Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (90), 2015

УДК 512.542

Максимальные подалгебры универсальных алгебр

А.Д. Ходалевич

Анализируется развитие идей формационных методов исследований работ [1], [2]. Изучаются свойства максимальных подалгебр универсальных алгебр, относительно конкретной формации ($\Im$-нормальность, $\Im$-абнормальность). Полученные результаты обобщают аналогичные результаты для групп и мультиколец.
Ключевые слова: универсальная алгебра, конгруэнции, централизуемость.

The development of ideas of formations methods of research in [1], [2] is analyzed. Properties of maximal subalgebras of universal algebras with respect to a particular formation $\Im$ ($\Im$-normal and $\Im$-abnormal maximal subalgebras) are studied. The results generalize similar results for both groups and multirings.
Keywords: universal algebra, congruence, centrality.

Перенесение центра тяжести в изучении абстрактных алгебраических систем на изучение свойств классов этих систем является характерной чертой развития современной алгебры и берет свое начало в 30–40-ых гг. прошлого века с работ Биркгофа и Тарского. Отметим при этом, что в теории универсальных алгебр рассмотрение классов, вплоть до последнего времени, во многом было связано с таким понятием, как многообразие.

Начиная с 1963 г., вначале в теории конечных групп, затем бесконечных, позже в алгебрах Ли, зародилась и стала успешно развиваться теория формаций, т.е. теория классов алгебраических систем, замкнутых относительно гомоморфных образов и конечных поддекартовых произведений. Достаточно богатый материал, полученный здесь, анализ дальнейших перспектив развития позволил в свое время Л.А. Шеметкову [1], говорить об «оформлении теории формаций в самостоятельный раздел алгебры». Подтверждением этому явилась и вышедшая в 1989 г. книга Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [2], в которой построена целостная теория формаций мультиколец, получены результаты, закладывающие основы для развития теории формаций универсальных алгебр. В связи с этим естественно возникает задача дальнейшего развития формационных методов в исследовании универсальных алгебр и, в частности, возможности перенесения результатов теории формаций мультиколец на универсальные алгебры. В настоящей статье такая задача решается в рамках изучения свойств $\Im$-абнормальных и $\Im$-нормальных максимальных подалгебр универсальных алгебр. Отметим, что интерес к указанному направлению не случаен. Он вызван тем, что особо важную роль в теории формаций играют такие, уже ставшие классическими, объекты, как $\Im$-проекторы, $\Im$-нормализаторы, $\Im$-профраттиниевы подалгебры, свойства которых во многом связаны с понятиями $\Im$-абнормальности и $\Im$-нормальности.

Полученные в статье результаты обобщают аналогичные результаты в группах, мультикольцах, алгебрах Ли и т. д.

Под термином «алгебра» в дальнейшем будем понимать универсальную алгебру. Все рассматриваемые алгебры предполагаются входящими в фиксированное мальцевское конгруэнц-перестановочное многообразие M. Кроме того, будем считать, что все рассматриваемые алгебры удовлетворяют условию максимальности и минимальности для подалгебр. Существенно используется понятие централизатора конгруэнции, введенного Смитом [3]. Весь необходимый материал, связанный с этим понятием, можно также найти в работе [4]. Используются стандартные обозначения и определения из работы [2].

Дополнительно отметим, что конгруэнции произвольной алгебры обозначаются греческими буквами. Если α – конгруэнция на алгебре A, то $\alpha x = \{y \mid (x, y) \in \alpha\}$ – смежный класс (класс эквивалентности) алгебры A по конгруэнции α, $A/\alpha = \{\alpha x \mid x \in A\}$ – факторалгебра алгебры A по конгруэнции α. Если B – подалгебра алгебры A, то αB – совокупность всех смежных классов αx, такая, что $x \in B$. Если α и β – конгруэнции на алгебре A, $\beta \supseteq \alpha$, то конгруэнцию β / α на алгебре A/α назовем фактором на A. Очевидно, что $(\alpha x, \alpha y) \in \beta / \alpha$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in \beta$. O_A и $1_A = A^2$ – соответственно наименьший и наибольший элементы решетки конгруэнций алгебры A.

Напомним следующее определение из работы [2].

Конгруэнция π на алгебре A называется $\Im$-корадикальной, где $\Im$ – непустая формация алгебр, если $A/\pi \in \Im$, но $A/\alpha \notin \Im$ для любой такой конгруэнции α, что $\alpha \subset \pi$.

Заметим, что так как алгебра A удовлетворяет условию максимальности и минимальности для конгруэнций, то $\Im$-корадикальная конгруэнция алгебры A всегда существует. Из того, что $\Im$ – формация, теперь следует, что $\Im$-корадикальная конгруэнция единственна.

Будем обозначать $\Im$-корадикальную конгруэнцию алгебры A через $A^{\Im}$.

Определение 1. *Пусть $\Im$ – непустая формация. Максимальную подалгебру M алгебры A назовем:*

1) $\Im$-нормальной, если $A^{\Im}M = M$;

2) $\Im$-абнормальной, если $A^{\Im}M = A$.

Нетрудно проверить, что следующее определение из работы [2] эквивалентно определению 1.

Определение 2. *Максимальная полалгебра M алгебры A называется:*

1) $\Im$-нормальной, если $A/M_A \in \Im$;

2) $\Im$-абнормальной, если $A/M_A \notin \Im$, где для любой подалгебры H алгебры A H_A – конгруэнция на A, порожденная всеми такими конгруэнциями π на A, что $\pi H = H$.

Если α / β – фактор на алгебре A, то будем говорить, что подалгебра B алгебры A покрывает (изолирует) фактор α / β, если $\alpha(\beta B) = \beta B$ $(B^2 \cap \alpha \subseteq \beta)$.

Лемма 1. *Подалгебра B алгебры A покрывает фактор α / β на A тогда и только тогда, когда $\alpha B = \beta B$.*

Доказательство. Пусть B покрывает фактор α / β. Так как $\beta B \supseteq B$, то $\alpha(\beta B) \supseteq \alpha B$.

Следовательно, $\beta B \supseteq \alpha B$. В силу того, что $\beta \subseteq \alpha$, $\beta B \subseteq \alpha B$. Итак, $\alpha B = \beta B$.

Пусть теперь имеет место последнее равенство. Тогда $\alpha(\beta B) = \alpha(\alpha B) = \alpha B = \beta B$. Тем самым лемма доказана.

Напомним, что конгруэнция $\alpha \neq O_A$ на алгебре A называется минимальной, если из включения $\beta \subset \alpha$, всегда следует $\beta = O_A$. Фактор α / β на алгебре A называется главным, если α / β – минимальная конгруэнция на факторалгебре A/β. Факторы α / β и γ / τ на алгебре A называются перспективными, если либо $\alpha = \beta\gamma$ и $\tau = \beta \cap \gamma$, либо $\gamma = \tau\alpha$ и $\beta = \tau \cap \alpha$.

Лемма 2. *Пусть максимальная подалгебра M алгебры A не покрывает главный фактор α / β алгебры A. Тогда M не покрывает фактор $\alpha M_A / M_A$, перспективный фактору α / β.*

Доказательство. Так как M не покрывает фактор α / β, то $\beta M = M$ и $\alpha M = A$. Очевидно, что $\alpha \cap M_A \supseteq \beta$. Если $\alpha \cap M_A \supset \beta$, то из того, что $\alpha \supseteq \alpha \cap M_A$ и α / β – главный фактор, следует, что $\alpha \cap M_A = \alpha$. Но это противоречит тому, что $\alpha M = A$. Значит, $\alpha \cap M_A = \beta$. Следовательно, фактор $\alpha M_A / M_A$ перспективен фактору $\alpha / \alpha \cap M_A = \alpha / \beta$. Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобится следующий хорошо известный факт, который сформулируем в виде леммы (доказательство см., например, [4]).

Лемма 3. *Любая подалгебра A^2, содержащая конгруэнцию O_A, является конгруэнцией на A.*

Пусть B – подалгебра алгебра A, α и β – конгруэнции соответственно на A и B. Тогда обозначим $[\beta]_\alpha = \{(x, y) \in A^2\}$, где для любой пары $(x, y) \in [\beta]_\alpha$ всегда найдется такая пара $(x', y') \in \beta$, что $(x, x') \in \alpha$, $(y, y') \in \alpha$.

Следующий результат указывает на возможность расширения конгруэнции β на B до конгруэнции $[\beta]_\alpha$ на αB.

Лемма 4. *Пусть* B *подалгебра алгебры* A *и* α *– конгруэнция на* A*. Тогда:*

1) если β *– конгруэнция на* B*, то* $[\beta]_\alpha$ *– конгруэнция на* αB*,* $[\beta]_\alpha \cap B^2 = \beta(\alpha \cap B^2)$ *и* $\alpha \cap (\alpha B)^2 \subseteq [\beta]_\alpha$*. В частности, если* $\alpha \cap B^2 \subseteq \beta$*, то* $[\beta]_\alpha \cap B^2 = \beta$*;*

2) если β *– конгруэнция на* αB*, то* $[\beta \cap B^2]_\alpha = \beta(\alpha \cap (\alpha B)^2)$*. В частности, если* $\alpha \cap (\alpha B)^2 \subseteq \beta$*, то* $[\beta \cap B^2]_\alpha = \beta$*.*

Доказательство. 1) Очевидно, что $[\beta]_\alpha$ – бинарное отношение на αB. Так как для любого элемента $x \in \alpha B$ всегда найдется такой элемент $y \in B$, что $(x, y) \in \alpha$ и $(y, y) \in \beta$, то по определению $(x, x) \in [\beta]_\alpha$. Пусть $(x_i, y_i) \in [\beta]_\alpha$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда $(x'_i, y'_i) \in \beta$, $(x_i, x'_i) \in \alpha$ и $(y_i, y'_i) \in \alpha$. Следовательно, для любой n-арной операции ω, $(x'_1 ... x'_n\omega, y'_1 ... y'_n\omega) \in \beta$, $(x_1 ... x_n\omega, x'_1 ... x'_n\omega) \in \alpha$ и $(y_1 ... y_n\omega, y'_1 ... y'_n\omega) \in \alpha$. Отсюда следует, что $(x_1 ... x_n\omega, y_1 ... y_n\omega) \in [\beta]_\alpha$. Значит, в силу леммы 3, $[\beta]_\alpha$ – конгруэнция на алгебре αB.

Пусть $(x, y) \in [\beta]_\alpha \cap B^2$. Тогда найдется такая пара $(x', y') \in \beta$, что $(x, x') \in \alpha \cap B^2$, $(y, y') \in \alpha \cap B^2$ и, значит, $(x, y) \in \beta(\alpha \cap B^2)$. Пусть теперь $(x, y) \in \beta(\alpha \cap B^2)$. Тогда найдется такой элемент $z \in B$, что $(x, z) \in \beta$ и $(z, y) \in \alpha \cap B^2$. Так как $(x, x) \in \alpha$, $(z, z) \in \alpha$, то $(x, z) \in [\beta]_\alpha \cap B^2$. Аналогичным образом из $(z, z) \in \alpha \cap B^2$, $(y, z) \in \alpha \cap B^2$, $(z, z) \in \beta$ следует, что $(z, y) \in [\beta]_\alpha \cap B^2$. Следовательно, $(x, y) \in [\beta]_\alpha \cap B^2$. Тем самым показано, что $[\beta]_\alpha \cap B^2 = \beta(\alpha \cap B^2)$.

Покажем теперь, что $\alpha \cap (\alpha B)^2 \subseteq [\beta]_\alpha$. Для любой пары $(x, y) \in \alpha \cap (\alpha B)^2$ существует такая пара $(x', y') \in B^2$, что $(x, x') \in \alpha$ и $(y, y') \in \alpha$. Так как $(x, y) \in \alpha$, то отсюда следует, что $(x, y') \in \alpha$. Итак, $(y', y') \in \beta$, $(x, y') \in \alpha$ и $(y, y') \in \alpha$, т. е. $(x, y) \in [\beta]_\alpha$.

Доказательство пункта 2) с очевидными изменениями повторяет доказательство пункта 1). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\mathfrak{I}$ *– непустая формация. Тогда для любой конгруэнции* α *на алгебре* A *справедливы следующие утверждения;*

1) $(A/\alpha)^{\mathfrak{I}} = A^{\mathfrak{I}}\alpha/\alpha$*;*

2) если B *– подалгебра алгебры* A *такая, что* $A = \alpha B$*, то* $[B^{\mathfrak{I}}]_\alpha = A^{\mathfrak{I}}\alpha$*;*

3) если $A = \alpha B$ *и* $\alpha \subseteq A^{\mathfrak{I}}$*, то* $[B^{\mathfrak{I}}]_\alpha = A^{\mathfrak{I}}$*.*

Доказательство. Обозначим $(A/\alpha)^{\mathfrak{I}} = \beta/\alpha$. Тогда $(A/\alpha)/(\beta/\alpha) \cong A/\beta \in \mathfrak{I}$, т. е. $\beta \supseteq A^{\mathfrak{I}}$. Так как $(A/\alpha)/(A^{\mathfrak{I}}\alpha/\alpha) \cong A/A^{\mathfrak{I}}\alpha \cong (A/A^{\mathfrak{I}})/(A^{\mathfrak{I}}\alpha/A^{\mathfrak{I}}) \in \mathfrak{I}$, то $A^{\mathfrak{I}}\alpha/\alpha \supseteq \beta/\alpha$. Отсюда следует, что $A^{\mathfrak{I}}\alpha = \beta$. Тем самым утверждение 1) доказано.

Пусть $A = \alpha B$. Тогда $A^{\mathfrak{I}}\alpha B = A$ и так как $A/A^{\mathfrak{I}}\alpha \cong B/B^2 \cap A^{\mathfrak{I}}\alpha \in \mathfrak{I}$, то $B^2 \cap A^{\mathfrak{I}}\alpha \supseteq B^{\mathfrak{I}}$. Следовательно, $[B^{\mathfrak{I}}]_\alpha \subseteq [B^2 \cap A^{\mathfrak{I}}\alpha]_\alpha$. Так как $A^{\mathfrak{I}}\alpha \supseteq \alpha$, то в силу пункта 2) леммы 4, $[B^2 \cap A^{\mathfrak{I}}\alpha]_\alpha = A^{\mathfrak{I}}\alpha$. Итак, $[B^{\mathfrak{I}}]_\alpha \subseteq A^{\mathfrak{I}}\alpha$. Докажем обратное включение. Из пункта 1) леммы 4 следует, что $\alpha \subseteq [B^{\mathfrak{I}}]_\alpha$. Значит $A/[B^{\mathfrak{I}}]_\alpha \cong B/(B^2 \cap [B^{\mathfrak{I}}]_\alpha) = B/B^{\mathfrak{I}}(\alpha \cap B^2) \in \mathfrak{I}$. Следовательно, $(A/\alpha)/([B^{\mathfrak{I}}]_\alpha/\alpha)$ и так как $(A/\alpha)^{\mathfrak{I}} = A^{\mathfrak{I}}\alpha/\alpha$, то $[B^{\mathfrak{I}}]_\alpha/\alpha \supseteq A^{\mathfrak{I}}\alpha/\alpha$. Отсюда следует, что $[B^{\mathfrak{I}}]_\alpha/\alpha \supseteq A^{\mathfrak{I}}\alpha/\alpha$, значит, $[B^{\mathfrak{I}}]_\alpha = A^{\mathfrak{I}}\alpha$. В частности, если $\alpha \subseteq A^{\mathfrak{I}}$, то $[B^{\mathfrak{I}}]_\alpha = A^{\mathfrak{I}}$. Лемма доказана.

Приведем некоторые необходимые в дальнейшем факты из [4], связанные с понятием централизуемости конгруэнций.

Пусть α и β – конгруэнции на алгебре A. Тогда β централизует α (записывается: $\beta \subseteq C_A(\alpha)$), если на α существует такая конгруэнция τ, что;

1) из $(x,y)\tau(x',y')$ всегда следует $(x,x')\in\beta$, $(y,y')\in\beta$;

2) для любого элемента $(x,y)\in\beta$ всегда выполняется $(x,x)\tau(y,y)$;

3) если $(x,y)\tau(x,z)$, то $y=z$.

Наибольшую конгруэнцию β, удовлетворяющую указанным выше свойствам, назовем централизатором конгруэнции α и обозначим $C_A(\alpha)$. В частности, если A/β и γ/β – факторы алгебры A такие, что $C_{A/\beta}(\alpha/\beta)=\gamma/\beta$, то конгруэнцию γ обозначим как $C_A(\alpha/\beta)$ и назовем централизатором фактора α/β в A.

Следующие свойства централизатора конгруэнции, которые сформулируем в виде леммы, доказываются непосредственной проверкой.

Лемма 6. *Пусть* α,β,γ,τ *– конгруэнции на алгебре* A. *Тогда:*

1) если $\beta\subseteq\alpha$, *то* $\beta\subseteq C_A(\alpha/\beta)$;

2) если $\beta\subseteq\alpha\subseteq\gamma$, *то* $C_A(\gamma/\beta)\subseteq C_A(\alpha/\beta)\cap C_A(\gamma/\alpha)$;

3) если $\beta\subseteq\alpha$, $\tau\subseteq\gamma$ *и факторы* α/β, γ/τ *проективны, то* $C_A(\alpha/\beta)=C_A(\gamma/\tau)$;

4) если $\alpha_2\subseteq\alpha_1$ *– конгруэнции на* A *и* $B\subseteq A$, *то* $C_A(\alpha_1/\alpha_2)\cap B^2\subseteq C_B(\beta_1/\beta_2)$, *где* $\beta_i=B^2\cap\alpha_i$, $i=1,2$.

Обозначим через M_C подмногообразие всех конгруэнций алгебр из M, а через X – множество всех подформаций из M.

Определение 3. *Отображение* $f:\mathrm{M}_C\to\mathrm{X}$ *назовем экраном, если:*

1) $f(O_A)=\mathrm{M}$ *для любой алгебры* A *из* M;

2) если α,β,γ *– конгруэнции на* A *и* $\alpha\subseteq\beta\subseteq\gamma$, *то* $f(\gamma/\alpha)\subseteq f(\gamma/\beta)\cap f(\beta/\alpha)$;

3) если факторы α/β *и* γ/τ *перспективны, то* $f(\alpha/\beta)=f(\gamma/\tau)$.

Если f – экран, $C_A(\alpha/\beta)$ – централизатор фактора α/β на A и $A/C_A(\alpha/\beta)\in f(\alpha/\beta)$ $(A/C_A(\alpha/\beta)\notin f(\alpha/\beta))$, то фактор α/β назовем f-центральным (f-эксцентральным) в A.

Ряд конгруэнций $O_A=\alpha_0\subseteq\alpha_1\subseteq\ldots\subseteq\alpha_n=A^2, n\geq 0$ алгебры A назовем f-центральным, если все его факторы f-центральны в A.

Обозначим через $<f>$ класс всех тех алгебр из M, которые обладают f-центральными рядами. Тогда, как показано в работе [5], класс $<f>$ является непустой формацией.

Формацию $\Im$ назовем ступенчатой, если найдется такой экран f, что $\Im=<f>$. При этом будем говорить, что f определяет $\Im$ или, что f является экраном формации $\Im$. Экран f назовем внутренним, если $f(\alpha)\subseteq\Im$ для любой ненулевой конгруэнции $\alpha\in\mathrm{M}$.

Лемма 7. *Пусть* f *– экран формации* $\Im$ *и для любой ненулевой конгруэнции* $\alpha\in M$ *положим* $f_1(\alpha)=f(\alpha)\cap\Im$. *Тогда* f_1 *– внутренний экран формации* $\Im$.

Доказательство. Очевидно, что f_1 – экран и $<f_1>\subseteq\Im$. Пусть α/β – произвольный f-центральный фактор алгебры $A\in\Im$. Тогда $A/C_A(\alpha/\beta)\in f(\alpha/\beta)\cap\Im$, следовательно, фактор α/β f_1-централен. Таким образом, f-центральный ряд алгебры A является и f_1-центральным, т. е. $A\in<f_1>$. Итак, $\Im=<f_1>$. Лемма доказана.

Назовем фактор α/β на алгебре A абелевым, если $C_A(\alpha/\beta)\supseteq\alpha$.

Лемма 8. *Пусть* B *– подалгебра алгебры* A *и* α *– абелева конгруэнция на* A *такая, что* $\alpha B=A$. *Тогда на* A *существует такая конгруэнция* β, *что* $\beta\subset\alpha$, $\beta B=B$ *и* $B^2\cap\alpha=B^2\cap\beta$.

Доказательство. Обозначим $\gamma = C_A(\alpha)$. Тогда из определения централизатора конгруэнции следует, что на γ определена такая конгруэнция τ, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) из $(x, y)\tau(x', y')$ всегда следует $(x, x') \in \alpha$, $(y, y') \in \alpha$;

2) для любой пары $(x, y) \in \alpha$, $(x, x)\tau(y, y)$;

3) из $(x, y)\tau(x', y)$ всегда следует $x = x'$.

Определим на A бинарное отношение β следующим образом: $(x, x') \in \beta$ тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы $b, b' \in B$, что $(x, b)\tau(x', b')$. Покажем, что β – конгруэнция на A. Так как $\alpha B = A$, то для любого элемента $x \in A$ найдется такой элемент $b \in B$, что $(x, b) \in \alpha \subseteq \gamma$. Следовательно, $(x, b)\tau(x, b)$, т.е. $(x, x) \in \beta$. Пусть теперь $(x_i, x'_i) \in \beta$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $(x_i, b_i)\tau(x'_i, b'_i)$, $b_i, b'_i \in B$ и для любой n-арной операции ω получаем

$$(x_1 \dots x_n\omega, b_1 \dots b_n\omega)\tau(x'_1 \dots x'_n\omega, b'_1 \dots b'_n\omega).$$

Следовательно, в силу леммы 3, β – конгруэнция на A. Покажем, что $\beta B = B$. Допустим противное. Тогда найдется такая пара $(x, b) \in \beta$, что $x \notin B$ и $b \in B$. Из определения β следует, что найдется такая пара $(b', b'') \in B^2$, что $(x, b')\tau(b, b'')$. Очевидно, что $(b', b')\tau(b'', b'')$, а так как $(b', b'') \in \alpha \subseteq \gamma$, то $(b', b'')\tau(b', b'')$. Теперь для мальцевского оператора P, применяемого для последних трех соотношений относительно τ, получаем, что $(x, b'')\tau(P(b, b'', b'), b'')$. Значит, $x = P(b, b'', b') \in B$. Тем самым показано, что $\beta B = B$, следовательно, $\beta \subset \alpha$.

Пусть $(x, y) \in B^2 \cap \alpha$. Тогда, очевидно, $(x, x)\tau(y, y)$, т. е. $(x, y) \in \beta \cap B^2$. Так как $\beta \cap B^2 \subseteq \alpha \cap B^2$, то отсюда получаем, что $\beta \cap B^2 = \alpha \cap B^2$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть B подалгебра алгебры A, α – конгруэнция на A, такая, что $\alpha B = A$, $B^2 \cap \alpha = O_B$ и пусть $\gamma \subseteq C_A(\alpha)$ такова, что $\gamma B = A$. Тогда на A существует такая конгруэнция β, что $\beta \subset \gamma$, $\beta B = B$, $\beta \cap B^2 = \gamma \cap B^2$.*

Доказательство. Так как $\alpha \subseteq C_A(\gamma)$, то на α определена конгруэнция τ, удовлетворяющая определению централизуемости. Построим на A бинарное отношение β следующим образом: $(x, x') \in \beta$ тогда и только тогда, когда найдется такая пара $(b, b') \in B^2$, что $(x, b)\tau(x', b')$. Аналогичным образом, как и в доказательстве леммы 8, можно показать, что β – конгруэнция на A. Покажем, что $\beta B = B$. Допустим противное. Тогда найдется такая пара $(x, b) \in \beta$, что $x \notin B$ и $b \in B$. Значит, существует такая пара $(b', b'') \in B^2$, что $(x, b')\tau(b, b'')$. Так как $(b, b'') \in \alpha \cap B^2 = O_B$, то $b = b''$, т.е. $(x, b')\tau(b, b)$. Но в этом случае из определения τ следует, что $x = b' \in B$. Противоречие. Итак, $\beta B = B$ и $\beta \cap B^2 \subseteq \gamma \cap B^2$. Пусть $(x, y) \in \gamma \cap B^2$. Так как $(x, x)\tau(y, y)$, то отсюда следует, что $(x, y) \in \beta \cap B^2$. Значит, $\beta \cap B^2 = \gamma \cap B^2$. Лемма доказана.

Ряд конгруэнций алгебры A называется главным, если все его факторы являются главными.

Алгебру A назовем разрешимой, если она обладает таким главным рядом конгруэнций

$$O_A = \alpha_0 \subseteq \alpha_1 \subseteq \dots \subseteq \alpha_n = A^2,$$

что $\alpha_i \subseteq C_A(\alpha_i / \alpha_{i-1})$ для любого $i = 1, \dots, n$.

Как показано в работе [5], класс S всех разрешимых алгебр является формацией.

Теорема 1. *Пусть f – внутренний экран формации $\mathfrak{I}$, M – максимальная подалгебра алгебры $A \in \mathsf{S}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если M – $\mathfrak{I}$-нормальна в A, то M покрывает каждый f-эксцентральный главный фактор алгебры A;

2) если M – $\mathfrak{I}$-абнормальна в A, то M покрывает каждый f-центральный главный фактор алгебры A.

Доказательство. Если максимальная подалгебра M не покрывает главный фактор α/β алгебры A, то согласно лемме 2, M не покрывает главный фактор $\alpha M_A/M_A$, перспективный фактору α/β. Обозначим через $\gamma = C_A(\alpha/\beta)$. Тогда из леммы 6 следует, что

$$\gamma = C_A(\alpha M_A/M_A) \supseteq \alpha M_A.$$

Предположим теперь, что M $\Im$-нормальна в A. Тогда $A/M_A \in \Im$, следовательно, $(A/M_A)/(\gamma/M_A) \cong A/\gamma \in f(\alpha M_A/M_A) = f(\alpha/\beta)$. Это и означает, что фактор α/β является f-центральным в A. Утверждение 1) доказано.

Предположим теперь, что α/β f-централен в A, но M $\Im$-абнормальна в A. По лемме 5 $(A/M_A)^{\Im} = A^{\Im}M_A/M_A$. Следовательно, в факторалгебре A/M_A максимальная подалгебра M/M_A является $\Im$-абнормальной. Кроме того, M/M_A не покрывает f-центральный главный фактор $\alpha M_A/M_A$, поэтому, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $M_A = O_A$.

Итак, $\beta = O_A$, α – минимальная конгруэнция на A и $\alpha M = A$.

Если $M^2 \cap \alpha \neq O_M$, то по лемме 8 на A существует такая конгруэнция $\beta \subset \alpha$, что $\beta \cap M^2 \neq O_M$, т. е. $\beta \neq O_A$. Противоречие с тем, что α – минимальная конгруэнция на A. Поэтому $M^2 \cap \alpha = O_M$. Тогда, согласно лемме 9, на A существует такая конгруэнция $\beta \subset \gamma$, что $\beta M = M$ и $\beta \cap M^2 = \gamma \cap M^2$. Поэтому, если $\gamma \cap M^2 \neq O_M$, то получаем противоречие с тем, что $M_A = O_A$. Итак, $\gamma \cap M^2 = O_M$. Так как f – внутренний экран, то $M \cong A/\gamma \in f(\alpha) \subseteq \Im$. Следовательно, $A/\alpha \cong M \in \Im$. Теперь из f-центральности α следует, что $A \in \Im$. Противоречие. Тем самым теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть f – внутренний экран формации $\Im$, M – максимальная подалгебра алгебры $A \in \mathsf{S}$. Тогда M $\Im$-нормальна ($\Im$-абнормальна) тогда и только тогда, когда M не покрывает хотя бы один f-центральный (соответственно f-эксцентральный) главный фактор алгебры A.*

Литература

1. Шеметков, Л.А. Новое направление общей алгебры / Л.А. Шеметков // Вопросы алгебры. – 1986. – Вып. 2. – С. 3–7.
2. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 256 с.
3. Smith, J.D.H. Mal'cev Varieties / J.D.H. Smith // Lest.Notes. Math. – 1976. – V. 554. – 158 p.
4. Ходалевич, А.Д. Формационные свойства нильпотентных алгебр / А.Д. Ходалевич // Вопросы алгебры. – 1992. – Вып. 7. – С. 76–85.
5. Ходалевич, А.Д. Универсальные алгебры с f-центральными рядами конгруэнций / А.Д. Ходалевич // Весці Акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат.навук. – 1994. – № 1. – С. 30–34.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 08.12.2014