УДК 535.2

РАВНОВЕСНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ПОЛОСТИ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА

А. А. Колоколов и *Г. В. Скроцкий*

Термодинамическим путем определяется общий характер поправок к формулам Стефана—Больцмана и Вина, обусловленных конечным размером полости. Полученные формулы находятся в согласии с результатами точных вычислений, выполненных для полостей простой формы. Найдено точное выражение для равновесной плотности энергии в полости, имеющей форму параллелепипеда с идеально проводящими стенками и рассмотрены частные случаи щели между двумя плоскостями и канала прямоугольного сечения.

Спектр собственных частот электромагнитного поля в полости конечного размера дискретен и определяется ее размерами, формой, а также характером граничных условий на стенках полости. Поэтому плотность термодинамических функций, описывающих равновесное тепловое излучение в результате суммирования по набору собственных частот зависит от перечисленных выше условий. При увеличении линейных размеров полости спектр собственных частот сгущается, его плотность увеличивается и перестает зависеть от ее формы и граничных условий на стенках. В этом случае становится справедливой известная формула Вина для спектральной плотности энергии излучения, интегрирование которой по всем частотам приводит к закону Стефана—Больцмана.

В ряде случаев, например, при рассмотрении бозе-конденсации в конечном объеме необходимо использование точных, а не асимптотических выражений для термодинамических функций [1]. В настоящей работе находятся средняя полная и спектральная плотности энергии равновесного излучения для полостей конечного размера, имеющих простейшую геометрическую форму.

В качестве простого примера рассмотрим одномерный случай, когда все величины, описывающие электромагнитное поле, зависят только от одной пространственной переменной l. Линейная плотность энергии равновесного излучения $U(T)$ в таком резонаторе при температуре T определяется формулой

$$U(T)=\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hbar\omega_n}{e^{\frac{\hbar\omega_n}{kT}}-1}, \tag{1}$$

где $\omega_n=(\pi c/l)n$, $n=1, 2, 3\ldots$, а c — скорость света в вакууме.

Воспользовавшись формулой суммирования Пуассона [2], преобразуем (1) к виду

$$U(T)=T^2\varphi(Tl), \tag{2}$$

где

$$\varphi(Tl)=\frac{1}{6}\frac{\pi k^2}{\hbar c}-\frac{k}{2Tl}+\frac{\pi}{24}\frac{\hbar c}{(Tl)^2}-\frac{\pi k^2}{\hbar c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{2\pi kTl}{\hbar c}n\right)}.$$

Легко видеть, что при $l \to \infty$, как и должно быть,

$$U = \frac{\pi k^2 T^2}{6\hbar c} = \frac{\hbar}{\pi c} \int\limits_0^\infty \frac{\omega d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Общий характер зависимости (2) можно получить с помощью простого термодинамического вычисления. Так как в рассматриваемом случае давление излучения $p = U(T, l)$, то записав условие полного дифференциала энтропии $dS = (1/T)\{d(Ul) + pdl\}$, получим

$$T\frac{\partial U}{\partial T} - l\frac{\partial U}{\partial l} - 2U = 0. \tag{3}$$

Рассматривая (3) как уравнение для U, легко убедиться, что его общим решением является выражение (2). Для сферического резонатора радиуса L или кубического со стороной L с учетом, что $p = U/3$, аналогичным путем вместо (3) получим

$$T\frac{\partial U}{\partial T} - L\frac{\partial U}{\partial L} - 4U = 0. \tag{4}$$

Общее решение (4) имеет вид

$$U = T^4 \varphi(TL), \tag{5}$$

где функция φ определяется граничными условиями и имеет различный вид для сферы и для куба. При $L \to \infty$ $\varphi \to \sigma = \pi^2 k^4 / 15\hbar^3 c^3$, где σ — постоянная Стефана—Больцмана.

Вычислим теперь плотность равновесной энергии в резонаторе, имеющем форму параллелепипеда со сторонами L_1, L_2, L_3. Собственные частоты параллелепипеда с идеально проводящими стенками определяются формулой

$$\omega_{n_1,\, n_2,\, n_3} = \pi c \sqrt{\left(\frac{n_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{L_3}\right)^2}\,, \quad n_i = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots,\quad i = 1,\ 2,\ 3,$$

причем два или три числа n_i в нуль одновременно не обращаются. Применяя многомерную формулу суммирования Пуассона, после довольно громоздких преобразований получим точное выражение для U в форме, удобной для случая достаточно высоких температур

$$U = \frac{\pi^2 k^4 T^4}{15\hbar^3 c^3} - \frac{\pi (L_1 + L_2 + L_3) k^2 T^2}{12\hbar c L_1 L_2 L_3} + \frac{kT}{2L_1L_2L_3} - \frac{\pi\hbar c (L_1L_2 + L_1L_3 + L_2L_3)}{48 (L_1L_2L_3)^2} +$$

$$+ \frac{\hbar c}{16\pi^2} \sum_{\substack{n_1,\, n_2,\, n_3 = -\infty \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{q^4} + \frac{\pi k^2 T^2}{2\hbar c\, (L_1L_2L_3)} \sum_{i=1}^{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_i}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{2\pi k T L_i}{\hbar c}\, n\right)} -$$

$$- \frac{\pi k^3 T^3}{2\hbar^2 c^2} \sum_{\substack{n_1,\, n_2,\, n_3 = -\infty \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{q} \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{2\pi k T}{\hbar c}\, q\right)}{\mathrm{sh}^3\left(\frac{2\pi k T}{\hbar c}\, q\right)}, \tag{6}$$

где $q = \sqrt{n_1^2 L_1^2 + n_2^2 L_2^2 + n_3^2 L_3^2}$.

При $L_1 = L_2 = L_3 = L$ (6) переходит в формулу, полученную в [3], при этом плотность энергии в полном соответствии с (5) записывается в виде $U = T^4 \varphi(TL)$. С помощью ЭВМ в работе [6] была приближенно вычислена плотность энергии равновесного излучения для некоторых типов резонаторов с идеально проводящими стенками. В частности, было получено несколько первых членов формулы (6) (при этом численный коэффициент второго члена был ошибочно определен в два раза меньшим). Из (2) и (6) видно, что порядок поправочных членов как в одномерном, так и в трехмерном случаях определяется единственным параметром $\hbar\Delta\omega/kT$, где $\Delta\omega$ — расстояние между соседними модами. Для полости с линейными размерами порядка нескольких микрон поправочные члены существенны уже при температуре $T \sim \hbar c/kL \sim 10^3$°K. Таким образом, тепловое излучение в малых полостях и от пористых поверхностей может заметным образом отличаться от излучения гладких.

В предельном случае $L_1 \gg L_3$, $L_2 \gg L_3$ формула (6) описывает равновесную плотность излучения U_1 между двумя бесконечными параллельными пластинами с идеальной проводимостью

$$U_1 = \frac{\pi k^4 T^4}{15\hbar^3 c^3} + \frac{\hbar c}{8\pi^2 L_3^4}\{\zeta(4) - f_1(\alpha)\}, \tag{7}$$

где $\alpha = 2\pi k T L_3/\hbar c$, $f_1(\alpha) = \alpha^3 \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{ch}(\alpha n)/n\,\mathrm{sh}^3(\alpha n))$, $\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty}(1/n^4) = \pi^4/90$.

При $\alpha \to 0$ выражение в фигурных скобках (7) обращается в нуль и $U_1 \to 0$.

Для $\alpha \gg 1$ с точностью до экспоненциально малых членов (7) можно переписать в виде

$$U_1 = \frac{\pi^2 k^4 T^4}{15\hbar^3 c^3} + \frac{1}{3}\frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{L_3^4} = \frac{\pi^2 k^4 T^4}{15\hbar^3 c^3}\left\{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^4\right\} = \sigma T^4\left\{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^4\right\}.$$

Формальное вычисление силы, действующей на единицу площади стенки резонатора со стороны излучения, рассчитанной по формуле $F = -\partial(U_1 L_3)/\partial L_3$, приводит к выражению ($\alpha \gg 1$)

$$F = -\frac{\pi^2 k^4 T^4}{15\hbar^3 c^3} + \frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{L_3^4}.$$

Первый член описывает отталкивание между стенками резонатора, а второй — притяжение. Он совпадает с выражением, впервые полученным в известной работе Казимира [8, 9].

В другом предельном случае при $L_3 \gg L_1$, $L_3 \gg L_2$ формула (6) описывает равновесную плотность энергии в полости, имеющей форму вытянутого параллелепипеда,

$$U_2 = \frac{\pi^2 k^4 T^4}{15\hbar^3 c^3} - \frac{\pi k^2 T^2}{12\hbar c L_1 L_2} + \frac{\hbar c}{16\pi^2}\sum_{\substack{n_1, n_2 = -\infty \\ n_1^2 + n_2^2 \neq 0}}^{\infty}\left\{\frac{1}{q^4} - f_2(\alpha, q)\right\}, \tag{8}$$

где $q = \sqrt{n_1^2 L_1^2 + n_2^2 L_2^2}$, $f_2(\alpha, q) = (\alpha^3/q)(\mathrm{ch}(\alpha q)/\mathrm{sh}^3(\alpha q))$.

При $\alpha \gg 1$ с точностью до экспоненциально малых членов формула (8) принимает вид

$$U_2 = \frac{\pi^2 k^4 T^4}{15\hbar^3 c^3} - \frac{\pi k^2 T^2}{12\hbar c L_1 L_2} - \frac{\hbar c}{16\pi^2}\sum_{\substack{n_1, n_2 = -\infty \\ n_1^2 + n_2^2 \neq 0}}\frac{1}{q^4}.$$

Характерно, что наряду с членом $\sim T^4$ она содержит член $\sim T^2$.

Учет конечных размеров резонатора сказывается и на формуле Вина для спектральной плотности излучения $U_\omega = \omega^3 f(\omega/T)$. При адиабатическом процессе расширения полости, заполненной равновесным излучением, должно выполняться следующее равенство:

$$d\,(U_\omega V)_S = \frac{1}{3}\,\omega\,\frac{\partial U_\omega}{\partial \omega}\,dV, \tag{9}$$

где $U_\omega = U_\omega(\omega, V, T)$, V — объем полости.

Если учесть, что уравнение адиабаты для равновесного излучения, вытекающее из условия $dS = 0$ и (5), есть $T^3 L^3 = \mathrm{const}$, то из (7) следует, что U_ω удовлетворяет уравнению

$$T\frac{\partial U}{\partial T} = 3U_\omega - \omega\frac{\partial U_\omega}{\partial \omega} + L\frac{\partial U_\omega}{\partial L}, \tag{10}$$

где L — соответственно сторона кубического или радиус сферического резонатора. Общее решение (10) имеет вид

$$U_\omega = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right)\psi\left(\frac{1}{L\omega}\right), \tag{11}$$

где f есть универсальная функция от ω/T, а вид функции ψ определяется граничными условиями и формой полости. При $L \to \infty$ $\psi \to 1$. Выражение (11) можно рассматривать как обобщение упомянутой выше формулы Вина. Закон смещения Вина при этом приобретает вид $\omega_m/T = F(\omega_m L)$, причем $F(\omega_m L \to \infty) \to b$, где b — постоянная Вина.

Нетрудно показать, что из (10) следует (4). Для этого достаточно проинтегрировать (10) по частоте от $\omega_{\min}$ до ∞ и учесть, что для сферы или куба $L(\partial\omega_{\min}/\partial L) + \omega_{\min} = 0$ (здесь $\omega_{\min}$ — наименьшая частота собственных колебаний для резонатора в форме куба или сферы). Правая часть выражения (10) пропорциональна тормозящей силе, действующей со стороны равновесного поля излучения на равномерно движущийся осциллятор частоты ω [5]. В резонаторе конечных размеров выражение для силы содержит дополнительный, отличный от нуля член $L(\partial u_\omega/\partial L)$.

Для некоторых типов резонаторов с идеально проводящими стенками поправки к известной формуле Вейля для плотности собственных частот резонатора были приближенно вычислены в [4, 6]. Так, в полном соответствии с (9) формула Вейля для куба со стороной L принимает вид $z_k = \omega^2/\pi^2 c^3 \, [1-(\pi c/L\omega)^2]$, а для сферы радиуса $L z_s = (\omega^2/\pi^2 c^3)\, [1-(c/L\omega)^2]$.

Из приведенного выше рассмотрения следует, что известная теорема Кирхгофа об универсальности функции U_ω также носит характер предельного закона. Это обстоятельство уже неоднократно отмечалось [8], причем указывалось на справедливость этой теоремы лишь в приближении геометрической оптики при $\lambda \to 0$ (λ — длины волны). Доказательство теоремы Кирхгофа обычно основывается на рассмотрении двух соединенных между собой различных полостей, содержащих равновесное излучение при одинаковой температуре [7]. Предположение о различной спектральной плотности излучения в этих полостях приводит к появлению потока энергии из одной полости в другую. Однако при этом неявно предполагается, что изменение спектра полости, вносимое отверстием, пренебрежимо мало. Это утверждение несправедливо для резонаторов конечного размера. Для того чтобы развязать резонаторы, соединяющий их волновод должен иметь достаточно малое сечение, но для свободной циркуляции излучения с длиной волны λ его сечение должно быть больше λ^2, где λ — длина волны, на которую приходится максимум излучения в формуле Планка. Поскольку изменение спектра, вносимое отверстием, определяется отношением s/S, где s и S — соответственно площадь отверстия и поверхность резонатора, то для резонатора конечного размера ограничение на площадь сечения волновода снизу приводит к необходимости учета этого изменения.

Поправки к закону Стефана—Больцмана и формуле Вина, получаемые в результате прямых вычислений сумм по собственным частотам, находятся в полном согласии с термодинамикой, которая в рассмотренных выше случаях позволяет определить общий характер зависимости этих поправок от размера резонатора.

Литература

[1] D. A. Krueger. Phys. Rev., *172*, 211, 1968.
[2] С. Бохнер. Лекции об интегралах Фурье. Физматгиз, М., 1962.
[3] K. M. Case, S. C. Chiu. Phys. Rev., *A1*, 1170, 1970.
[4] H. P. Baltes, F. K. Kneubühl. Helv. Phys. Acta, *43*, 505, 1970; H. P. Baltes, R. Muri, F. K. Kneubühl. Rev. int. hautes temp. et refract., 7, 192, 1970.
[5] А. Эйнштейн. Собрание научных трудов, т. 3. Изд. «Наука», М., 1966.
[6] H. P. Baltes, F. K. Kneubühl. Helv. Phys. Acta, *44*, 591, 1971.
[7] А. Зоммерфельд. Термодинамика и статистическая физика, стр. 173. ИЛ, М., 1955.
[8] М. Л. Левин, С. М. Рытов. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. Изд. «Наука», М., 1967.
[9] H. B. G. Casimir. Proc. Nederl. Akad. Wetensch., *51*, 793, 1948.

Поступило в Редакцию 7 июня 1972 г.