Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (90), 2015

УДК 512.542

Класс π-замкнутых инъекторов конечных групп

В.И. Гойко

Дёрк и Хоукс доказали, что в произвольной конечной группе для произвольного класса Фиттинга инъекторов не существует. В связи с этим обстоятельством появились работы, в которых доказано существование инъекторов в частично разрешимых группах и в произвольных конечных группах для некоторых специальных классов групп. Так, например, Блессеногль и Лауэ доказали существование (и сопряженность) квазинильпотентных инъекторов в произвольной конечной группе. В данной работе доказано существование инъекторов в конечных группах с π-разрешимым X-корадикалом для класса всех конечных π-замкнутых групп X (здесь $\pi = \pi(\mathrm{X})$) и исследованы основные свойства X-инъекторов.

Ключевые слова: группа, подгруппа, класс Фиттинга, формация, инъектор, главный фактор, силовская подгруппа.

Doerk and Hawkes proved that in arbitrary finite groups for arbitrary class of Fitting the injectors don't exist. Due to this fact there were works which proved the existence of injectors in partially solvable groups and arbitrary finite groups for some special classes of groups. For example, Blessenogl and Laue proved the existence (and contingency) of quasinilpotent injectors in an arbitrary finite group. In the present paper the existence of the injectors in the finite groups with π-solvable X-coradical for the class of all finite π-closed X groups (here $\pi = \pi(\mathrm{X})$) are proved and the basic properties of the X-injectors are investigated.

Keywords: group, subgroup, class of Fitting, formation, injector, main factor, Sylov's subgroup.

Класс инъекторов в конечных разрешимых группах был введен в [1]. В [2] доказано, что для произвольного класса Фиттинга в произвольной конечной группе инъекторов не существует. В связи с этим появился большой интерес к задаче поиска инъекторов в частично разрешимых группах и π-разрешимых группах [3], [4], а также в произвольных конечных группах для специальных классов групп (классов Фиттинга). В [5] установлено существование и сопряжённость квазинильпотентных инъекторов в произвольных конечных группах. Другие интересные результаты в этом направлении [6]–[11].

Группа G называется π-замкнутой, если G имеет нормальную S_π-подгруппу (S_π-подгруппа – это π-холловская подгруппа, другое обозначение G_π). Остальные необходимые определения [2], [12], [13].

Лемма 1 [12]. Класс всех π-замкнутых групп – локальная формация.

Лемма 2. Класс всех π-замкнутых групп является S-замкнутым классом Фиттинга.

Доказательство тривиально осуществляется проверкой условий в определении класса Фиттинга.

В силу лемм 1 и 2 класс всех π-замкнутых групп – радикальная формация.

Теорема 1. Пусть X – класс всех π-замкнутых групп, $\pi = \pi(\mathrm{X})$. Тогда в конечной группе с π-разрешимым X-корадикалом существует X-инъектор.

Доказательство. Для случая, когда $G \in \mathrm{X}$, утверждение теоремы выполняется очевидным образом. Пусть $G \notin \mathrm{X}$. Возьмем в группе G произвольную (собственную) максимальную нормальную подгруппу N. Если $N = 1$, то G – простая группа. В этом случае либо $G^{\mathrm{X}} = 1$, либо $G^{\mathrm{X}} = G$. Если $G^{\mathrm{X}} = 1$, то получаем противоречивое включение: $G \in \mathrm{X}$. Пусть $G^{\mathrm{X}} = G$. Из последнего равенства вытекает, что $G \in \mathrm{S}^{\pi}$. Т. к. (в силу допущения) G – простая группа, то ясно, что G является π'-группой. В этом случае <1> является X-инъектором группы G. Пусть $N \neq <1>$. Т. к. $G/G^{\mathrm{X}} \in \mathrm{X}$, то $NG^{\mathrm{X}}/G^{\mathrm{X}} \in \mathrm{X}$. В силу $NG^{\mathrm{X}}/G^{\mathrm{X}} \cong N/N \cap G^{\mathrm{X}}$ получим, что $N/N \cap G^{\mathrm{X}} \in \mathrm{X}$. Отсюда следует, что $N^{\mathrm{X}} \subseteq G^{\mathrm{X}}$, $N^{\mathrm{X}} \in \mathrm{S}^{\pi}$. В силу индукции в группе N существует X-инъектор D. Пусть R – такая X-максимальная подгруппа в G, что выполняется включение: $D \subseteq R$. Очевидно, что $D \subseteq R \cap N$. Так как $R \cap N \lhd R \in \mathrm{X}$, то

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$R\bigcap N\in \mathsf{X}$. Ясно, что $D=R\bigcap N$, т. е. пересечение подгруппы *R* с произвольной максимальной нормальной подгруппой группы *G* является Х-инъектором в этой нормальной подгруппе. Пусть *S* – произвольная субнормальная подгруппа в *G*. *S* входит в некоторую максимальную нормальную подгруппу группы *G*. Без ограничения общности считаем, что $S\subseteq N$. Так как $R\bigcap N$ − Х-инъектор в $\pi=\pi(\mathsf{X})$ N и $S\subseteq N$, то $R\bigcap N\bigcap S\in \mathsf{X}$ и $R\bigcap N\bigcap S$ является Х-максимальной подгруппой в *S*. В силу равенства $R\bigcap N\bigcap S=R\bigcap S$ справедливо, что $R\bigcap S$ − Х-максимальная подгруппа в *S*. Значит, *R* – Х-инъектор в *G*. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть *G* − группа с π-разрешимым Х-корадикалом, $\pi=\pi(\mathsf{X})$, Х − класс всех π-замкнутых групп. Справедливы утверждения:

1) если *W* – Х-максимальная подгруппа в коммутанте G', V_1 и V_2 являются Х-максимальными подгруппами в G такими, что $W\subseteq V_1\bigcap V_2$, то V_1 и V_2 сопряжены в G;

2) любые два Х-инъектора группы G сопряжены в G;

3) подгруппа *H* группы *G* является Х-инъектором группы G тогда и только тогда, когда *H* есть Х-максимальная подгруппа в *G* и $H\bigcap G'$ есть Х-инъектор в группе G';

4) если $N\lhd G, LN=G,$ $L\in \mathsf{X},$ $L\bigcap N$ есть Х-инъектор в группе N, то L − Х-инъектор в группе G.

Доказательство. Будем доказывать все четыре утверждения одновременно. Пусть группа *G* – контрпример минимального порядка, для которого хотя бы одно утверждение не выполняется. Так как для $G=1$ все четыре утверждения справедливы, то считаем, что $G\neq 1$. Поскольку при условии $G\in \mathsf{X}$ также все четыре утверждения выполняются, то полагаем, что $G\notin \mathsf{X}$. Отметим, что при $G'=1$ получаем противоречивое включение $G\in \mathsf{X}$. В связи с этим считаем в дальнейшем, что $G'\neq 1$. Предположим, что *G* – простая группа. В этом случае либо $G^{\mathsf{X}}=1$, либо $G^{\mathsf{X}}=G$. Если $G^{\mathsf{X}}=1$, то приходим к противоречивому включению $G\in \mathsf{X}$. Значит, $G^{\mathsf{X}}=G$. В этом случае *G* является π-разрешимой группой. Т. к., кроме того, *G* – простая группа, то *G* есть π'-группа. Значит, $W=1,$ $V_1=V_2=1,$ $H=1$ и $L=1$. Утверждения 1, 2, 3, 4 выполняются очевидным образом.

Пусть *G* – не простая группа. Рассмотрим два случая: $G'=G$ и $G'\subset G$.

$G'=G$. Ясно, что утверждения 1 и 3 выполняются очевидным образом. Докажем утверждение 2. Предположим, что $G^{\mathsf{X}}\subset G$. Так как $G/G^{\mathsf{X}}\in \mathsf{X}$, то в силу определения класса Х получим, что в фактор-группе G/G^{X} существует нормальная π-холловская подгруппа H/G^{X}. Допустим, что $H\neq G^{\mathsf{X}}$ и $H/G^{\mathsf{X}}\subset G/G^{\mathsf{X}}$. В этом случае $(G/G^{\mathsf{X}})/(H/G^{\mathsf{X}})$ есть π'-группа. Следовательно, $(G/G^{\mathsf{X}})/(H/G^{\mathsf{X}})\notin \mathsf{X}$. С другой стороны, так как $G/G^{\mathsf{X}}\in \mathsf{X}$ и Х − формация, то $(G/G^{\mathsf{X}})/(H/G^{\mathsf{X}})\in \mathsf{X}$. Противоречие. Допустим, что выполняется равенство: $H=G^{\mathsf{X}}$ и $G^{\mathsf{X}}\subset G$. Тогда G/G^{X} является π'-группой. Но это противоречит тому, что $G/G^{\mathsf{X}}\in \mathsf{X}$. Пусть теперь $H\neq G^{\mathsf{X}},$ $H=G$. Отсюда следует, что G/G^{X} является π-группой. Так как $G'=G$ (по допущению) и $G^{\mathsf{X}}\in \mathsf{S}^{\pi}$, то G^{X} есть π'-группа. Ясно, что G^{X} есть π'-холловская подгруппа. Т. к. $(|G^{\mathsf{X}}|,|G/G^{\mathsf{X}}|)=1$, то в силу теоремы 18.3 из [14, ч.1] G^{X} дополняема в *G*, т. е. в *G* существует подгруппа *R*, которая является π-холловской подгруппой в *G*. Пусть D − X-нормализатор группы *G*. Так как G^{X} − π'-группа, то $D\bigcap G^{\mathsf{X}}=1$. В силу следствия 21.1.1 из [12] получаем, что $DG^{\mathsf{X}}=G$. Кроме того, ясно, что $D^x\subseteq R$, $x\in G$. Так как *D* и *R* имеют одинаковое свойство покрытия-изолирования *G*-главных факторов, то $D^x=R$, т. е. D^x − π-холловская подгруппа в *G*. Возьмем теперь X-инъектор *V* в группе *G*. Т.к. $V\in \mathsf{X}$, то $V\subseteq D^y$, $y\in G$. Без ограничения общности считаем, что $V\subseteq D$. Поскольку *V* – X-максимальная подгруппа в *G*, то $V=D$, т. е *V* – X-нормализатор в группе *G*. Утверждение 2 теоремы 2 теперь вытекает из теоремы 21.4 из [12]. Докажем утверждение 4 в этом случае. Возьмём X-нормализатор X группы G. Учитывая свойство покрытия-изолирования G-главных факторов подгруппой

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

X (следствие 21.1.1 из [12]), получим равенства: $X \cap G^{\mathfrak{X}} = 1$, $XG^{\mathfrak{X}} = G$. Отсюда следует, что X есть π-холловская подгруппа в G. Значит, $L \subseteq X^a$, $a \in G$. Т. к. L – $\mathfrak{X}$-максимальная подгруппа в G, то $L = X^a$, $a \in G$. В силу теоремы 21.4 из [12] L есть $\mathfrak{X}$-нормализатор G. Возьмём Х-инъектор V группы G. Ясно, что $V \subseteq L^x$, $x \in G$. Т. к. V – Х-максимальная подгруппа группы G, то $V = L^x$. Отсюда следует, что $L = V^y$, $y \in G$, $y = x^{-1}$. Следовательно (с применением пункта 2 теоремы 2), L есть Х-инъектор группы G. Утверждение 4 в этом случае справедливо. В случае выполнения равенства $G^{\mathfrak{X}} = G$ утверждение очевидно.

$G' \subset G$. Докажем утверждение 1. Напомним, что $G \notin \mathfrak{X}$. Допустим, что $G' \in \mathfrak{X}$. В силу определения подгруппы W получим, что $W = G'$ и $G' \subseteq V_i$, $i = 1, 2$. Следовательно, $V_i \lhd G$, $i = 1, 2$. Возьмем Х-инъектор F в группе G. Ясно, что $F \cap V_i$ − Х-инъектор в V_i, $i = 1, 2$. Так как $V_i \in \mathfrak{X}$, то $F \cap V_i = V_i$, $V_i \subseteq F$. Учитывая тот факт, что V_i − Х-максимальные подгруппы в G, из последнего включения следует, что $V_i = F$, $i = 1, 2$. Теперь очевидно, что $V_1 = V_2$. Рассмотрим теперь случай, когда $G' \notin \mathfrak{X}$. Поскольку $W \subseteq V_i \cap G'$, $V_i \cap G' \in \mathfrak{X}$ и W – Х-максимальная подгруппа в группе $V_i \cap G'$, $i = 1, 2$, то справедливо равенство:

$$W = V_i \cap G' \tag{1}$$

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. $W \lhd G$. Покажем, что подгруппы V_i являются Х-инъекторами группы G, $i = 1, 2$. В самом деле, пусть F – Х-инъектор в группе G. Так как $W \lhd G$, то $F \cap W$ есть $\mathfrak{X}$-инъектор в группе $W \in \mathfrak{X}$, $F \cap W = W$. Отсюда следует, что $W \subseteq F \cap G'$. В силу того, что W является Х-максимальной подгруппой группы G', получим равенство: $W = F \cap G'$. Следовательно, W – Х-инъектор в группе G'. Теперь с учетом (1) получим следующие равенства:

$$W = F \cap G' = V_1 \cap G' = V_2 \cap G' \tag{2}$$

Рассмотрим возможные подслучаи.

1.1. $V_1 G' \subset G$. Покажем сначала, что V_1 есть Х-инъектор в группе $V_1 G'$. Т. к. $F \cap G' = V_1 \cap G'$, то справедливо, что $V_1 \cap G'$ − Х-инъектор в группе G'. Поскольку $(V_1 G')' \lhd V_1 G'$ и $(V_1 G')' \subseteq G'$, то $V_1 \cap G' \cap (V_1 G')'$ − Х-инъектор в группе $(V_1 G')'$. В силу равенства $V_1 \cap G' \cap (V_1 G')' = V_1 \cap (V_1 G')'$ получаем, что $V_1 \cap (V_1 G')'$ есть Х-инъектор в группе $(V_1 G')'$. Кроме того, V_1 – Х-максимальная подгруппа в группе $V_1 G'$. Из соотношений $V_1 G' / V_1 G' \cap G^{\mathfrak{X}} \cong (V_1 G')G^{\mathfrak{X}} / G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$ следует, что $(V_1 G')^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{S}^{\pi}$. По индукции (с применением пункта 3 теоремы 2) V_1 есть Х-инъектор в группе $V_1 G'$. Далее, т. к. $V_1 G' \cap F$ есть Х-инъектор в группе $V_1 G'$, то по индукции подгруппы V_1 и $V_1 G' \cap F$ сопряжены: $V_1^a = V_1 G' \cap F$, $a \in V_1 G'$. Отсюда следует, что $V_1^a \subseteq F$. Т.к. V_1^a − Х-максимальная подгруппа в группе G, то $V_1^a = F$. Значит, V_1^a − Х-инъектор в группе G. Пусть M − произвольная (собственная) максимальная нормальная подгруппа в группе G. Тогда $V_1^a \cap M$ − Х-инъектор в группе M. Следовательно, $V_1 \cap M$ − Х-инъектор в группе M. Отсюда следует, что V_1 − Х-инъектор в группе G. Покажем теперь, что подгруппа V_2 Х-инъектор группы G. Предположим, что $V_2 G' = G$. В группе G возьмём такую максимальную нормальную подгруппу H, чтобы выполнялось включение: $V_1 G' \subseteq H$. Если $H \in \mathfrak{X}$, то $V_1 G' \in \mathfrak{X}$. С учётом того, что V_1 − Х-максимальная подгруппа в группе $V_1 G'$, получим равенство: $V_1 G' = V_1$. Отсюда следует, что $G' \subseteq V_1$. Значит, $G' = V_1 \cap G' = W \subseteq V_2$. Отсюда следует, что $V_2 = V_2 G'$. Т. к. (по допущению) $V_2 G' = G$, то $G = V_2 \in \mathfrak{X}$. Противоречие. Значит, $H \notin \mathfrak{X}$. Легко заметить, что V_1 есть Х-инъектор в группе H. Покажем, что подгруппа $V_2 \cap H$ является Х-инъектором в H. В самом деле, используя равенства $(V_2 \cap H)G' = H \cap V_2 G' = H$, $V_2 \cap H \cap G' = V_2 \cap G' = W$ (т. е.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$V_2 \cap H \cap G'$ − X-инъектор в группе G'), включение $V_2 \cap H \in \mathfrak{X}$ и индуктивные рассуждения, заключаем (в силу пункта 4 теоремы 2), что $V_2 \cap H$ − X-инъектор в группе H. (Заметим, что $H^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{S}^{\pi}$). По индукции (с применением пункта 2 теоремы 2): $V_2^b \cap H = V_1, b \in H$. Отсюда следует, что $V_1 \subseteq V_2^b$. Ясно, что $V_1 = V_2^b$. Значит, V_2^b − X-инъектор в группе G. Легко показать, что V_2 − X-инъектор в группе G.

Полагаем теперь, что $V_2 G' \subset G$. В этом случае, если провести аналогичные рассуждения для подгруппы V_2, как в предыдущем абзаце для V_1, то получим, что V_2 − X-инъектор в группе G.

Так как $V_1 G' \lhd G$, то $V_2 \cap V_1 G'$ − X-инъектор в группе $V_1 G'$. (Заметим, что из соотношений $V_1 G'/V_1 G' \cap G^{\mathfrak{X}} \cong (V_1 G')G^{\mathfrak{X}}/G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$ следует включение $(V_1 G')^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{S}^{\pi}$). В силу индуктивных рассуждений (с применением пункта 2 теоремы 2) получим, что V_1 и $V_2 \cap V_1 G'$ сопряжены в группе $V_1 G'$, т. е. $V_1 = V_2^x \cap V_1 G'$, $x \in V_1 G'$. Отсюда следует, что $V_1 \subseteq V_2^x$. Значит, с учетом того, что V_1 − X-максимальная подгруппа в группе *G*, получим равенство: $V_1 = V_2^x$, $x \in G$.

1.2. Рассмотрим теперь случай, когда для всех $i = 1, 2$ справедливо равенство

$$V_i G' = G, \tag{3}$$

Возьмем простое $p \in \pi(V_1)$. Поскольку $G' \subseteq V_{1p} G'$, то $V_{1p} G' \lhd G$ (через V_{1p} обозначили силовскую *p*-подгруппу группы V_1).

Допустим, что имеет место строгое включение

$$V_{1p} G' \subset G, \tag{4}$$

Предположим сначала, что $V_{1p} W$ − не нормальная подгруппа в группе *G*. Отсюда следует, что $N_G(V_{1p} W) \subset G$. В группе *G* возьмём такую максимальную нормальную подгруппу *H*, чтобы выполнялось включение: $V_{1p} G' \subseteq H$ (очевидно, что $H \notin \mathfrak{X}$). Рассмотрим следующие равенства: $(V_2 \cap H)G' = H \cap V_2 G' = H$, $V_2 \cap H \cap G' = V_2 \cap G' = W$. По индукции (с использованием пункта 4 теоремы 2) получим, что $V_2 \cap H$ есть X-инъектор группы *H*. Далее, т. к. $V_{1p} G' \lhd H$, то $V_2 \cap H \cap V_{1p} G' = V_2 \cap V_{1p} G'$ есть X-инъектор в группе $V_{1p} G'$. Аналогично рассуждая, можно показать, что подгруппа $V_1 \cap V_{1p} G'$ − X-инъектор в группе $V_{1p} G'$. Применяя формулу (1) и тождество Дедекинда, получим равенство: $V_{1p} W = V_{1p} (V_1 \cap G') = V_1 \cap V_{1p} G'$. Значит, $V_{1p} W$ − X-инъектор в группе $V_{1p} G'$. (Заметим, что $(V_{1p} G')^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{S}^{\pi}$). По индукции (с применением пункта 2 теоремы 2) получим сопряженность X-инъекторов в группе $V_{1p} G'$: $V_2^a \cap V_{1p} G' = V_{1p} W$, $a \in V_{1p} G'$. Отсюда следует включение: $V_{1p} \subseteq V_2^a$. Так как $V_{1p} W = V_1 \cap V_{1p} G'$, то $V_{1p} W \lhd V_1$. Значит, $V_1 \subseteq N_G(V_{1p} W)$. Применяя тождество Дедекинда, получим следующие соотношения: $V_{1p} W = V_{1p}(V_2^a \cap G') = V_2^a \cap V_{1p} G'$, $V_2^a \subseteq N_G(V_{1p} W)$. Далее, т. к. *W* есть X-инъектор в группе G' и $(N_G(V_{1p} W))' \lhd G'$, то подгруппа $\overline{W} = W \cap (N_G(V_{1p} W))'$ есть X-инъектор в группе $(N_G(V_{1p} W))'$. Значит, $\overline{W}$ − X-максимальная подгруппа в группе $(N_G(V_{1p} W))'$. По индукции (с применением пункта 2 теоремы 2) подгруппы V_1 и V_2^a сопряжены в группе $N_G(V_{1p} W)$. Отсюда следует, что V_1 и V_2 сопряжены в группе *G*.

Полагаем теперь, что $V_{1p} W \lhd G$. В силу индукции X-инъекторы $V_2 \cap V_{1p} G'$ и $V_1 \cap V_{1p} G' = V_{1p}(V_1 \cap G') = V_{1p} W$ сопряжены в группе $V_{1p} G'$. Значит, в силу того, что $V_{1p} W \lhd G$, эти инъекторы совпадают: $V_2 \cap V_{1p} G' = V_{1p} W$. Отсюда следует, что $V_{1p} \subseteq V_2$ и, следовательно, справедливо включение:

$$V_{1p} \subseteq V_{2p}, \tag{5}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Символ V_{2p} обозначает силовскую p-подгруппу группы V_2.

Если допустить, что для всех простых $p \in \pi(V_1)$ справедливо включение (4), то отсюда следует включение (5) для всех простых $p \in \pi(V_1)$. Значит, $V_1 \subseteq V_2$. В силу того, что V_2 является X-максимальной подгруппой в группе G, получим равенство $V_1 = V_2$. Пусть существует такое простое $p \in \pi(V_1)$, что выполняется равенство $V_{1p} G' = G$. Так как $G/G' = V_{1p} G'/G' \cong V_{1p}/V_{1p} \bigcap G'$, то G/G' есть p-группа. Используя равенство (3), получим следующие соотношения: $V_1/W = V_1/V_1 \bigcap G' \ \cong V_1 G'/G' = G/G'$. Очевидно, что V_1/W есть p-группа. Следовательно, $V_1/W \subseteq G_p W/W$, где $G_p W/W$ есть p-силовская подгруппа в группе G/W. Опять используя равенство (3), получим соотношения: $V_2/W = V_2/V_2 \bigcap G' \cong V_2 G'/G' = G/G'$. Отсюда следует, что V_2/W также есть p-группа. Значит, $V_2/W \subseteq G_p^y W/W$, $y \in G$. Следовательно, V_1, $V_2^x \subseteq G_p W$, $x = y^{-1}$.

В случае, когда $G_p W = G$ легко показать, что V_1 и V_2 сопряжены в группе G. Пусть $G_p W$ − не нормальная подгруппа в группе G. В этом случае справедливо строгое включение: $N_G(G_p W) \subset G$. Т. к. $(G_p W)' \lhd N_G(G_p W)$, то $(G_p W)' \lhd G' \bigcap N_G(G_p W)$. Пусть T – X-инъектор в группе $G' \bigcap N_G(G_p W)$. Поскольку $W \lhd G' \bigcap N_G(G_p W)$, то $T \bigcap W$ – X-инъектор в $W \in \mathsf{X}$. Теперь ясно, что $T \bigcap W = W$ и $W \subseteq T$. В силу того, что W − X-максимальная подгруппа в группе $G' \bigcap N_G(G_p W)$, то $T = W$, т. е. W есть X-инъектор в группе $G' \bigcap N_G(G_p W)$. Далее, используя включение $(N_G(G_p W))' \subseteq G' \bigcap N_G(G_p W)$ и условие $(N_G(G_p W))' \lhd N_G(G_p W)$, получим: $(N_G(G_p W))' \lhd G' \bigcap N_G(G_p W)$. Значит, подгруппа $W \bigcap (N_G(G_p W))'$ является X-инъектором в группе $(N_G(G_p W))'$. По индукции (применением пункта 1 теоремы 2) получаем сопряжённость подгрупп V_1, V_2 в группе $N_G(G_p W)$, т. е. V_1 и V_2 сопряжены в G.

2. W − не нормальная подгруппа в группе G. В этом случае имеем строгое включение: $N_G(W) \subset G$. Заметим, что так как $W \in \mathsf{X}$, а $G' \notin \mathsf{X}$, то $W \subset G'$. Кроме того, $(N_G(W))' \subseteq G'$. Покажем далее, что коммутант $(N_G(W))'$ обладает такой X-максимальной подгруппой, которая входит и в V_1, и в V_2. Используем включения: $W \subseteq W(N_G(W))' \subseteq G'$. Допустим, что $W(N_G(W))' = G'$. Поскольку W и $(N_G(W))'$ входят в $N_G(W)$, то $G' \subseteq N_G(W)$. Т. к. (в силу формулы 1) $V_i \subseteq N_G(W)$, то $V_i G' \subseteq N_G(W) \subset G$. Следовательно, $V_i G' \subset G$. Поскольку $W \lhd N_G(W)$, то для X-инъектора R группы $N_G(W)$ получим, что $W \bigcap R$ есть X-инъектор в группе $W \in \mathsf{F}$. Отсюда следует, что $W \bigcap R = W$, $W \subseteq R$. Так как $V_i G' \lhd G$, то $V_i G' \lhd N_G(W)$. Значит, $R \bigcap V_i G'$ есть X-инъектор в группе $V_i G'$ для всех $i = 1, 2$. Теперь из включений $W \subseteq R \bigcap G' \subseteq G'$ и того факта, что W есть X-максимальная подгруппа в группе G', получим: либо $R \bigcap G' = G'$, либо $W = R \bigcap G'$. Если допустить, что $R \bigcap G' = G'$, то получим противоречивое включение: $G' \in \mathsf{X}$. Остаётся положить, что $R \bigcap G' = W$. Далее видно, что подгруппы V_1, V_2 сопряжены в группе G.

Пусть $W(N_G(W))' \subset G'$. Допустим, что $W(N_G(W))' \in \mathsf{X}$. Из включения $W \subseteq W(N_G(W))'$ и того факта, что подгруппа W – X-максимальная в группе G', получаем равенство $W = W(N_G(W))'$. Отсюда следует, что $(N_G(W))' \subseteq W$. В силу включения $W \subseteq V_i$ теперь получим, что $(N_G(W))' \subseteq V_i$. Следовательно, $V_i \lhd N_G(W)$, $i = 1, 2$. Если $N_G(W) \in \mathsf{X}$, то $V_i = N_G(W)$, $i = 1, 2$. Отсюда следует, что $V_1 = V_2$. Пусть $N_G(W) \notin \mathsf{X}$. Так как $V_i \lhd N_G(W)$, $i = 1, 2$, то $R \bigcap V_i$ есть X-инъектор в группе V_i. Теперь очевидно, что $R \bigcap V_i = V_i$, $V_i \subseteq R$. В силу того, что V_i есть X-максимальные подгруппы в группе G, то из последнего включения

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

следует равенство: $V_i = R$ для всех $i=1,2$. Значит, $V_1 = V_2$. Теперь рассмотрим случай: $W(N_G(W))' \notin \mathfrak{X}$. Возьмем Х-инъектор H в группе $W(N_G(W))'$. Так как W – нормальная подгруппа в группе $W(N_G(W))'$, то $H \cap W$ есть Х-инъектор в группе $W \in \mathfrak{X}$. Отсюда следует, что $H \cap W = W$, $W \subseteq H$. Следовательно, из включений $W \subseteq H \subset W(N_G(W))' \subset G'$ и того факта, что W – Х-максимальная подгруппа в G', получим равенство $W = H$, т. е. W – это $\mathfrak{X}$-инъектор в группе $W(N_G(W))'$. Теперь ясно, что $W \cap (N_G(W))'$ есть Х-инъектор в группе $(N_G(W))'$. Значит, $W \cap (N_G(W))'$ − Х-максимальная подгруппа в группе $(N_G(W))'$. Кроме того, $W \cap (N_G(W))'$ входит в V_i для всех $i=1,2$. (Заметим, что $(N_G(W))^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{S}^{\pi}$). По индукции V_1 и V_2 сопряжены в группе $N_G(W)$. Следовательно, V_1 и V_2 сопряжены в группе G. Утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 2 (напомним, что $G' \subset G$). Пусть подгруппы V_1, V_2 – Х-инъекторы в группе G. Если допустить, что $G' = 1$, то в силу определения класса $\mathfrak{X}$ получим противоречивое включение $G \in \mathfrak{X}$. Значит, $G' \neq 1$. Ясно, что $V_i \cap G'$ − Х-инъекторы в группе G', $i=1,2$. Следовательно (в силу индуктивных рассуждений), справедливо равенство: $V_1 \cap G' = V_2^{\,x} \cap G'$, $x \in G'$. Так как $\overline{W} = V_1 \cap G' = V_2^x \cap G'$ является Х-максимальной подгруппой в группе G' и $\overline{W} \subseteq V_1$, $\overline{W} \subseteq V_2^x$, то (в силу пункта 1 теоремы 2) подгруппы V_1, V_2^x сопряжены в группе G, т.е. подгруппы V_1 и V_2 сопряжены в группе G. Утверждение 2 доказано.

Доказательство утверждения 3 (по-прежнему $G' \subset G$). Пусть H – Х-максимальная подгруппа группы G и $H \cap G'$ − Х-инъектор в группе G'. Возьмем Х-инъектор K группы G. Тогда $K \cap G'$ есть Х-инъектор в группе G'. Получим сопряжённость Х-инъекторов группы G' (с применением пункта 2 теоремы 2): $H \cap G' = (K \cap G')^x = K^x \cap G'$, $x \in G'$. Очевидно, что $W = H \cap G' = K^x \cap G'$ является Х-максимальной подгруппой в группе G'. Кроме того, подгруппы H и K^x − Х-максимальные подгруппы в группе G. В силу пункта 1 теоремы 2 получим сопряжённость подгрупп H и K^x в группе G, т. е. H и K сопряжены в группе G.

Доказательство обратного утверждения очевидно. Утверждение 3 доказано.

Доказательство утверждения 4.

Покажем сначала, что подгруппа L является Х-максимальной подгруппой группы G. Допустим противное, т.е. $L \subset H \in \mathfrak{X}$, где $H \subseteq G$. Так как $G \notin \mathfrak{X}$, то $H \subset G$. Далее, поскольку справедливы соотношения $L \cap N \subseteq H \cap N \in \mathfrak{X}$ и $L \cap N - \mathfrak{X}$-максимальная подгруппа в группе N, то $L \cap N - \mathfrak{X}$-максимальная подгруппа в группе $H \cap N$. Значит, $L \cap N = H \cap N$. Рассмотрим равенства (используем тождество Дедекинда):

$$H = H \cap G = H \cap LN = L(H \cap N) = L(L \cap N) = L.$$

Получили противоречие. Значит, L является Х-максимальной подгруппой группы G. Допустим, что $LG' \subset G$. Рассмотрим равенства (применяя тождество Дедекинда): $LG' = LG' \cap LN = L(LG' \cap N)$. Т. к. $L \cap LG' \cap N = L \cap N$ и $LG' \cap N \triangleleft N$, то $L \cap LG' \cap N$ есть Х-инъектор группы $LG' \cap N$. (Заметим, что $(LG')^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{S}^{\pi}$). По индукции L есть есть Х-инъектор группы LG'. Значит, $L \cap G'$ есть Х-инъектор группы G'. Применяя пункт 3 теоремы 2, получим, что подгруппа L есть Х-инъектор группы G.

Пусть $LG' = G$. В этом случае, применяя лемму 11.6 из [12], определение максимального локального внутреннего экрана формации $\mathfrak{X}$, получим: L − Х-инъектор группы G. Утверждение 4 доказано.

Теорема 2 доказана.

Литература

1. Fisher, B. Injectoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fisher, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. – 1967. – Bd. 102, № 5 – S. 337–339.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

2. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T.O. Howkes. – Walyer de Gruyter, Berlin, New York, 1992. – 891 p.

3. Сементовский, И.Г. Δ-нильпотентные инъекторы конечных групп / В.Г. Сементовский // Вопросы алгебры. – 1985. – Вып. 1. – С. 72–86.

4. Шеметков, Л.А. О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков // Конечные группы. – Мн. : Наука и техника, 1975. – С. 207–212.

5. Blessenohl, D. Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Haupfaktoren einfach sind / D. Blessenohl, H. Laue // J. Algebra. – 1979. − Vol. 56. – P. 516–532.

6. Shemetkov, L.A. Injektors in finite groups / L.F. Shemetkov // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф.Скорины. Вопросы алгебры. – 2000. − № 3 (16). – С. 186−187.

7. Vorob’ev, N.T. Gaschütz’s local method in the theory of Fitting classes of finite soluble groups / N.T. Vorob’ev // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 2000. − № 3 (16). – С. 155−166.

8. Залесская, Е.Н. О новых классах сопряженных инъкторов конечных групп / Е.Н. Залесская // Дискретная математика. – 2004. – Т. 16, Вып. № 1. – С. 105–113.

9. Iranzo, M.J. Fitting classes F such that all finite groups have F-injector / M.J. Iranzo, F. Perez-Monasor // Israel J. Math. – 1986. – Vol. 56. − P. 97–101.

10. Förster, P. Nilpotent injectors in finite groups / P. Förster // Bill. Austral. Math. Soc. – 1985. – Vol. 32. − P. 293 – 297.

11. Mann, A. Injectors and normal subgroups of finite groups / A. Mann // Israel J. Math. – 1971. − Vol. 9. – P. 554–558.

12. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

13. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Мн. : Вышэйшая школа, 2006. – 208 с.

Гомельский государственный
технический университет им. П.О. Сухого

Поступила в редакцию 04.05.2015

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ