УДК 512.542

О ВЛИЯНИИ ТРЕХ НЕСОПРЯЖЕННЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП НА СТРОЕНИЕ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

А.Ф. Васильев[1], А.К. Фурс[2]

1 *formation56@mail*; Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
2 *andreyfurss@gmail.com*; Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

В данной работе исследуются конечные группы, имеющие три попарно несопряженные максимальные подгруппы, принадлежащие Z-насыщенной (насыщенной) формации. В частности, доказано, что конечная группа сверхразрешима, если она имеет три попарно несопряженные сверхразрешимые максимальные подгруппы и ее коммутант нильпотентен.

Ключевые слова: конечная группа, максимальная подгруппа, формация, Ω_3-замкнутая формация

Рассматриваются только конечные группы. Используются понятия, обозначения и результаты из [1, 2]. Напомним, что максимальной подгруппой группы называется любой максимальный элемент в множестве всех собственных подгрупп группы, упорядоченных по включению. Знание свойств максимальных подгрупп во многих случаях позволяет получить существенную информацию о строении группы в целом. В этом направлении выделим проблему распознавания принадлежности группы заданному классу $\mathfrak{F}$ в зависимости от насыщенности ее попарно несопряженными максимальными подгруппами, принадлежащими $\mathfrak{F}$. Начало исследования этой проблемы восходит к работе В. А. Белоногова [3], в которой он доказал, что группа нильпотентна, если она имеет три попарно несопряженные нильпотентные максимальные подгруппы. В [4] В. Н.Семенчук в классе разрешимых групп получил аналогичный результат для формации всех p-замкнутых групп. В работе [5] было введено следующее

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, t — целое число, $t \geq 1$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется Ω_t-замкнутым в $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ содержит всякую $\mathfrak{X}$-группу G, которая имеет t попарно несопряженных максимальных подгрупп, принадлежащих $\mathfrak{F}$.*

Естественной является следующая

Проблема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Для данного целого числа t, $t \geq 2$, конструктивно описать все формации $\mathfrak{F}$, которые являются Ω_t-замкнутыми в $\mathfrak{X}$.*

В работе [6] в классе всех разрешимых групп были конструктивно описаны все нормально наследственные насыщенные Ω_3-замкнутым формации.

Согласно [7, разд. 12.7] главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{F}$-центральным в G, если $H/K \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$, в противном случае он называется $\mathfrak{F}$-эксцентральным. Тогда $\mathfrak{F}$-гиперцентром группы G называется наибольшая нормальная подгруппа $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$ в G, в которой все проходящие через нее G-главные факторы $\mathfrak{F}$-центральны в G. В работах [8, 9] изучались формации $\mathfrak{F}$, совпадающие с классом всех групп, у которых каждый главный фактор является $\mathfrak{F}$-центральным, т. е. $\mathfrak{F} = (G \mid \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) = G)$. Семейство формаций с данным условием включает все насыщенные формации, однако далеко не исчерпывается ими. Для краткости, формация $\mathfrak{F}$ называется Z-насыщенной, если $\mathfrak{F} = (G \mid \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) = G)$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Z-насыщенная формация, замкнутая относительно взятия подгрупп Шмидта в группах, и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *$\mathfrak{F}$ является Ω_3-замкнутой формацией в классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп.*

(2) *$\mathfrak{F}$ является наследственной насыщенной формацией, которая имеет такую полную локальную функцию f, что* $f(p) = \begin{cases} \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}, & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}); \\ \varnothing, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$

Из теоремы 1 в качестве следствия получается теорема 3 из [6].

Следующая теорема решает естественную задачу описания наследственных насыщенных формаций $\mathfrak{X}$, у которых любая наследственная насыщенная подформация является Ω_t-замкнутой в $\mathfrak{X}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Любая наследственная насыщенная подформация $\mathfrak{F}$ из $\mathfrak{X}$ является Ω_3-замкнутой формацией в $\mathfrak{X}$.*

(2) *Формация $\mathfrak{X}$ состоит из групп, имеющих нильпотентный коммутант.*

Следствие 1. *Если группа G имеет три попарно несопряженные сверхразрешимые максимальные подгруппы и ее коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта Ф20Р291.

Литература

1. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups* – Berlin-New-York: Walter de Gruyter, 1992. — 891 p.

2. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. *Classes of Finite Groups* – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.

3. Белоногов В. А. *Конечные группы с парой несопряженных нильпотентных максимальных подгрупп* // Докл. Акад. наук СССР. – 1965. – Т. 161. – № 6. – С. 1255–1256.

4. Семенчук В. Н. *Конечные группы с системами минимальных не $\mathfrak{F}$-групп* // Подгрупповое строение конечных групп: тр. Гомельск. семинара. – Минск: Наука и техника. – 1981. – С. 138–149.

5. Васильев А. Ф. *О некоторых свойствах локальных формаций* // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское, 1985. – Вып. 1. – С. 4–9.

6. Васильев А. Ф. *О перечислении локальных формаций с условием Кегеля* // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское, 1992. – Вып. 7. – С. 86–93.

7. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. *Формации алгебраический систем.* – М.: Наука, 1989. – 256 с.

8. Shemetkov L A. *Frattini extensions of finite groups and formations* // Communications in Algebra. – 1997. – V. 23 – № 3. – P. 955–964.

9. Ballester-Bolinches A., Perez-Ramos M. D. *On a question of L. A. Shemetkov* // Communications in Algebra. – 1999. – V. 27. – № 11. – P. 5615–5618.

ON THE INFLUENCE OF THREE NON-CONJUGATE MAXIMAL SUBGROUPS ON THE STRUCTURE OF A FINITE GROUP

A.F. Vasil'ev, A.K. Furs

In this paper, we study finite groups that have three pairwise non-conjugate maximal subgroups belonging to an Z-saturated (saturated) formation. In particular, it is proved that a finite group *is supersoluble if it has three pairwise non-conjugate supersoluble maximal subgroups and its commutator subgroup is nilpotent.*

Keywords: finite group, maximal subgroup, formation, Ω_3-closed formation