Я. Д. Тызенгауз
(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)

ДЕМПФИРОВАНИЕ МАЯТНИКА С ВРАЩЕНИЕМ ОПТИМАЛЬНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНО-НЕГЛАДКИХ ЗАДАЧ

Рассматривается задача демпфирования (с вращением) устойчивых положений равновесия нелинейной модели математического маятника:

$$\ddot{x} + \sin x = u\,, \quad z(0) = (x(0), \dot{x}(0)) = z_0 = (x_{10}\,, x_{20}\,). \qquad (1)$$

Как известно, устойчивыми состояниями равновесия системы (1) при $u = u(t) \equiv 0$, $t \geq 0$, на фазовой плоскости $z = (x,\, \dot{x})$ являются точки

$$z^k = (x = 2k\pi,\ \dot{x} = 0)\,,\ k \in Z\,. \qquad (2)$$

Традиционно при малых начальных отклонениях $|x_{10}| + |x_{20}|$ для гашения колебаний маятника около устойчивого нижнего состояния равновесия (0, 0) используют линейное уравнение $\ddot{x} + x = u$. Если же начальное состояние заметно удалено от $(0,\ 0)$, то состояния равновесия (2) при $|k| > 0$, связанные с вращениями маятника, совершенно выпадают из рассмотрения. Здесь для исследования поведения нелинейной системы вводится ее кусочно-линейная аппроксимация, что позволяет решать задачу демпфирования для любых начальных возмущений и движений маятника.

Обратную связь $u = u(z) = u(x,\ \dot{x})$, $z \in R^2$, назовем ограниченной дискретной (с периодом квантования $\nu > 0$) демпфирующей в области $G \subset R^2$ для состояния равновесия (2), если: 1) $u(z^k) = 0$; 2) $|u(z)| \le L$, $z \in G$; 3) траектория замкнутой системы (1): $\ddot{x} + \sin x = u(z)$, $z(0) = z_0 \in G$, представляет собой непрерывное решение уравнения (1) с управлением $u(t) = u(k\nu)$, $t \in [k\nu, (k+1)\nu[$, $k = 0,\ 1,\ \ldots$; 4) решение $x(t) = 2k\pi$, $t \ge 0$, замкнутой системы асимптотически устойчиво, и G – область притяжения состояния равновесия $x = 2k\pi$.

Для построения указанной обратной связи используется реализация в режиме реального времени позиционного решения следующей задачи

$$B_\theta(z) = \min \int_0^\theta |u(t)|\ dt,\ \ddot{x} + f(x) = u,\ (x(0),\ \dot{x}(0)) = z, \quad (3)$$

$$(x(\theta),\ \dot{x}(\theta)) = z^k,\ |u(t)| \le L,\ t \in [0,\ \theta],$$

где $f(x) = x - 2k\pi$, $x \in [\ -\pi/2 + 2k\pi,\ \ \pi/2 + 2k\pi\ ]$;

$f(x) = -x + (2k+1)\pi$, $x \in [\ \pi/2 + 2k\pi,\ \ 3\pi/2 + 2k\pi\ ]$, $k \in Z$.

При этом минимум в задаче (3) берется не только по u, но и по моментам переключения функции кусочно-линейной аппроксимации с одного линейного участка на другой.

Построенные демпферы программно реализованы, просчитаны тестовые примеры.