами (например, исследование резольвент для линейных пучков матриц вида $A_0 + \varepsilon A_1$). Наиболее известным является правило [1]: определитель суммы матриц A и H порядка m равен сумме всех различных определителей порядка m, которые получаются, если часть строк (столбцов) брать совпадающими со строками (столбцами) матрицы A, а остальную часть – со строками (столбцами) матрицы H.

Введем определения, необходимые для записи основной формулы.

Тензорным произведением матриц $A_{m\times n}$ и $B_{p\times r}$ называется матрица $C_{mp\times nr} = A \otimes B$, где элемент c_{ij} равен произведению соответствующего элемента матрицы A на матрицу B.

След произведения матриц A и H обозначим как

$\langle A, H \rangle = Tr(AH)$.

Рассмотрим наборы $I = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$ и $J = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$, где $i_k, j_k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Если в наборах I и J все числа i_k и $j_к$ различны, положим $D^{(m)}(I, J) = \dfrac{1}{m!}(-1)^{\gamma}$, где $\gamma = \gamma(I, J)$ определяет четность перестановки наборов I и J, и положим $D^{(m)}(I, J) = 0$ в противном случае. Например, матрица $D^{(2)}$ имеет вид $D^{(2)} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Утверждение. Определитель суммы двух матриц A и H порядка m допускает представление

$$\det(A + H) = \sum_{j=0}^{m} C_m^j \left\langle D^{(m)}, A^{m-j} \otimes H^j \right\rangle,$$

где A^k (H^k) это тензорная степень соответствующей матрицы.

Непосредственное применение данной формулы на практике является достаточно громоздким, поэтому была разработана программа на C^{++}, реализующая ее для матриц 2-го и 3-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин, В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М.: Наука, 1978. – 302 с.