

© ГГУ им. Ф.Скорины

ЧАСТИЧНО СУБНОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В.И. МУРАШКО, А.Ф. ВАСИЛЬЕВ

In this paper the concept of R -subnormal subgroups was introduced. With the help of this concept and the generalizations $F^*(G)$ and $\tilde{F}(G)$ of the Fitting subgroup new criteria for the nilpotency and supersolubility of finite groups were obtained

Ключевые слова: конечная группа, субнормальная подгруппа, нильпотентная группа, сверхразрешимая группа

В работе рассматриваются только конечные группы.

Одним из центральных понятий теории групп является понятие субнормальной подгруппы. Напомним, что подгруппа H группы G называется субнормальной, если существует цепь подгрупп $H=H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n=G$ такая, что H_i – нормальная подгруппа в H_{i+1} для всех $i=0,1,\dots,n-1$. В 1939 году Виландт [1] установил фундаментальные свойства субнормальных подгрупп, которые в дальнейшем использовались в решении многих задач теории групп. Можно выделить два направления в развитии концепции субнормальности. Первое направление состоит в нахождении и изучении подклассов субнормальных подгрупп, определяемых условиями перестановочности подгрупп. К таким классам, например, относятся квазинормальные, S -квазинормальные, сопряженно-перестановочные подгруппы и др. Второе направление состоит в обобщении понятия субнормальности. Примерами таких обобщений являются F -субнормальность и K - F -субнормальность.

В данной работе мы предлагаем следующее обобщение понятия субнормальности.

Определение 1. Пусть R – подгруппа группы G . Подгруппу H группы G назовем R -субнормальной, если H субнормальна в $\langle H, R \rangle$.

Очевидно, что всякая субнормальная подгруппа группы G является R -субнормальной для любой $R \leq G$. Как показывает следующий пример обратное включение в общем случае неверно.

Пример 1. Пусть группа G изоморфна симметрической группе степени 4. Тогда подгруппа Фиттинга $F(G)$ изоморфна четвертной группе Клейна и лежит в пересечении всех силовских 2-подгрупп группы G . Очевидно, что любая силовская 2-подгруппа группы G является $F(G)$ -субнормальной. Но из строения симметрической группы степени 4 следует, что они не субнормальны в G .

Напомним, что подгруппа $F^*(G)$ определяется как наибольшая нормальная квазинильпотентная подгруппа G . Подгруппа $\tilde{F}(G)$ группы G также является обобщением подгруппы Фиттинга и определяется следующими условиями $\Phi(G) \subset \tilde{F}(G)$ и $\tilde{F}(G)/\Phi(G) = \text{Soc}(G/\Phi(G))$ (см [2, с.79]). С помощью этих подгрупп мы ослабили известные критерии нильпотентности и сверхразрешимости конечных групп.

Теорема 1. Для группы G следующие условия эквивалентны:

1. G нильпотентна;
2. Всякая максимальная подгруппа группы G является $\tilde{F}(G)$ -субнормальной;
3. Всякая силовская подгруппа группы G является $F^*(G)$ -субнормальной;
4. $G = AB$, где A и B – нильпотентные $F(G)$ -субнормальные подгруппы G .

Теорема 2. Пусть группа $G = \langle A, B \rangle$ является порождением своих сверхразрешимых $F(G)$ -субнормальных подгрупп A и B . Если взаимный коммутант $[A, B]$ нильпотентен, то G сверхразрешима.

Литература

1. Wielandt, H. Eine Verallgemeinerung der invariant Untergruppen / H. Wielandt // Math. Z. – 1939. – Bd. 45. – S. 209--244.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.