ВЛИЯНИЕ ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП НА ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев

[1]Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины, Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь
{mvimath@yandex.ru, formation56@mail.ru}

Рассматриваются только конечные группы. Одним из содержательных направлений теории групп является изучение структуры группы, представимой в произведение своих подгрупп, в зависимости от свойств сомножителей. К первым результатам данного направления относится знаменитая теорема Бернсайда о разрешимости бипримарных групп.

Во многих работах изучались формации групп, замкнутые относительно взятия произведений определённого типа подгрупп (произвольных [1], нормальных (субнормальных) [2], абнормальных и контрнормальных [3] и т.д.).

В последние годы активно проводятся исследования формаций, замкнутых относительно произведений обобщенно субнормальных подгрупп. Здесь важную роль играет понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы, впервые введенное в классе разрешимых групп Т.О. Хоуксом в [4] и распространенное Л.А. Шеметковым в монографии [5] на произвольные группы.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$.

Формации, замкнутые относительно произведений $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, изучались в работах [6–8] и др. Важную роль в этих исследованиях играют формации с условием Шеметкова, т.е. формации $\mathfrak{F}$, у которых всякая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо циклической группой простого порядка.

В работе [9] в классе всех разрешимых групп была получена следующая характеризация формаций с условием Шеметкова.

Теорема 1. *Для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ разрешимых групп следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathfrak{F}$ содержит всякую разрешимую группу $G = AB$, у которой все циклические примарные подгруппы подгрупп A и B являются $\mathfrak{F}$-субнормальными в G.*

(2) *$\mathfrak{F}$ — формация с условием Шеметкова.*

В [10] Фиттинг показал, что произведение двух нормальных нильпотентных подгрупп нильпотентно, откуда следует, что во всякой группе существует единственная максимальная нормальная нильпотентная подгруппа $F(G)$, которую сейчас называют подгруппой Фиттинга. Эта подгруппа оказывает большое влияние на строение разрешимой группы.

В работе [11] авторами было рассмотрено еще одно обобщение субнормальности — понятие $F(G)$-субнормальной подгруппы.

Определение 2. Подгруппа H группы G называется $F(G)$-субнормальной, если H субнормальна в $HF(G)$.

В [11] изучались произведения $F(G)$-субнормальных подгрупп. В частности, была получена

Теорема 2. *Пусть группа $G = AB$ является произведением своих $F(G)$-субнормальных нильпотентных подгрупп. Тогда группа G нильпотентна.*

Для формулировки следующего результата нам потребуется конструкция прямого произведения наследственных насыщенных формаций групп [12, с. 96]. Пусть I — непустое множество. Для каждого $i \in I$ пусть $\mathfrak{F}_i$ — наследственная насыщенная формация. Предположим, что $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \emptyset$ для всех $i, j \in I$, $i \neq j$. Обозначим $\pi_i = \pi(\mathfrak{F}_i)$. Тогда $\underset{i\in I}{\times}\mathfrak{F}_i = (G = O_{\pi_{i_1}} \times \cdots \times O_{\pi_{i_n}} | O_{\pi_{i_j}} \in \mathfrak{F}_{i_j}, 1 \leq j \leq n, \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I)$.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная наследственная формация разрешимых групп и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$\mathfrak{F}$ содержит всякую разрешимую группу $G = AB$, у которой A и B — $F(G)$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы.*

(2) *Существует такое разбиение $\sigma = \{\pi_i | i \in I\}$ множества простых чисел π на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{F} = \underset{i \in I}{\times} \mathfrak{S}_{\pi_i}$.*

По известной теореме Дёрка [13] группа сверхразрешима, если она содержит четыре сверхразрешимые подгруппы с попарно взаимно простыми индексами. Фрисен [14] заметил, что если группа G есть произведение двух нормальных (субнормальных) сверхразрешимых подгрупп, имеющих взаимно простые индексы в ней, то она сверхразрешима. Следующий пример показывает, что в теореме Фрисена условие субнормальности нельзя заменить на $F(G)$-субнормальность. Пусть G — группа, изоморфная симметрической группе степени 3. Тогда существует точный неприводимый F_7G-модуль V размерности 2 над полем F_7. Пусть T — полупрямое произведение V и G. Рассмотрим $A = VG_3$ и $B = VG_2$, где G_p — силовская p-подгруппа G и $p \in \{2, 3\}$. Так как $7 \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$ для $p \in \{2, 3\}$, то нетрудно видеть, что A и B сверхразрешимы. Так как V — точный неприводимый F_7G-модуль, то $F(T) = V$. Таким образом, A и B — $F(T)$-субнормальные подгруппы T. Заметим, что $T = AB$, но T, в силу свойств F_7G-модуля V, не является сверхразрешимой группой. Тем не менее верна следующая

Теорема 4. *Пусть A, B и C — $F(G)$-субнормальные сверхразрешимые подгруппы группы G. Если индексы A, B и C в G попарно взаимно просты, то G сверхразрешима.*

Литература

1. Амберг Б., Казарин Л. С., Хефлинг Б. *Конечные группы с кратными факторизациями* // Фундамент. и прикл. матем. 1998. Т. 4, Вып. 4. С. 1251–1263.
2. Bryce R. A., Cossey J. *Fitting formations of finite soluble groups* // Math. Z. 1972. Bd. 127, № 3. S. 217–233.
3. Vasil'ev A. F. *On Products of Nonnormal Subgroups of Finite Groups* // Acta Applicandae Mathematicae. 2005. V. 85, № 1. P. 305–311.
4. Hawkes T. *On formation subgroups of a finite soluble group* // J. London Math. Soc. 1969. V. 44. P. 243–250.
5. Шеметков Л. А. *Формации конечных групп.* М.: Наука, 1978.
6. Семенчук В. Н. *Разрешимые F-радикальные формации* // Матем. заметки. 1996. Т. 59, № 2. С. 261–266.
7. Семенчук В. Н., Шеметков Л. А. *Сверхрадикальные формации* // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44, № 5. С. 24–26.
8. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. *Об одном классе наследственных насыщенных сверхрадикальных формаций* // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 1. С. 97–108.
9. Мурашко В. И. *Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами* // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1353–1367
10. Fitting H. *Beiträge zur Theorie der endlichen Gruppen* // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1938. Bd. 48. S. 77–141.
11. Мурашко В. И., Васильев А. Ф. *О произведениях частично субнормальных подгрупп конечных групп* // Вестник ВГУ. 2012. Т. 70, № 4. С. 24–27.
12. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. *Classes of Finite Groups.* Dordrecht: Springer, 2006.
13. Doerk K. *Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen* // Math. Z. 1966. Bd. 91, № 3. S. 198–205.
14. Friesen D. K. *Products of Normal Supersolvable Subgroups* // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 30, № 1. P. 46–48.