М. В. Микитко, А. В. Лубочкин
(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)

СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА С ВРАЩЕНИЕМ УПРАВЛЕНИЯМИ МИНИМАЛЬНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

Рассматривается задача стабилизации (с вращением) неустойчивых положений равновесия нелинейной модели математического маятника с приложенным к его оси подвеса управляющим моментом u:

$$\ddot{x}+\sin x=u,\quad z(0)=(x(0),\,\dot{x}(0))=z_0=(x_{10},\,x_{20}).\qquad (1)$$

Как известно, неустойчивыми состояниями равновесия системы (1) при $u=u(t)\equiv 0$, $t\ge 0$, на фазовой плоскости $z=(x,\,\dot{x})$ являются точки

$$z^k=(x=(2k+1)\pi,\ \dot{x}=0),\ k\in Z.\qquad (2)$$

Традиционно при малых начальных отклонениях $|x_{10}-\pi|+|x_{20}|$ для стабилизации неустойчивого верхнего состояния $(\pi,\ 0)$ используют линейное уравнение $\ddot{x}-x=u$. Если же начальное состояние значительно удалено от состояния равновесия $(\pi,\ 0)$, то состояния равновесия (2) при $|k|>0$, связанные с вращениями маятника, совершенно выпадают из рассмотрения. Здесь для исследования поведения нелинейной системы вводится кусочно-линейная ее аппроксимация, что позволяет решать задачу стабилизации при любых начальных возмущениях и любых движениях маятника.

Обратную связь $u=u(z)=u(x,\,\dot{x})$, $z\in R^2$, назовем ограниченной дискретной (с периодом квантования $\nu>0$) стабилизирующей в области $G\subset R^2$ для состояния равновесия (2), если: 1) $u(z^k)=0$; 2) $|u(z)|\le L$, $z\in G$; 3) траектория замкнутой системы (1): $\ddot{x}+\sin x=u(z)$, $z(0)=z_0\in G$, представляет собой непрерывное решение уравнения (1) с управлением $u(t)=u(k\nu)$, $t\in[k\nu,(k+1)\nu[$, $k=0,\ 1,\ \ldots$; 4) решение $x(t)=(2k+1)\pi$, $t\ge 0$, замкнутой системы асимптотически устойчиво, и G – область притяжения состояния равновесия $x=(2k+1)\pi$.

Для построения указанной обратной связи используется реализация в режиме реального времени позиционного решения следующей задачи

$$B_\theta(z)=\min\rho,\ \ddot{x}+f(x)=u,\ (x(0),\,\dot{x}(0))=z,\qquad (3)$$
$$(x(\theta),\,\dot{x}(\theta))=z^k,\ |u(t)|\le\rho,\ t\in[0,\ \theta],$$

где $f(x)=x-2k\pi,\ x\in[\,-\pi/2+2k\pi,\ \ \pi/2+2k\pi\,]$;

$$f(x)=-x+(2k+1)\pi,\ x\in[\,\pi/2+2k\pi,\ \ 3\pi/2+2k\pi\,],\ k\in Z.$$

При этом минимум в задаче (3) берется не только по u, но и по моментам переключения функции кусочно-линейной аппроксимации с одного линейного участка на другой.

Построенные стабилизаторы программно реализованы, просчитаны тестовые примеры.

k

k