Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (90), 2015

УДК 517.538.52+517.538.53

О нулях многочленов Эрмита

А.В. Герман, Е.П. Кечко, А.П. Старовойтов

Установлены верхние оценки для модулей нулей многочленов Эрмита (аппроксимаций Эрмита – Паде I типа), системы экспонент $\left\{e^{\lambda_{pk}}\right\}_{p=0}^{k}$, где $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_p$ – произвольные действительные числа. Доказанные утверждения дополняют и обобщают известные результаты Э. Саффа и Р. Варги, Г. Шталя, Ф. Вилонского о поведении нулей многочленов Эрмита для системы экспонент $\left\{e^{pk}\right\}_{p=0}^{k}$.

Ключевые слова: система экспонент, многочлены Эрмита, аппроксимации Эрмита – Паде, нули аппроксимаций Паде.

The upper estimates for modules of the zeros of Hermite polynomials (Hermite – Pade approximation of type I) of the exponential system $\left\{e^{\lambda_{pk}}\right\}_{p=0}^{k}$, where $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_p$ are arbitrary real numbers were established. The proven the statements complement and generalize known results about the behavior of the zeros of Hermite polynomials for exponential system $\left\{e^{pk}\right\}_{p=0}^{k}$ by E. Saff and R. Varga, H. Stahl, F. Wielonsky.

Keywords: exponential system, Hermite polynomials, Hermite – Pad'e approximation, zeros of Pad'e approximation.

Введение. Различают два типа диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде экспоненциальных функций [1]. Один из этих типов (German type – тип II) состоит из совместных рациональных приближений $\pi^j_{kn,kn}(z;e^{j\xi}) = p^j_{kn}(z)/q_{kn}(z)$, $j = 1, 2, \ldots, k$ набора экспонент $\left\{e^{jz}\right\}_{j=1}^{k}$, где многочлены $p^j_{kn}(z)$, $q_{kn}(z)$ имеют степень не выше kn и определяются из условий

$$q_{kn}(z)e^{jz} - p^j_{kn}(z) = O(z^{kn+n+1}),\ z \to 0, \tag{1}$$

Впервые такие конструкции рациональных дробей появились в известной работе Эрмита [2], посвящённой доказательству трансцендентности числа e. Линдеман [3] определил аналоги дробей Эрмита для системы экспонент $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^{k}$, где λ_j – различные алгебраические числа, и применил их, для доказательства трансцендентности числа π. А.И. Аптекаревым [4] была установлена равномерная сходимость рациональных функций $\pi^j_{kn,kn}(z;e^{\lambda_j\xi})$ к функции $e^{\lambda_j z}$ на компактах в $\mathbb{C}$ для систем экспонент $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^{k}$ с произвольными различными и отличными от нуля комплексными показателями λ_j. При $k=1$ этот результат хорошо известен и принадлежит Паде [5].

Немного позже Эрмит [6] ввёл другой тип аппроксимаций (Latin type – тип I), с помощью которых также можно доказать трансцендентность числа e [7]. Для системы экспонент $\left\{e^{pz}\right\}_{p=0}^{k}$ эти аппроксимации совпадают с набором из $k+1$ многочленов $\left\{A_p(z)\right\}_{p=0}^{k}$ степени не выше $n-1$, для которых

$$\sum_{p=0}^{k} A_p(z)e^{pz} = O\left(z^{kn+n-1}\right), \quad z \to 0, \tag{2}$$

где предполагается, что хотя бы один многочлен $A_p(z)$ тождественно не равен нулю.

В одномерном случае общая постановка задачи о нахождении многочленов, удовлетворяющих равенствам (1), (2), принадлежит Паде [5]. В многомерном случае, когда $k \geq 2$, начало интенсивного и систематического изучения аппроксимаций Эрмита – Паде I и II типов для произвольных систем аналитических функций связано с появлением работ К. Малера [1], [7], [8]. Оба типа аппроксимаций, явно различные в многомерном случае, традиционно имеют множество приложений в теории приближений аналитических функций [9]–[12] и в теории диофантовых приближений, в частности для измерения иррациональности [13], в доказательствах трансцендентности [8], в исследованиях алгебраической природы математических констант [14] (о других приложениях см. обзоры [15], [16], [18].

При $k=1$ приходим к классическим аппроксимациям Паде экспоненты. В этом случае многочлены Паде $A_0(z)=-p^1_{n-1}(z)$, $A_1(z)=q_{n-1}(z)$ находятся из условий

$$q_{n-1}(z)e^z - p^1_{n-1}(z) = O\left(z^{2n-1}\right), \tag{3}$$

с точностью до однородной константы. Однородная константа задаётся условиями нормировки, которые однозначно определяют эти многочлены.

Поведение нулей многочленов Тейлора функций, связанных с экспоненциальной функцией, исследовал Г. Сеге [19]. Э. Сафф и Р. Варга [20] изучили расположение нулей аппроксимаций Паде экспоненты и нашли границы кольца, в котором находятся нули её многочленов Паде. В частности, в диагональном случае ими доказано следующее утверждение, известное как «теорема о кольце».

Теорема 1 (Э. Сафф, Р. Варга [20]). *Для любых* $n\geq 2$ *все нули аппроксимаций Паде* p^1_{n-1}/q_{n-1} *функции* e^z *лежат в кольце* $K=\left\{z:2\left(n-1\right)\mu<z<2\left(n-1/3\right)\right\}$, *где* $\mu=0,278465$ – *единственный положительный корень уравнения* $te^{t+1}=1$.

В силу хорошо известного тождества $q_{n-1}(z)=p^1_{n-1}(-z)$, предыдущее утверждение справедливо и для нулей $q_{n-1}(z)$.

Ф. Вилонский [21] получил оценку сверху для модулей нулей многочленов $\left\{A_p(z)\right\}_{p=0}^{k}$, которые определяются равенствами (0.2). Г. Шталь [22] исследовал расположение нулей преобразованных с помощью масштабирования независимой переменной квадратичных диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде I и II типов системы экспонент $\left\{1,\ e^z,\ e^{2z}\right\}$ и показал, что указанные нули лежат на специальных дугах комплексной плоскости.

В данной статье рассматриваются диагональные аппроксимации Эрмита – Паде I типа для системы экспонент $\left\{e^{\lambda_p z}\right\}_{p=0}^{k}$ с произвольными различными действительными показателями $\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_k$. Нас интересует поведение нулей многочленов Эрмита $\left\{A_n^p(z)\right\}_{p=0}^{k}$, имеющих степень не выше $n-1$ и удовлетворяющих условиям

$$\sum_{p=0}^{k} A_n^p(z)e^{\lambda_p z} = O\left(z^{kn+n-1}\right),\ z\to 0, \tag{4}$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 2. *Пусть* $\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_k$ – *произвольные действительные числа. Тогда при* $n\geq 2$, $k\geq 1$ *нули многочлена* $A_n^p(z)$, $0\leq p\leq k$, *лежат в круге* $\left\{z:|z|<R_n^p\right\}$, *где*

$$R_n^p = 2\left(n-1/3\right)\left[\sum\nolimits_{j=1}^{p} 1/\left(\lambda_p-\lambda_{p-j}\right)+\sum\nolimits_{j=1}^{k-p} 1/\left(\lambda_{p+j}-\lambda_p\right)\right]. \tag{5}$$

В случаях, когда $p=0$ *или* $p=k$, *соответственно первая и вторая суммы в скобках равны нулю.*

При $\lambda_p=p$, $p=0,1,\ldots,k$, и $k=1$ из теоремы 1 следует, что все нули многочленов Паде $q_{n-1}(z)$, $p^1_{n-1}(z)$ лежат в круге $\left\{z:|z|<2\left(n-1/3\right)\right\}$, что согласуется с теоремой Э. Саффа и Р. Варги. Если $\lambda_p=p$, $p=0,1,\ldots,k$, и $k\geq 2$, то из (5) в качестве следствия вытекает теорема 2.2 из работы [21] Ф. Вилонского: все нули многочлена $A_p(z)$, лежат в круге $\left\{z:|z|<R_p\right\}$, где $R_p=2\left(n-1/3\right)\left[\sum\nolimits_{j=1}^{p} 1/j+\sum\nolimits_{j=1}^{k-p} 1/j\right]$.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2, заметим, что многочлены $\left\{A_n^p(z)\right\}_{p=0}^{k}$, удовлетворяющие равенствам (0.4), могут быть получены решением линейной системы $kn+n-1$ однородных уравнений с $kn+n$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Более того, такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что искомые многочлены можно представить в виде:

$$A_n^p(z)=\frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i}\int\limits_{C_p}\frac{e^{\xi z}d\xi}{\left[\varphi(\xi)\right]^n},\quad 0\le p\le k, \tag{6}$$

где $\varphi(\xi)=\left(\xi-\lambda_0\right)\left(\xi-\lambda_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\xi-\lambda_k\right)$.

1. Доказательство теоремы 2. В линейном пространстве P, состоящем из всех многочленов, определим линейные операторы $T_\lambda=\lambda I+D$, где λ – произвольное действительное число, I – единичный оператор, а $D=\dfrac{d}{dz}$ – оператор дифференцирования.

Лемма 1. *Любые два оператора* T_{λ_1}, T_{λ_2} *коммутативны, т. е.* $T_{\lambda_1}\cdot T_{\lambda_2}=T_{\lambda_2}\cdot T_{\lambda_1}$.

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из легко проверяемого равенства $T_{\lambda_1}\cdot T_{\lambda_2}(S)=\lambda_1\lambda_2 S+\left(\lambda_1+\lambda_2\right)S'+S''$, $S\in\mathrm{P}$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для произвольного* $\lambda\in\mathbb{R}$ *и* $S\in\mathrm{P}$ *справедливы тождества*

$$D^p\left(e^{\lambda z}\cdot S(z)\right)=e^{\lambda z}\cdot T_\lambda^p\left(S(z)\right),\quad p=1,\,2,\,\ldots\,. \tag{1.1}$$

Доказательство. Так как $D\left(e^{\lambda z}\cdot S(z)\right)=e^{\lambda z}\cdot\left(\lambda S(z)+S'(z)\right)$, то при $p=1$ тождество (1.1) доказано. Далее применим метод индукции. Предположим, что $p\ge 2$ и (1.1) справедливо при $p-1$. Тогда, используя утверждение леммы 1, получаем:

$$D^p\left(e^{\lambda z}\cdot S(z)\right)=D\left[D^{p-1}\left(e^{\lambda z}\cdot S(z)\right)\right]=$$

$$=D\left[e^{\lambda z}\left(\lambda I+D\right)^{p-1}\left(S(z)\right)\right]=e^{\lambda z}\cdot T_\lambda^{p-1}\left(\lambda S(z)+S'(z)\right)=e^{\lambda z}\cdot T_\lambda^{p}\left(S(z)\right).$$

Лемма 2 доказана.

Найдём явный вид обратного оператора к T_λ^m, в случае, когда $m=0,1,2,\ldots$ и $\lambda\ne 0$. Для этого на P определим линейные операторы:

$$A_{\lambda,m}S:=\lambda^{-m}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-m}{j}\frac{D^jS}{\lambda^j},\quad m=0,1,2,\ldots. \tag{1.2}$$

Если $S\in\mathrm{P}$, то правая часть в (1.2) состоит из конечного числа слагаемых. Это следует из того, что при $j>\deg S$ j-ый член ряда в (1.2) равен нулю.

Лемма 3. *При* $\lambda\ne 0$ *и* $m=0,1,2,\ldots$ *обратный оператор для оператора* T_λ^m *существует и если обозначить его через* T_λ^{-m}, *то*

$$T_\lambda^{-m}S:=\lambda^{-m}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\left(-1\right)^j\binom{m-1-j}{m-1}\frac{D^jS}{\lambda^j}. \tag{1.3}$$

Доказательство. При $m=0$ утверждение леммы справедливо, так как в этом случае из определения биномиальных коэффициентов (см. [23], стр. 772) следует, что $T_\lambda^{-m}=I$. Пусть $m\ge 1$. Используя рекуррентную формулу для биномиальных коэффициентов и лемму 1, получаем:

$$A_{\lambda,m}\cdot\left(\lambda I+D\right)S=\lambda A_{\lambda,m}\cdot\left(I+\frac{D}{\lambda}\right)S=$$

$$=\lambda^{-m+1}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-m}{j}\frac{D^jS}{\lambda^j}+\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-m}{j}\frac{D^{j+1}S}{\lambda^{j+1}}\right]=$$

$$=\lambda^{-m+1}\left[S+\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\binom{-m}{j}+\binom{-m}{j-1}\right\}\frac{D^jS}{\lambda^j}\right]=$$

$$=\lambda^{-m+1}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-m+1}{j}\frac{D^jS}{\lambda^j}=A_{\lambda,m-1}S\,.$$

Таким образом, $A_{\lambda,m}\cdot T_\lambda=A_{\lambda,m-1}$. Поэтому справедливы равенства

$$\left(A_{\lambda,m}\cdot T_\lambda^m\right)S=A_{\lambda,m}\cdot T_\lambda\cdot T_\lambda^{m-1}(S)=\left(A_{\lambda,m-1}\cdot T_\lambda^{m-1}\right)S=\ldots=A_{\lambda,0}S=S\,.$$

Отсюда следует, что оператор $A_{\lambda,m}$ является левым обратным к T_λ^m. Поскольку, согласно лемме 1, эти операторы коммутативны, то $A_{\lambda,m}$ является и правым обратным к оператору T_λ^m.

Для биномиальных коэффициентов справедливо равенство

$$\binom{-m}{j}=(-1)^j\binom{m-1+j}{j}=(-1)^j\binom{m-1+j}{m-1}.$$

Поэтому из равенства (1.2) следует, что оператор T_λ^{-m} можно представить в виде (1.3). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *При $n\geq 2$ многочлены Паде q_{n-1}, p_{n-1} можно нормировать так, что*

$$q_{n-1}(z)=p_{n-1}(-z)=T_1^{-n}(z^{n-1})=$$
$$=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1-j}{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-1-j)!}z^{n-1-j}\,, \tag{1.4}$$

Доказательство. Дифференцируя равенство (3) n раз, с учётом леммы 2, получим:

$$e^zT_1^n\left(q_{n-1}(z)\right)=c_n(2n-1)(2n-2)\cdot\ldots\cdot nz^{n-1}+\ldots.$$

Отсюда, так как $e^{-z}=1-z+\ldots$,

$$T_1^n\left(q_{n-1}(z)\right)=c_n(2n-1)(2n-2)\cdot\ldots\cdot nz^{n-1}+\ldots, \tag{1.5}$$

Слева в (1.5) стоит многочлен степени не выше $n-1$. Поэтому

$$T_1^n\left(q_{n-1}(z)\right)=c_n(2n-1)(2n-2)\cdot\ldots\cdot nz^{n-1}.$$

Выбирая условия нормировки многочлена $q_{n-1}(z)$ так, чтобы $c_n=\left((2n-1)(2n-2)\cdot\ldots\cdot n\right)^{-1}$, и учитывая линейность оператора T_1^n, получим, что $T_1^n\left(q_{n-1}(z)\right)=z^{n-1}$. Теперь для завершения доказательства достаточно воспользоваться леммой 3. Лемма 4 доказана.

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы 2. Сначала найдём новое представление для многочлена $A_n^p(z)$. Для этого разделим равенство (4) на $e^{\lambda_0 z}$ и затем продифференцируем n раз. С учётом леммы 2, получим:

$$e^{(\lambda_k-\lambda_0)z}T^n_{\lambda_k-\lambda_0}\left(A_n^k(z)\right)+\ldots+e^{(\lambda_1-\lambda_0)z}T^n_{\lambda_1-\lambda_0}\left(A_n^1(z)\right)=O\left(z^{kn-1}\right).$$

Разделим предыдущее равенство на $e^{(\lambda_1-\lambda_0)z}$ и затем продифференцируем n раз. В результате приходим к равенству

$$e^{(\lambda_k-\lambda_1)z}T^n_{\lambda_k-\lambda_1}T^n_{\lambda_k-\lambda_0}\left(A_n^k(z)\right)+\ldots+e^{(\lambda_2-\lambda_1)z}T^n_{\lambda_2-\lambda_1}T^n_{\lambda_2-\lambda_0}\left(A_n^2(z)\right)=O\left(z^{(k-1)n-1}\right).$$

Повторяя указанную последовательность действий ещё $p-2$ раз, получим, что

$$e^{(\lambda_k-\lambda_{p-1})z}T^n_{\lambda_k-\lambda_{p-1}}\cdots T^n_{\lambda_k-\lambda_1}T^n_{\lambda_k-\lambda_0}\left(A_n^k(z)\right)+\ldots$$
$$+e^{(\lambda_p-\lambda_{p-1})z}T^n_{\lambda_p-\lambda_{p-1}}\cdots T^n_{\lambda_p-\lambda_1}T^n_{\lambda_p-\lambda_0}\left(A_n^p(z)\right)=O\left(z^{(k-p+1)n-1}\right).$$

Разделим теперь предыдущее равенство на $e^{(\lambda_k-\lambda_{p-1})z}$ и продифференцируем n раз. Повторив эту процедуру ещё $k-p-1$ раз, придём к окончательному соотношению:

$$T^n_{-(\lambda_{p+1}-\lambda_p)}\cdots T^n_{-(\lambda_k-\lambda_p)}T^n_{\lambda_p-\lambda_{p-1}}\cdots T^n_{\lambda_p-\lambda_1}T^n_{\lambda_p-\lambda_0}\left(A^p_n(z)\right)=O(z^{n-1}).$$

Так как в левой части предыдущего равенства стоит многочлен степени не выше $n-1$, то $T^n_{-(\lambda_{p+1}-\lambda_p)}\cdots T^n_{-(\lambda_k-\lambda_p)}T^n_{\lambda_p-\lambda_{p-1}}\cdots T^n_{\lambda_p-\lambda_1}T^n_{\lambda_p-\lambda_0}\left(A^p_n(z)\right)=c_p z^{n-1}$. Отсюда, с учётом леммы 3, следует, что

$$A^p_n(z)=c_pT^{-n}_{\lambda_p-\lambda_0}T^{-n}_{\lambda_p-\lambda_1}\cdots T^{-n}_{\lambda_p-\lambda_{p-1}}T^{-n}_{-(\lambda_k-\lambda_p)}\cdots T^{-n}_{-(\lambda_{p+1}-\lambda_p)}z^{n-1}, \tag{1.6}$$

Далее воспользуемся следующей теоремой Уолша (см. [24], гл. 4, § 18, теорема 18.1).

Теорема 3 (Уолш). *Пусть* $f(z)=\sum_{j=0}^{n}a_jz^j$, $g(z)=\sum_{j=0}^{n}b_jz^j=b_n\prod_{j=1}^{n}(z-\beta_j)$, *и*

$$h(z)=\sum_{j=0}^{n}(n-j)!\,b_{n-j}f^{(j)}(z).$$

Тогда, если нули $f(z)$ *лежат в круге* U*, то все нули* $h(z)$ *являются точками множества* G*, которое состоит из* n *кругов* U_j, $j=1,2,\ldots,n$*, где круг* U_j *получен параллельным переносом* U *в направлении вектора* β_j *на величину, равную длине вектора* β_j.

Пусть S_{n-1} – произвольный многочлен степени не выше $n-1$. Принимая во внимание равенство (1.3), нетрудно заметить, что функции

$$f(z)=S_{n-1}(z),\quad h(z)=T^{-n}_{\lambda}\left(S_{n-1}(z)\right),\quad \lambda\neq 0,$$

$$g(z)=\sum_{j=0}^{n-1}b_{n-1-j}z^{n-1-j}=\lambda^{-n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j}{(n-1-j)!}\binom{n-1-j}{n-1}\frac{z^{n-1-j}}{\lambda^j}$$

удовлетворяют условиям теоремы Уолша. Кроме того, если сравнить предыдущее равенство для многочлена $g(z)$ и равенство (1.4), то легко обнаружить, что $g(z)=\dfrac{\lambda^{-2n+1}}{(n-1)!}q_{n-1}(\lambda z)$.

Из теоремы 1 следует, что нули $q_{n-1}(\lambda z)$ по модулю меньше $2(n-1/3)/|\lambda|$. Согласно теореме Уолша, нули $h(z)=T^{-n}_{\lambda}\left(S_{n-1}(z)\right)$ по модулю меньше $\rho+2(n-1/3)/|\lambda|$, где ρ – радиус круга с центром в нуле, который содержит все нули $S_{n-1}(z)$.

Применим предыдущее утверждение для $S_{n-1}(z)=z^{n-1}$ и $h(z)=T^{-n}_{-(\lambda_{p+1}-\lambda_p)}\left(z^{n-1}\right)$. Тогда нули $h(z)$ по модулю меньше $2(n-1/3)\dfrac{1}{\lambda_{p+1}-\lambda_p}$.

Далее, полагая $S_{n-1}(z)=T^{-n}_{-(\lambda_{p+1}-\lambda_p)}\left(z^{n-1}\right)$, а $h(z)=T^{-n}_{-(\lambda_{p+2}-\lambda_p)}\left(S_{n-1}(z)\right)$, ещё раз применим предыдущее утверждение. Тогда нули $h(z)$ по модулю меньше

$$2(n-1/3)\left[\frac{1}{\lambda_{p+2}-\lambda_p}+\frac{1}{\lambda_{p+1}-\lambda_p}\right].$$

Далее, опираясь на равенство (1.6) и продолжая аналогичные рассуждения, после конечного числа шагов получим, что нули полинома A^p_n по модулю меньше

$$2(n-1/3)\left[\sum\nolimits_{j=1}^{p}1/(\lambda_p-\lambda_{p-j})+\sum\nolimits_{j=1}^{k-p}1/(\lambda_{p+j}-\lambda_p)\right].$$

Теорема 2 доказана.

2. Иллюстрирующий пример. Согласно теореме 2 нули многочленов Эрмита A^p_n лежат в круге с центром в нуле, радиус которого R^p_n зависит как от степени многочлена, так и от взаимного расположения показателей $\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_k$ системы экспонент. В связи с этим представляет интерес вопрос о точности полученной в теореме 2 верхней оценки для модулей нулей A_n^p в случае, когда число n – фиксировано, а расстояние между соседними членами последовательности $\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$ является сколь угодно малой величиной.

Представление многочленов A_n^p с помощью интегралов в виде (6) позволяет при $n = 2, 3, 4$ найти точные значения всех нулей A_n^p. Ограничимся случаями, когда $n = 3$.

Две бесконечно большие при $\varepsilon \to a$ неотрицательные функции $\varphi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)$ имеют одинаковый порядок ($\varphi(\varepsilon) \succ\prec \psi(\varepsilon)$), если $\lim_{\varepsilon\to a} \varphi(\varepsilon)/\psi(\varepsilon) = A$, где $0 < A < +\infty$.

Рассмотрим систему экспонент $\left\{e^{\lambda_p z}\right\}_{p=0}^{3}$, где $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1-\varepsilon$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1+\varepsilon$, а $0 < \varepsilon < 1$. Пусть $z_j^p(\varepsilon)$ – нули многочлена A_n^p, $r_n^p(\varepsilon) := \max\left\{z_j^p(\varepsilon) : j = 1, 2, \ldots, n-1\right\}$, а $R_n^p(\varepsilon)$ – радиус соответствующего круга, который определяется равенством (0.5). С помощью элементарных вычислений при $\varepsilon \to 0$ получаем, что $r_3^p(\varepsilon) \succ\prec R_3^p(\varepsilon) \succ\prec \dfrac{1}{\varepsilon}$, для $p = 1, 2, 3$,

$\sqrt{90} \leftarrow r_3^0(\varepsilon) < R_3^0(\varepsilon) = (16/3)\left(1 + 2\big/\left(1-\varepsilon^2\right)\right)$.

При $\varepsilon \to 1$ $r_3^p(\varepsilon) \succ\prec R_3^p(\varepsilon) \succ\prec \dfrac{1}{1-\varepsilon}$, для $p = 0, 1$, $\sqrt{13} \leftarrow r_3^2(\varepsilon) < R_3^2(\varepsilon) = (16/3)\left(1 + 2/\varepsilon\right)$,

$\sqrt{582}\big/4 \leftarrow r_3^3(\varepsilon) < R_3^3(\varepsilon) = (16/3)\left(1\big/(1+\varepsilon) + 3\big/(2\varepsilon)\right)$.

Данный пример показывает, что для рассматриваемой в нём систем экспонент при $n = 3$, полученные в теореме 2 неравенства для модулей нулей, соответствующих многочленов Эрмита, являются точными в смысле порядка при $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon \to 1$).

Литература

1. Mahler, K. Perfect systems / K. Mahler // Comp. Math. – 1968. – V. 19. – P. 95–166.
2. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci.(Paris) – 1873. – V. 77. – P. 18–293.
3. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей / Ф. Клейн. – М. : Наука, 1933. – Т. 1. – 432 с.
4. Аптекарев, А.И. О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.
5. Pade, H. Memoire sur les developpements en fractions continues de la fonctial exponential / H. Pade // Ann. École Norm. Sup. Paris. – 1899. – V. 16, № 3. – P. 394–426.
6. Hermite, C. Sur la généralisation des fractions continues algébriques / C. Hermite // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A – 1883. – V. 21. – P. 289–308.
7. Mahler, K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1931. – V. 166. – P. 118–150.
8. Mahler, K. Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms / K. Mahler // Math. Ann. – 1967. – V. 168. – P. 200–227.
9. Boyd, J. Chebyshev expansion on intervals with branch points with application to the root of Kepler's equation: a Chebyshev – Hermite – Pade method / J. Boyd // J. of Comput. and Appl. Math.– 2009. – V. 223, № 2. – P. 693–702.
10. Beckermann, B. How well does the Hermite – Pade approximation smooth the Gibbs phenomenon / B. Beckermann, V. Kalyagin, Ana C. Matos, F. Wielonsky // Math. Comput. – 2011. – V. 80, № 274. – P. 931–958.
11. Сорокин, В. Н. Циклические графы и теорема Апери / В.Н. Сорокин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 3 – С. 99–134.
12. Van Assche, W. Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation (University of Missouri-Columbia, Columbia, MO, USA, 1998) / W. Van Assche // Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 1999. – V. 236. – P. 325–342.
13. Chudnovsky, G.V. Hermite – Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π, in «Lecture Notes in Math» / G.V. Chudnovsky. – New York/Berlin : Springer-Verlag,1982. – P. 299–322.

14. Аптекарев, А.И. Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения : сборник статей / А.И. Аптекарев (ред.) – М. : МИАН, 1988. – Т. 9. – 272 с.

15. Aptekarev, A.I. Asymptotics of Hermite – Padé polynomials, in «Progress in Approximation Theory» (A.A. Gonchar and E.B. Saff, Eds.) / A.I. Aptekarev, H. Stahl. – New York/Berlin : Springer-Verlag, 1992. – P. 127–167.

16. Аптекарев, А.И. Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402) – С. 37–122.

17. Калягин, В.А. Аппроксимации Эрмита – Паде и спектральный анализ несимметричных операторов / В.А. Калягин // Матем. сборник. – 1994. – Т. 185, № 6. – С. 79–100.

18. Суетин, С.П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П .Суетин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 1 – С. 45–142.

19. Szegö, G. Über eienige Eigenschaften der Exponentialreihe / G. Szegö // Sitzunggsberichte Berliner Math. Ges. – 1924. – № 23. – P. 50–64.

20. Saff, E. On the zeros and poles of Pade approximations to e^z, II, in «Pade and Rational Approximations: Theory and Applications» (E.B. Saff and R.S. Varga,Eds.) / E. Saff, R. Varga. – New York : Academic Press, 1977.

21. Wielonsky, F. Asymptotics of Diagonal Hermite – Padé Approximants to e^z / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 1997. – V. 90, № 2. – P. 283–298.

22. Stahl, H. Asymptotics for quadratic Hermite – Padé polynomals associated with the exponential function/ H. Stahl // Electronic Trans. Num. Analit. – 2002. – № 14. – P. 193–220.

23. Прудников, А.П. Интегралы и ряды /А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М. : Наука, 1981. – 800 с.

24. Morden, M. Geometry of Polynomials / M. Morden. – Providence, American Mathematical Society, 1966. – 574 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 16.02.2015