Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (90), 2015

УДК 517.925

Полиномиальные дифференциальные уравнения с одинаковыми отражающими функциями

В.А. Бельский

Получены необходимые, а также достаточные условия совпадения отражающих функций у двух уравнений Риккати, а также у двух уравнений Абеля.
Ключевые слова: отражающая функция, уравнение Риккати, уравнения Абеля.

The necessary and sufficient conditions for coincidence of Mironenko reflective functions for given Riccati equations and Abel equations as well were established.
Keywords: reflective function, Riccati equation, Abel equation.

Введение. В работе для качественного исследования дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью, а также квадратичных систем второй размерности используется теория отражающей функции (ОФ), основные положения которой изложены в работах [1], [2], а также [3]. В настоящей работе уточняются и дополняются некоторые результаты, полученные в работах [4]–[7]. Приведем лишь некоторые наиболее важные для нашего исследования свойства этой функции. Для дифференциальной системы

$$\dot{x} = X(t,x),\ t \in R,\ x^T = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset R^n, \qquad (1)$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью и общим решением $x = \phi(t; t_0, x_0)$ отражающая функция определяется формулой $F(t,x) = \varphi(-t; t, x)$. Системы с одинаковыми ОФ называют *эквивалентными*. Если система (1) 2ω – периодична по t, то $F(-\omega, x)$ является отображением за период $[-\omega, \omega]$ (отображением Пуанкаре). Известно также [1, с 171], [4], что если непрерывно дифференцируемые вектор-функции $\Delta_i(t,x) = [\Delta_{1i}(t,x), \ldots, \Delta_{ni}(t,x)]^T$, $i = \overline{1,k}$ являются решениями дифференциальной системы

$$\frac{\partial \Delta(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \Delta(t,x)}{\partial x} X(t,x) - \frac{\partial X(t,x)}{\partial x} \Delta(t,x) = 0, \qquad (2)$$

то все возмущенные системы вида

$$\dot{x} = X(t,x) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) \Delta_i(t,x), \qquad (3)$$

где $\alpha_i(t)$, $i = \overline{0,k}$ – произвольные непрерывные скалярные нечетные функции, эквивалентны системе (1) (k – любое число или ∞).

Дифференцируемая функция $F(t,x)$ будет ОФ дифференциальной системы (1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет *основному соотношению*

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} X(t,x) + X(-t, F(t,x)) \equiv 0, \qquad (4)$$

и начальному условию $F(0,x) \equiv x$.

1. Совпадение ОФ у двух уравнений Риккати. Рассмотрим два уравнения Риккати

$$\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2, \qquad (5)$$

$$\dot{x} = A(t) + B(t)x + C(t)x^2, \qquad (6)$$

коэффициенты которых будем считать непрерывными на $\boldsymbol{R}$ функциями. Мы используем обозначения $\overline{\varphi} := \varphi(-t)$, $\varphi_{ч}(t) := \frac{1}{2}(\varphi(t) + \varphi(-t)) = \frac{1}{2}(\varphi + \overline{\varphi})$, $\varphi_{н}(t) := \frac{1}{2}(\varphi(t) + \varphi(-t)) = \frac{1}{2}(\varphi + \overline{\varphi})$, $A(t) - a(t) := \widetilde{A}(t)$, $B(t) - b(t) := \widetilde{B}(t)$, $C(t) - c(t) := \widetilde{C}(t)$, $\Delta(t) := 4\widetilde{A}(t)\widetilde{C}(t) - [\widetilde{B}(t)]^2$.

Теорема 1. *Пусть ОФ уравнений (5) и (6) совпадают. Тогда* $\Delta(t)$ *есть четная функция.*

Доказательство. Следуя [1, с. 96], выписываем ОФ уравнений (5) и (6)

$$F(t,x)=\frac{(z(t)+n(t))x+r(t)}{s(t)x+z(t)-n(t)},\ F_1(t,x)=\frac{(z_1(t)+n_1(t))x+r_1(t)}{s_1(t)x+z_1(t)-n_1(t)},$$

где функции $z(t), n(t), s(t), r(t)$ и $z_1(t), n_1(t), s_1(t), r_1(t)$ являются решениями дифференциальных систем $\dot r = b_\text{н} r - 2a_\text{н} n - 2a_\text{ч} z,\ \dot s = -b_\text{н} s - 2c_\text{н} n + 2c_\text{ч} z,\ \dot n = c_\text{н} r + a_\text{н} s - b_\text{ч} z,\ \dot z = c_\text{ч} r - a_\text{ч} s - b_\text{ч} n$ и $\dot r_1 = B_\text{н} r_1 - 2A_\text{н} n_1 - 2A_\text{ч} z_1,\ \dot s_1 = -B_\text{н} s_1 - 2C_\text{н} n_1 + 2C_\text{ч} z_1,\ \dot n_1 = C_\text{н} r_1 + A_\text{н} s_1 - B_\text{ч} z_1,\ \dot z_1 = C_\text{ч} r_1 - A_\text{ч} s_1 - B_\text{ч} n_1$, соответственно. В [5] показано, что при этом $z_1(t)\equiv z(t),\ n_1(t)\equiv n(t),\ s_1(t)\equiv s(t),\ r_1(t)\equiv r(t)$. Приравнивая правые части выписанных систем, получим линейную однородную алгебраическую систему

$$\widetilde B_\text{н} r - 2\widetilde A_\text{н} n - 2\widetilde A_\text{ч} z = 0,\ -\widetilde B_\text{н} s - 2\widetilde C_\text{н} n + 2\widetilde C_\text{ч} z = 0,\ \widetilde C_\text{н} r + \widetilde A_\text{н} s - \widetilde B_\text{ч} z = 0,\ \widetilde C_\text{ч} r - \widetilde A_\text{ч} s - \widetilde B_\text{ч} n = 0, \quad (7)$$

определитель которой имеет вид

$$\delta(t) := \begin{vmatrix} \widetilde B_\text{н} & -2\widetilde A_\text{н} & 0 & -2\widetilde A_\text{ч} \\ 0 & -2\widetilde C_\text{н} & -\widetilde B_\text{н} & 2\widetilde C_\text{ч} \\ \widetilde C_\text{н} & 0 & \widetilde A_\text{н} & -\widetilde B_\text{ч} \\ \widetilde C_\text{ч} & -\widetilde B_\text{ч} & -\widetilde A_\text{ч} & 0 \end{vmatrix}.$$

Покажем, что $\delta(t)\equiv 0$. Действительно, для любого фиксированного t, согласно [1, с. 97], имеет место тождество $z^2(t)-n^2(t)-s(t)r(t)\equiv 1$, т. е. при любом t система (7) имеет ненулевое решение. Следовательно $\delta(t)\equiv 0$. Вычисляя этот определитель, получаем $(2\widetilde A_\text{н}\widetilde C_\text{ч} + 2\widetilde A_\text{ч}\widetilde C_\text{н} - \widetilde B_\text{н}\widetilde B_\text{ч})^2 = 0$. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что $2\widetilde A_\text{н}\widetilde C_\text{ч} + 2\widetilde A_\text{ч}\widetilde C_\text{н} - \widetilde B_\text{н}\widetilde B_\text{ч} = \frac14[4AC - B^2 - \overline{(4AC-B^2)}] = \frac14[\Delta - \overline{\Delta}] = \frac12\Delta_н$. Следовательно, $\Delta_н = 0$. Таким образом, $\Delta(t)$ является четной функцией. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для любого уравнения (5) в некоторой окрестности прямой $t=0$ существует эквивалентное ему уравнение (6), в котором нечетные части $A_\text{н}(t), B_\text{н}(t), C_\text{н}(t)$ функций $A(t), B(t), C(t)$ могут быть выбраны произвольным образом.*

Доказательство. Будем строить уравнение (6) с такой же ОФ, как и у уравнения (5). Тогда функции $z(t), n(t), s(t), r(t)$, входящие в выражение для ОФ

$$F(t,x)=\frac{(z(t)+n(t))x+r(t)}{s(t)x+z(t)-n(t)},$$

удовлетворяют двум системам [1, с. 96–97]:

$$\dot r = b_\text{н} r - 2a_\text{н} n - 2a_\text{ч} z,\ \dot s = -b_\text{н} s - 2c_\text{н} n + 2c_\text{ч} z,\ \dot n = c_\text{н} r + a_\text{н} s - b_\text{ч} z,\ \dot z = c_\text{ч} r - a_\text{ч} s - b_\text{ч} n \text{ и}$$
$$\dot r = B_\text{н} r - 2A_\text{н} n - 2A_\text{ч} z,\ \dot s = -B_\text{н} s - 2C_\text{н} n + 2C_\text{ч} z,\ \dot n = C_\text{н} r + A_\text{н} s - B_\text{ч} z,\ \dot z = C_\text{ч} r - A_\text{ч} s - B_\text{ч} n.$$

Приравнивая правые части этих систем, получим

$$b_\text{н} r - 2a_\text{н} n - 2a_\text{ч} z = B_\text{н} r - 2A_\text{н} n - 2A_\text{ч} z, \qquad c_\text{н} r + a_\text{н} s - b_\text{ч} z = C_\text{н} r + A_\text{н} s - B_\text{ч} z,$$
$$-b_\text{н} s - 2c_\text{н} n + 2c_\text{ч} z = -B_\text{н} s - 2C_\text{н} n + 2C_\text{ч} z, \quad c_\text{ч} r - a_\text{ч} s - b_\text{ч} n = C_\text{ч} r - A_\text{ч} s - B_\text{ч} n.$$

Из первых трех уравнений последней системы следуют соотношения

$$\begin{aligned} A_\text{ч} z &= \tfrac12 (B_\text{н} - b_\text{н})\, r + (-A_\text{н} + a_\text{н})\, n + a_\text{ч} z, \\ B_\text{ч} z &= (C_\text{н} - c_\text{н})\, r + (A_\text{н} - a_\text{н})\, s + b_\text{ч} z, \quad , \\ C_\text{ч} z &= \tfrac12 (B_\text{н} - b_\text{н})\, s + (C_\text{н} - c_\text{н})\, n + c_\text{ч} z. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как для дифференцируемой функции $z(t)$ имеет место $z(0)=1\neq 0$, то существует интервал $(-\tau;\tau)$, на котором $z(t)\neq 0$. Из формул (8) видно, что, по крайней мере, на интервале $(-\tau;\tau)$ функции $A_\text{ч}(t), B_\text{ч}(t), C_\text{ч}(t)$ всегда можем построить для любых произвольных функций $a(t), b(t), c(t)$ и $A_\text{н}(t), B_\text{н}(t), C_\text{н}(t)$. Таким образом, для уравнения (5) мы построили уравнение $\dot x = A_\text{ч}(t) + A_\text{н}(t) + [B_\text{ч}(t) + B_\text{н}(t)]x + [\,C_\text{ч}(t) + C_\text{н}(t)]x^2$ с такой же ОФ, как и у уравнения (5). Причем в построенном уравнении функции $A_\text{н}(t), B_\text{н}(t), C_\text{н}(t)$ мы можем выбирать произвольно, а $A_\text{ч}(t), B_\text{ч}(t), C_\text{ч}(t)$ определяются формулами (8), т. е. определяются в зависимости от набора $A_\text{н}(t), B_\text{н}(t), C_\text{н}(t)$ и от коэффициентов исходного уравнения (5).

Следствие. *Для любого уравнения (5) в некоторой окрестности прямой* $t=0$ *можно построить уравнение (6) с четной по* t *правой частью, эквивалентное уравнению (5).*

Для доказательства в формулах (8) достаточно положить $A_{\text{н}}(t)\equiv B_{\text{н}}(t)\equiv C_{\text{н}}(t)\equiv 0$.

В работе [6] нами изучался вопрос о существовании для исходного уравнения (5) эквивалентного ему уравнения вида

$$\dot{x}=A(t)(a_0+b_0x+c_0x^2), \tag{9}$$

где $a_0:=a(0), b_0:=b(0), c_0:=c(0)$. В указанной статье получены результаты в случае, когда $4a_0c_0-b_0^2\neq 0$. Здесь мы приводит результат для случая $4a_0c_0-b_0^2=0$.

Теорема 3. *Пусть уравнение (5), в котором хотя бы одно из чисел* a_0, b_0, c_0 *отлично от нуля и* $4a_0c_0-b_0^2=0$, *эквивалентно какому-либо уравнению (9). Тогда функция* $A(t)$ *определяется по одной из формул:*

$$A(t)=\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{c_0}e^{-\int_0^t b_{\text{н}}d\tau}\int_0^t c_{\text{ч}}\,e^{\int_0^\tau b_{\text{н}}d\sigma}\,d\tau\Big) \quad \textit{или} \quad A(t)=\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{a_0}e^{\int_0^t (b_{\text{н}}-\frac{b_0}{a_0}a_{\text{н}})d\tau}\int_0^t a_{\text{ч}}\,e^{-\int_0^\tau (b_{\text{н}}-\frac{b_0}{a_0}a_{\text{н}})d\sigma}\,d\tau\Big)$$

для случаев $a_0=0$ *или* $a_0\neq 0$ *соответственно. При этом ОФ построенного уравнения вычисляется по формуле*

$$F(t,x)=\frac{(1-b_0\,I)\,x-2a_0\,I}{2c_0I\,x+1+b_0\,I}, \ \textit{где}\ I:=\int_0^t A(\tau)d\tau. \tag{10}$$

Доказательство. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что основное соотношение (4) для ОФ (10) выполняется в каждом из указанных случаев.

2. Полиномиальные возмущения уравнения Абеля, сохраняющие ОФ. В этом разделе мы ставим задачу получить условия, при которых для уравнения Абеля существуют полиномиальные возмущения вида $\Delta(t,x)=r_0(t)+r_1(t)x+\ldots+r_m(t)x^m$, такие, что любое из множества уравнений вида (3) эквивалентно исходному уравнению.

В работах [7], [8] было показано, что для уравнения Абеля

$$\dot{x}=a_0(t)+a_1(t)x+a_2(t)x^2+a_3(t)x^3, \tag{11}$$

полиномиальное $\Delta(t,x)$ – решение уравнения (2) может существовать только в виде многочлена третьей степени, т. е.

$$\Delta(t,x)=r_0(t)+r_1(t)x+r_2(t)x^2+r_3(t)x^3, \tag{12}$$

Покажем, при каких условиях функции $\Delta(t,x)$ вида (12) существуют и сколько их может быть.

Теорема 4. *Для того чтобы для уравнения Абеля (11), в котором* $a_3(t)\neq 0$, *существовала хотя бы одна полиномиальная функция* $\Delta(t,x)$ *вида (12), удовлетворяющая уравнению (2), тождественно не равная нулю, необходимо, чтобы функция*

$$\varphi(t):=27a_0a_3^2+2a_2^3-9a_1a_2a_3-9(\dot{a}_3a_2-a_3\dot{a}_2)$$

удовлетворяла соотношению

$$3a_3\varphi\ddot{\varphi}+9\varphi(\dot{\varphi}\,\dot{a}_3-\varphi\,\ddot{a}_3-\varphi\,\dot{a}_3a_1-\varphi\,a_3\dot{a}_1)+6\varphi(\dot{\varphi}\,a_1a_3+\varphi\,a_2\dot{a}_2)-5a_3\dot{\varphi}^2-2a_2^2\varphi\dot{\varphi}=0. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть указанная функция $\Delta(t,x)$ существует. В [8] было показано, что из этого допущения следует, что существует нетривиальное решение системы

$$\begin{aligned}
&r_2a_3=a_2r_3,\ \ 2r_1a_3=\dot{r}_3+2r_3a_1,\ \ 6r_0a_3^3=\dot{r}_3a_2a_3+(6a_0a_3^2+2\dot{a}_2a_3-2a_2\dot{a}_3)r_3,\\
&3\ddot{r}_3a_3^2=[-6a_3^2a_1+2a_2^2a_3+3a_3\dot{a}_3]\dot{r}_3+[6a_3(\dot{a}_3a_1-a_3\dot{a}_1)-4a_2(\dot{a}_3a_2-a_3\dot{a}_2)]r_3,\\
&3a_3\varphi\ \dot{r}_3=2r_3(3\dot{a}_3\varphi-a_3\dot{\varphi}).
\end{aligned} \tag{14}$$

Умножая четвертое из соотношений (14) на $\varphi(t)$, получим

$$3\ddot{r}_3a_3^2\varphi=[-6a_3^2a_1+2a_2^2a_3+3a_3\dot{a}_3]\dot{r}_3\varphi+[6a_3(\dot{a}_3a_1-a_3\dot{a}_1)-4a_2(\dot{a}_3a_2-a_3\dot{a}_2)]r_3\varphi.$$

Теперь продифференцируем пятое из соотношений (14) и умножим полученное соотношение на $a_3(t)\varphi(t)$. Получим $-3\ddot{r}_3a_3^2\varphi^2+\dot{r}_3a_3\varphi(3a_3\dot{\varphi}-5\dot{a}_3\varphi)+2r_3a_3\varphi(3\ddot{a}_3\varphi+2\dot{a}_3\dot{\varphi}-a_3\ddot{\varphi})=0$.

Заменим в полученном равенстве выражения $\dot{r}_3 a_3\varphi$ и $\ddot{r}_3 a_3^2\varphi^2$ в соответствии с последними из соотношений (14). В результате получим тождество $\Phi(t)r_3 :=$

$$= (3a_3\varphi\ddot{\varphi} + 9\varphi(\dot{\varphi}\dot{a}_3 - \varphi\ddot{a}_3 - \varphi\dot{a}_3 a_1 - \varphi a_3\dot{a}_1) + 6\varphi(\dot{\varphi}a_1 a_3 + \varphi a_2\dot{a}_2) - 5a_3\dot{\varphi}^2 - 2a_2^2\varphi\dot{\varphi})r_3 = 0, \tag{15}$$

которое может выполняться в двух случаях: 1) функция $\Phi(t)$ тождественно равна нулю. Тогда теорема справедлива. 2) $r_3 \equiv 0$ на некотором интервале. Тогда, как следует из первых трех соотношений (14), на этом интервале $r_2 \equiv r_1 \equiv r_0 \equiv 0$, т. е. $\Delta(t,x) \equiv 0$. Но, по нашему предположению, ненулевое $\Delta(t,x)$ существует. А потому имеет место (15).

Если r_3, не являясь тождественным нулем, обращается в нуль в отдельных изолированных точках, то $\Phi(t)$ обращается в нуль всюду, кроме этих изолированных точек. В этом случае из непрерывности $\Phi(t)$ следует, что она будет равна нулю и в рассматриваемых точках.

Пусть теперь $r_3(t)$ обращается в нуль на некотором множестве $\{t_k\}$, имеющем предельную точку $t_k \to t_0$ при $k \to \infty$ и $r_3(t) \neq 0$ на интервалах $(t_{k-1};t_k)$. Тогда на каждом из интервалов $(t_{k-1};t_k)$ имеет место $\Phi(t) \equiv 0$. Поэтому из непрерывности функции $\Phi(t)$ следует, что $\Phi(t_k) = \lim\limits_{t\to t_k}\Phi(t) = 0$. Таким образом, во всех точках $\{t_k\}$ имеет место $\Phi(t_k) = 0$, а значит, и $\Phi(t_0) = \lim\limits_{t_k\to t_0}\Phi(t_k) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть коэффициенты уравнения (11) удовлетворяют тождеству (15), причем $a_3(t) \neq 0$, а $\varphi(t)$ не обращается в нуль. Тогда для уравнения (11) существует единственное с точностью до постоянного множителя $\Delta(t,x)$ вида (12), являющееся решением уравнения (2), причем коэффициенты этого $\Delta(t,x)$ находятся по формулам*

$$\begin{aligned} &r_0(t) = c\tfrac{1}{9}[3\varphi(3a_3a_0 + \dot{a}_2) - a_2\dot{\varphi}]\varphi^{-\frac{5}{3}},\; r_1(t) = c\tfrac{1}{3}[3\varphi(a_3a_1 + \dot{a}_3) - a_3\dot{\varphi}]\varphi^{-\frac{5}{3}}, \\ &r_2(t) = c\,a_3a_2\varphi^{-\frac{2}{3}},\; r_3(t) = c\,a_3^2\varphi^{-\frac{2}{3}}, \end{aligned} \tag{16}$$

где c – произвольная постоянная ($c \neq 0$).

Доказательство. Как уже было отмечено, существование $\Delta(t,x)$ вида (12) равносильно существованию нетривиального решения системы (14). При выполнении условий теоремы решение последнего уравнения системы (14) существует и имеет вид $r_3(t) = c\,a_3^2\varphi^{-\frac{2}{3}}$, где c – произвольная постоянная. Выполнение условия (15) означает, что найденная функция $r_3(t)$ удовлетворяет четвертому уравнению системы (14). Используя $r_3(t)$, из первых трех уравнений системы (14) определяем остальные коэффициенты r_0, r_1, r_2 функции $\Delta(t,x)$. Вычисления показывают, что они имеют вид (16). Итак, функция $\Delta(t,x)$ вида (12) определена с точностью до постоянного множителя. Теорема доказана.

В [1, с. 130] было показано, что если для 2ω-периодического по t уравнения $\dot{x} = X(t,x)$ при некотором $\alpha > 0$ имеют место неравенства $X(t,x) + X(-t,x) < 0$ при $t \in (0,\omega)$ и $x \geq \alpha$; $X(t,x) + X(-t,x) > 0$ при $t \in (0,\omega)$ и $x \leq -\alpha$, то уравнение $\dot{x} = X(t,x)$ имеет хотя бы одно 2ω-периодическое решение. Применим этот результат к уравнению Абеля.

Теорема 6. *Пусть для уравнения (11) с непрерывно дифференцируемыми 2ω-периодическими коэффициентами выполняется $a_{3ч}(t) < 0$ при $t \in [0,\omega]$. Тогда уравнение (11) имеет хотя бы одно 2ω-периодическое решение.*

Доказательство. Находим $X(t,x) + X(-t,x) = 2a_{0ч}(t) + 2a_{1ч}(t)x + 2a_{2ч}(t)x^2 + 2a_{3ч}(t)x^3$. Так как по условию $a_{3ч}(t) \neq 0$ при $t \in [0,\omega]$, то найдется такое $x = \alpha > 0$, что при $t \in [0,\omega],\, x \geq \alpha$ будет иметь место $\left|a_{3ч}(t)x^3\right| > \left|a_{0ч}(t) + a_{1ч}(t)x + a_{2ч}(t)x^2\right|$. А так как $a_{3ч}(t) < 0$ при $t \in [0,\omega]$, то справедливы неравенства

$$a_{0ч}(t)+a_{1ч}(t)x+a_{2ч}(t)x^2+a_{3ч}(t)x^3<0 \text{ при } t\in[0,\omega],\ \ x\ge\alpha,$$
$$a_{0ч}(t)+a_{1ч}(t)x+a_{2ч}(t)x^2+a_{3ч}(t)x^3>0 \text{ при } t\in[0,\omega],\ \ x\le-\alpha,$$

где $a_{iч}(t)=0{,}5[a_i(t)+a_i(-t)]$. Терема доказана.

3. Полиномиальные возмущения квадратичных систем, сохраняющие ОФ. Поставим задачу: выяснить, при каких условиях для квадратичной системы (мы будем называть ее треугольной)

$$\begin{aligned}\dot{x}&=a_0(t)+a_1(t)x+a_3(t)x^2,\\ \dot{y}&=b_0(t)+b_1(t)x+b_2(t)y+b_3(t)x^2+b_4(t)xy+b_5(t)y^2\end{aligned}, \tag{17}$$

существует полиномиальное $\Delta(t,x,y)$ вида

$$\Delta(t,x,y)=\begin{pmatrix} r_0(t)+r_1(t)x+r_2(t)y+r_3(t)x^2+r_4(t)xy\\ s_0(t)+s_1(t)x+s_2(t)y+r_3(t)xy+r_4(t)y^2\end{pmatrix}, \tag{18}$$

являющееся решением соответствующего уравнения (2). Эта задача актуальна для нас потому, что первое уравнение системы (17) есть уравнение Риккати, а, значит, мы будем знать вид первой компоненты ОФ любой из возмущенных систем (3), которые мы можем построить с использованием $\Delta(t,x,y)$ вида (18).

Теорема 7. *Пусть для системы (17), все коэффициенты которой мы полагаем непрерывными, причем $a_3(t)$ и $b_4(t)$ обращаются в нуль лишь в изолированных точках, существует полиномиальное $\Delta(t,x,y)$ вида (18), для которого $r_4(t)\ne 0$ всюду кроме, быть может, изолированных точек. Тогда коэффициенты этой системы удовлетворяют соотношениям*

$$b_3(t)\equiv 0,\ b_5(t)\equiv 0,\ b_4(t)\equiv a_3(t), \tag{19}$$

При этом $\Delta(t,x,y)$ имеют вид

$$\Delta(t,x,y)=\begin{pmatrix} r_0(t)+r_1(t)x+r_2(t)y+r_3(t)x^2+r_4(t)xy\\ s_0(t)+s_1(t)x+s_2(t)y+r_3(t)xy+r_4(t)y^2\end{pmatrix}, \tag{20}$$

где функции $r_i(t),\ i=\overline{0,4},\ s_j(t),\ j=\overline{0,2}$ являются решением линейной дифференциальной системы

$$\begin{aligned}
&\dot{r}_0+a_0r_1+b_0r_2-a_1r_0=0, && \dot{r}_4+b_2r_4-a_3r_2=0,\\
&\dot{r}_1+2a_0r_3+b_0r_4+b_1r_2-2a_3r_0=0, && \dot{s}_0+a_0s_1+b_0s_2-b_1r_0-b_2s_0=0,\\
&\dot{r}_2+a_0r_4+b_2r_2-a_1r_2=0, && \dot{s}_1+b_1s_2+b_0r_3+a_1s_1-b_2s_1-b_1r_1-a_3s_0=0,\\
&\dot{r}_3+b_1r_4-a_3r_1+a_1r_3=0, && \dot{s}_2+2b_0r_4+a_0r_3-b_1r_2-a_3r_0=0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Доказательство. Подставляя правую часть системы (17) и выражение (18) в уравнение (2) приходим к выводу, что функции $r_i(t)$ и $s_j(t),\ i,j=\overline{0;5}$ образуют решение линейной дифференциальной системы из двенадцати дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\dot{r}_0+a_0r_1+b_0r_2-a_1r_0=0, && \dot{s}_0+a_0s_1+b_0s_2-b_1r_0-b_2s_0=0,\\
&\dot{r}_1+2a_0r_3+b_0r_4+b_1r_2-2a_3r_0=0, && \dot{s}_1+2a_0s_3+b_1s_2+b_0s_4+a_1s_1-2b_3r_0-b_2s_1-b_1r_1-b_4s_0=0,\\
&\dot{r}_2+a_0r_4+2b_0r_5+b_2r_2-a_1r_2=0, && \dot{s}_2+2b_0s_5+a_0s_4-2b_5s_0-b_1r_2-b_4r_0=0,\\
&\dot{r}_3+b_3r_2+b_1r_4+a_1r_3-a_3r_1=0, && \dot{s}_3+2a_1s_3+b_3s_2+b_1s_4+a_3s_1-2b_3r_1-b_4s_1-b_1r_3-b_2s_3=0,\\
&\dot{r}_4+b_2r_4+2b_1r_5+b_4r_2-2a_3r_2=0, && \dot{s}_4+2b_1s_5+a_1s_4-b_1r_4-b_4r_1-2b_3r_2-2b_5s_1=0,\\
&\dot{r}_5+b_5r_2+2b_2r_5-a_1r_5=0, && \dot{s}_5+b_2s_5-b_5s_2-b_1r_5-b_4r_2=0
\end{aligned} \tag{22}$$

и удовлетворяют системе из восьми недифференциальных соотношений

$$\begin{aligned}
&b_4r_4+2b_3r_5-a_3r_4=0,\quad b_5r_4+2b_4r_5-2a_3r_5=0,\\
&a_3s_4+2b_3s_5-2b_3r_4-2b_5s_3-b_4r_3=0,\quad b_4s_5-b_5s_4-2b_3r_5-b_4r_4=0,\\
&2a_3s_3+b_3s_4-b_4s_3-2b_3r_3=0,\quad b_3r_4=0,\quad b_5r_5=0,\quad b_4r_5=0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Рассмотрим соотношения

$$b_3r_4=0, b_5r_5=0, b_4r_5=0.$$

В силу условий теоремы и из непрерывности $b_3(t), b_4(t), r_5(t)$ следует, что $b_3 \equiv 0$ и $r_5 \equiv 0$. Тогда из второго соотношения системы (23) следует, что $b_5 \equiv 0$ и подсистема (23) принимает вид $b_4 r_4 - a_3 r_4 = 0,\ a_3 s_4 - b_4 r_3 = 0,\ b_4 s_5 - b_4 r_4 = 0,\ 2a_3 s_3 - b_4 s_3 = 0$. В силу условий теоремы, эти соотношения могут иметь место, только если $b_4 \equiv a_3$ и далее $s_4 \equiv r_3,\ s_5 \equiv r_4,\ s_3 \equiv 0$. В этом случае все соотношения (23) обращаются в тождества, а система (22) принимает вид (21). При этом исходная система с необходимостью имеет вид

$$\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_3(t)x^2,$$
$$\dot{y} = b_0(t) + b_1(t)x + b_2(t)y + a_3(t)xy.$$

Теорема доказана.

Заключение. Мы получили необходимые, а также достаточные условия совпадения отражающих функций у заданных уравнений Риккати и Абеля. Получено необходимое условие существования для заданного уравнения Абеля полиномиального возмущения, сохраняющего отражающую функцию.

Литература

1. Мироненко, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – 196 с.

2. Мироненко, В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск : Университетское, 1986. – 76 с.

3. Mironenko, V.I. Reflecting function [Electronic resource] / V.I. Mironenko. – 2010. – Mode of access : http://www.reflecting-function.narod.ru. – Date of access : 06.02.2015.

4. Mironenko, V.I. How to construct equivalent differential systems / V.I. Mironenko, V.V. Mironenko // Appl. Math. Lett. – 2009. – Vol. 29. – P. 1356–1359.

5. Бельский, В.А. Уравнения Риккати с одинаковыми отражающими функциями / В.А. Бельский // Известия Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2007. – № 4. – С. 22–27.

6. Бельский, В.А. О построении уравнений, эквивалентных уравнению Риккати в смысле совпадения отражающих функций / В.А. Бельский // Известия Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2008. – № 2. – С. 35–41.

7. О построении дифференциальных полиномиальных уравнений первого порядка, эквивалентных заданному в смысле совпадения отражающей функции / В.А. Бельский // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 1. – С. 13–20.

8. О полиномиальных возмущениях уравнения Абеля, не изменяющих отражающей функции / В.А. Бельский, В.И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 79–85.

Гомельский инженерный институт
МЧС Республики Беларусь

Поступила в редакцию 05.02.2015