

УДК 539.12

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ФОРМФАКТОРЫ МЕЗОНОВ

В.В. Андреев¹, А.Ф. Крутов²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

²Самарский государственный университет, Самара, Россия

ELECTROMAGNETIC FORM FACTORS OF MESONS

V.V. Andreev¹, A.F. Krutov²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

²Samara State University, Samara, Russia

В рамках пуанкаре-ковариантной кварковой модели, основанной на точечной форме релятивистской гамильтоновой динамике, получены среднеквадратичные радиусы и электромагнитные формфакторы легких мезонов. Вычисления проведены исходя из требования согласованного описания электрослабых характеристик и масс псевдоскалярных и векторных мезонов.

Ключевые слова: мезон, кварковая модель, электромагнитный формфактор, лептонная константа распада.

Mean-square radii and electromagnetic form factors of light mesons are obtained in the framework of Poincaré covariant quark model based on the point form of relativistic Hamiltonian dynamics. Calculations are performed with the use of the requirement of self-consistent description of electroweak properties and masses of pseudoscalar and vector mesons.

Keywords: meson, quark model, electromagnetic form factor, leptonic decay constant.

Введение

Изучение электрослабых характеристик составных кварковых систем занимает существенную часть в как теоретических, так и в экспериментальных исследованиях. Среди составных систем особый интерес вызывает описание электрослабых свойств легких мезонов – пиона и каона. Так, например, ускоритель Джефферсоновской лаборатории (JLab) уже больше 10 лет осуществляет программы по прецизионному измерению пионного и каонного, также нуклонных форм-факторов [1], [2]. Наличие обширной экспериментальной информации об этих частицах и открывает возможности проверки предсказаний различных моделей. Относительно пиона этот интерес вызван еще и дуальностью пиона как составной системы и как возможного кандидата на роль голдстоуновского бозона спонтанно нарушенной киральной симметрии КХД.

Однако, для описания с легкими кварками необходимо развитие релятивистских методов. Следует, однако, подчеркнуть, что количественное описание релятивистских адронных систем представляет собой весьма сложную задачу, которая в полном объеме вряд ли может быть решена в ближайшие годы.

Применение методов теории поля для решения этого вопроса встречает ряд серьезных проблем. Так, например, известно, что пертурбативная КХД не может быть последовательно использована к описанию связанных состояний кварков [3]. Поэтому при исследованиях свойств связанных систем получили широкое

распространение так называемые релятивистские составные модели. Цель данной работы состоит в описании одной из возможных релятивистски-инвариантных моделей электрослабой структуры двухчастичной составной системы на основе точечной формы релятивистской гамильтоновой динамики (РГД) [4].

Для описания электромагнитной структуры мезонов, как двухкварковой системы, использовалось множество подходов. Только в рамках РГД этот вопрос рассматривался в целом ряде работ, начиная от динамики на световом фронте [5]–[10] и мгновенной формы динамики [11], [12] и заканчивая точечной формой динамики [13]–[15].

Наименее разработанной формой динамики для описания электромагнитных свойств мезонов оказалась точечная форма. Результаты работы [13], которые неплохо описывали экспериментальные данные были подвергнуты критике в работе [15] за необоснованные и бездоказательные предположения. В результате, для удовлетворительного описания экспериментальных данных, в работах [15]–[17] была предложена новая и достаточно сложная разновидность точечной формы РГД, в которой необходимо было отказаться от условия равенства 4-х скоростей систем с взаимодействием и без него. И хотя в результате выбора параметров удалось приблизиться к описанию поведения формфакторов пионов, тем менее существует разница между модельными вычислениями и экспериментом [18].

В данной работе в рамках пуанкаре–ковариантной кварковой модели (ПК–модель), основанной на точечной форме РГД, покажем, что можно добиться удовлетворительного описания электромагнитных характеристик псевдоскалярных мезонов, используя оригинальную методику (см. раздел 4). При этом самосогласованное описание характеристик будет распространяться как на электрослабые (лептонные и векторные константы распадов), так и на электромагнитные характеристики (формфакторы, среднеквадратичные радиусы), включая и массы псевдоскалярных и векторных мезонов.

1 Пуанкаре–ковариантная кварковая модель мезонов

В РГД, как и вообще в релятивистской составной модели, конститuentы, составляющие систему, рассматриваются как протяженные объекты, структура которых описывается введением ряда величин таких, как среднеквадратичный радиус, формфакторы. Конститuentы взаимодействуют между собой посредством потенциала, параметры которого определяются феноменологически. Основным требованием РГД является условие сохранения пуанкаре–инвариантности как для систем без взаимодействия, так и для взаимодействующих частиц. В случае системы двух не взаимодействующих частиц с массами m_q и m_Q и соответственно с 4–импульсами $p_1 = (\omega_{m_q}(p_1), \mathbf{p}_1)$ и $p_2 = (\omega_{m_Q}(p_2), \mathbf{p}_2)$ это требование в рамках мгновенной и точечной форм РГД приводит к радиальному уравнению для связанного состояния с импульсом \mathbf{Q} , волновой функцией (ВФ) $\Phi_{\ell,S}^{J\mu}(k)$ и массой M :

$$\int_{\ell,S}^{\infty} \int_0^{\infty} V_{\ell,S;\ell',S'}^J(k,k') \Phi_{\ell',S'}^{J\mu}(k') k'^2 dk' = (M - M_0) \Phi_{\ell,S}^{J\mu}(k), \quad (1.1)$$

где $M_0 = \omega_{m_Q}(k) + \omega_{m_q}(k)$ – эффективная масса системы не взаимодействующих частиц, имеющих импульс относительного движения \mathbf{k} ($k = |\mathbf{k}|$):

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \frac{\mathbf{P}}{M_0} \left(\frac{m_Q^2 - m_q^2 - M_0 [\omega_{m_Q}(p_2) - \omega_{m_q}(p_1)]}{\omega_{m_Q}(P) + M_0} \right). \quad (1.2)$$

Отметим, как и во многих моделях (см. [19]–[22]), 4–импульс $Q = \{\omega_M(Q), \mathbf{Q}\} \neq p_1 + p_2$. Точечная форма РГД характеризуется тем, что оператор 4–скорости системы свободных частиц

$$V_p = \frac{p_1 + p_2}{M_0} = \left\{ \frac{\omega_{M_0}(P)}{M_0}, \frac{\mathbf{P}}{M_0} \right\} \quad (1.3)$$

и оператор 4–скорости связанной системы

$$V_Q = \frac{Q}{M} = \left\{ \frac{\omega_M(Q)}{M}, \frac{\mathbf{Q}}{M} \right\} \quad (1.4)$$

совпадают [4], [23]–[26].

Для описания конкретных связанных систем необходимо определить потенциал взаимодействия между частицами. При этом для описания одной и той же по составу связанной системы могут использоваться различные потенциалы. Такой выбор потенциалов автоматически определяет различные пуанкаре–ковариантные модели. В нашем случае используем межкварковый потенциал работы [27], который в случае псевдоскалярных и векторных мезонов представляет сумму кулоновской, запирающей и спин–спиновой частей:

$$\hat{V}(r) = \hat{V}_{Coulomb}(r) + \hat{V}_{linear}(r) + \hat{V}_{SS}(r), \quad (1.5)$$

$$\hat{V}_{Coulomb}(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s(r)}{r} = -\frac{4}{3r} \sum_{k=1}^7 \alpha_k \operatorname{erf}(\tau_k r),$$

$$\hat{V}_{linear}(r) = \sigma r \left[\frac{\exp(-b^2 r^2)}{\sqrt{\pi b r}} + \left(1 + \frac{1}{2b^2 r^2} \right) \operatorname{erf}(br) \right] + w_0,$$

$$\hat{V}_{SS}(r) = -\frac{32(\mathbf{S}_q \mathbf{S}_Q)}{9\sqrt{\pi} m_q m_Q} \sum_{k=1}^7 \alpha_k \tau_k^3 \exp(-\tau_k^2 r^2),$$

где параметр τ_k определяется из соотношения

$$\frac{1}{\tau_k^2} = \frac{1}{\gamma_k^2} + \frac{1}{b^2}, \quad \operatorname{erf}(x) \text{ – функция ошибок, а } \mathbf{S}_{q,Q} \text{ –}$$

операторы спинов кварков.

Для получения потенциала (1.5) были применены процедура «размазки» по следующему правилу [27], [28]:

$$\tilde{f}(r) = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(r'), \quad (1.6)$$

где функция «размазки» с параметром b выбрана в виде

$$\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{b^3}{\pi^{3/2}} \exp[-b(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2], \quad (1.7)$$

а также феноменологическое описание поведения бегущей константы, удобное для аналитических расчетов:

$$\alpha_s(Q^2) = \sum_{k=1}^{n=7} \alpha_k \exp\left[-\frac{Q^2}{4\gamma_k^2}\right]. \quad (1.8)$$

Поскольку процедура ограничения параметров основана на использовании соответствия экспериментальных и модельных значений характеристик псевдоскалярных и векторных мезонов, в которых константа $\alpha_s(Q^2 = \mathbf{k}^2)$ интегрируется, то расчеты будут «чувствительны» к той площади, которая находится под кривой, задающей поведение $\alpha_s(\mathbf{k}^2)$.

По этой причине необязательно брать для параметра потенциала α_s бегущую константу КХД

$$\alpha_{\text{QCD}}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln z_Q} \left[1 - \frac{2\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln[\ln z_Q]}{\ln z_Q} + \frac{4\beta_1^2}{\beta_0^4 \ln^2 z_Q} \left((\ln[\ln z_Q] - 1/2)^2 + \frac{\beta_2 \beta_0}{8\beta_1^2} - \frac{5}{4} \right) \right], \quad (1.9)$$

с β -функциями

$$z_Q = \frac{Q^2}{\Lambda^2}, \quad \beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f, \quad \beta_1 = 51 - \frac{19}{3}n_f, \\ \beta_2 = 2857 - \frac{5033}{9}n_f + \frac{325}{27}n_f^2,$$

а достаточно использовать ее аппроксимацию (1.8), которая должна воспроизводить хорошо изученную область $Q > 1.5$ ГэВ.

Для моделирования различного поведения константы в непертурбативной области с помощью процедуры фитирования константы (1.9) выражением (1.8) нами получены наборы параметров, отличающихся значением α_s, γ_k . Выбор режима поведения α_s диктуется требованием соответствия модельных и экспериментальных значений лептонных констант и масс легких и тяжелых мезонов.

2 Лептонные константы распадов мезонов в пуанкаре-ковариантной модели

Постоянная f_P лептонного распада $P(Q\bar{q}) \rightarrow \ell + \nu_\ell$ для псевдоскалярного мезона $P(Q\bar{q})$ после удаления элемента матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскавы V_{Qq} обычно определяется следующим соотношением:

$$j_P^\mu \equiv \left\langle 0 \left| \hat{J}_A^\mu(0) \right| \mathbf{P}, M_P \right\rangle_{in} = i(1/2\pi)^{3/2} \frac{P^\mu f_P}{\sqrt{2\omega_{M_P}(P)}}. \quad (2.1)$$

Электрослабый аксиальный ток $\hat{J}_A^\mu(0)$ и вектор состояния мезона с массой M_P берутся в представлении Гейзенберга [29].

Соответственно ширина распада $P(Q\bar{q}) \rightarrow \ell + \nu_\ell$ задается выражением

$$\Gamma_P = \frac{G_F^2 |V_{Qq}|^2}{8\pi} m_\ell^2 M_P f_P^2 \left(1 - \frac{m_\ell^2}{M_P^2} \right)^2, \quad (2.2)$$

где m_ℓ – масса лептона ℓ , а G_F – константа Ферми.

В случае лептонных распадов векторных мезонов $V(Q\bar{q}) \rightarrow \ell + \bar{\ell}$ соотношения аналогичные выражениям (2.1) и (2.2) примут вид:

$$j_V^\mu \equiv \left\langle 0 \left| \hat{J}_V^\mu(0) \right| \mathbf{P}, M_V, \lambda \right\rangle_{in} = i(1/2\pi)^{3/2} \frac{\varepsilon_\lambda^\mu M_V f_V}{\sqrt{2\omega_{M_V}(P)}}$$

с вектором поляризации ε_λ^μ векторного мезона массы M_V . Соответственно ширина распада $V(Q\bar{q}) \rightarrow \ell + \bar{\ell}$ задается выражением

$$\Gamma_V = \frac{4\pi\alpha^2}{3M_V} f_V^2 \left(1 + \frac{2m_\ell^2}{M_V^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m_\ell^2}{M_V^2}}, \quad (2.3)$$

где α – постоянная тонкой структуры.

В работах [11], [30]–[32] получены совпадающие интегральные представления для лептонных констант распадов псевдоскалярных и векторных мезонов f_P, f_V в рамках пуанкаре-ковариантных моделей, основанных на точечной и мгновенных формах РГД:

$$f_P(m_q, m_Q) = \frac{N_c}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\infty dk k^2 \Phi(k) \cdot \sqrt{\frac{M_0^2 - (m_q - m_Q)^2}{\omega_{m_q}(k)\omega_{m_Q}(k)}} \frac{(m_q + m_Q)}{M_0^{3/2}}, \quad (2.4)$$

$$f_V(m_q, m_Q) = \frac{N_c}{\sqrt{2}\pi} \int_0^\infty dk k^2 \Phi(k) \cdot \frac{\sqrt{(\omega_{m_q}(k) + m_q)(\omega_{m_Q}(k) + m_Q)}}{\sqrt{\omega_{m_q}(k) + \omega_{m_Q}(k)} \omega_{m_q}(k) \omega_{m_Q}(k)} \cdot \left(1 + \frac{k^2}{3(\omega_{m_q}(k) + m_q)(\omega_{m_Q}(k) + m_Q)} \right), \quad (2.5)$$

где N_c – число цветов кварков. Аналогичное интегральное представление для f_P получено и в пуанкаре – ковариантной модели, основанной на динамике светового фронта [9].

3 Выбор параметров модели

Решение задачи на собственные значения (1.1) с потенциалом (1.5) произведем вариационным методом с использованием волновых функций осцилляторного и кулоновского (для B -мезонов) типов. При использовании вариационного метода требуется нахождение минимума функционала

$$M(m_q, m_Q, \beta, w_0, b, \sigma) = \langle \Phi(\beta) | \hat{M} | \Phi(\beta) \rangle = \langle \Phi | \hat{M}_0 | \Phi \rangle + \langle \Phi | \hat{V} | \Phi \rangle,$$

где $\Phi(\beta)$ – пробная волновая функция.

Потенциал модели (1.5) имеет следующие свободные параметры: параметр натяжения глюонной струны σ , параметр размазки b и параметр w_0 . Также параметрами являются массы кварков $m_{q,Q}$ и наборы констант α_k, γ_k , характеризующие поведение эффективной константы сильного взаимодействия. Отметим, что значения параметров β, w_0, σ зависят от ароматов кварков.

Рассмотрим процедуру фиксации численных значений параметров потенциала. Параметр линейной части потенциала в большом количестве моделей лежит в пределах

$\sigma = 0.18 \div 0.20 \text{ ГэВ}^2$ [27], [33]–[35], поэтому в наших расчетах будем полагать, что

$$\sigma = \bar{\sigma} \pm \Delta\sigma = (0.19 \pm 0.01) \text{ ГэВ}^2. \quad (3.1)$$

Определение параметра волновой функции β и остальных параметров потенциала произведем путем решения системы уравнений:

$$\frac{\partial M_{P,V}(\beta, \sigma)}{\partial \beta} \Big|_{\beta_{\min}, \bar{\sigma}} = 0, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} M_P(w_0, \beta_{\min}, \bar{\sigma}) &= M_P \pm \Delta M_P, \\ M_V^{S=1}(\beta, \sigma) - M_P^{S=0}(\beta, \sigma) \Big|_{\beta_{\min}, \bar{\sigma}} &= \\ &= M_V - M_P \pm \delta M_{VP}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$f_P(m_q, m_Q, \beta_{\min}) = f_{\text{exp}}^P \pm \Delta f_{\text{exp}}^P, \quad (3.4)$$

$$f_V(m_q, m_Q, \beta_{\min}) = f_{\text{exp}}^V \pm \Delta f_{\text{exp}}^V, \quad (3.5)$$

где уравнения (3.2), (3.3) являются условием минимума и требованием того, чтобы модельные значения масс мезонов соответствовали экспериментальным значениям. Величины $M_{P,V}$ – экспериментальные значения массы псевдоскалярного и векторного мезонов, а $\Delta M_{P,V}$ – экспериментальная ошибка измерения этих масс. Последние два уравнения (3.4), (3.5) означают, что значения лептонной константы связи для псевдоскалярных и векторных мезонов, полученные в рамках пуанкаре–ковариантной модели совпадали (см. (2.4), (2.5)) в пределах ошибки с экспериментальными значениями f_{exp} .

Для моделирования различного поведения константы в непертурбативной области с помощью процедуры фитирования константы (1.9) выражением (1.8) нами получены наборы параметров, отличающихся значениями α_k, γ_k .

Выбор режима поведения α_s и соответственно значений α_k, γ_k основан на комбинированном анализе лептонных констант легких и тяжелых мезонов и масс псевдоскалярных и векторных мезонов.

Итогом этой процедуры является эффективная константа $\alpha_s(Q^2)$ с $\alpha_{\text{crit.}} = \alpha_s(Q^2 = 0) = 0.667$, чье поведение отображено на рисунке 1. Отметим, что сходное поведение константы наблюдается в моделях [27], [36], [37].

Предполагая, что конституэнтные массы $u-, d$ – кварков приблизительно равны [27]:

$$m_d - m_u \equiv \Delta m_{ud} = (4 \pm 1) \text{ МэВ}, \quad (3.6)$$

получим из (3.2)–(3.5) систему уравнений на основе лептонных констант распадов:

$$\begin{cases} f_V(m_u, m_d, \beta) = f_{\text{exp}}^{\rho^0} \pm \Delta f_{\text{exp}}^{\rho^0}, \\ f_P(m_u, m_d, \beta) = f_{\text{exp}}^{\pi^\pm} \pm \Delta f_{\text{exp}}^{\pi^\pm}. \end{cases}$$

Используя экспериментальные данные для π^\pm и ρ^0 -мезонов [38]

$$f_{\pi^\pm}^P = (130.4 \pm 0.04 \pm 0.2) \text{ МэВ},$$

$$f_{\rho^0}^V = (156.2 \pm 1.2) \text{ МэВ},$$

где последнее соотношение получено из выражения (2.3) и экспериментального значения ширины $\Gamma_{\rho^0} = 7.02 \pm 0.11 \text{ КэВ}$ для распада $\rho^0 \rightarrow e^+ e^-$ [38], приходим к следующим значениям масс $u-, d$ – кварков:

$$\begin{aligned} m_u &= (239.8 \pm 2.3) \text{ МэВ}, \\ m_d &= (243.8 \pm 2.3) \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

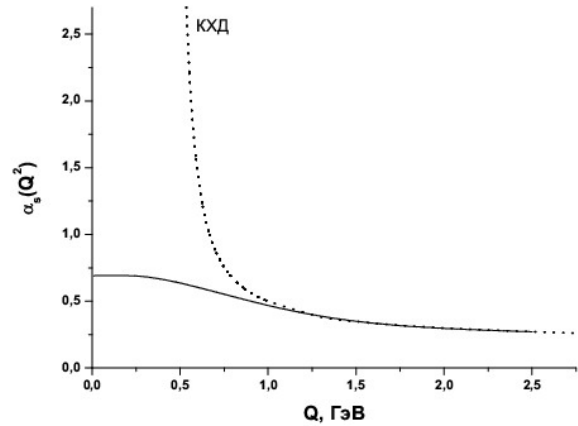


Рисунок 1 – Поведение $\alpha_s(Q^2)$ в исследуемой модели. Точками обозначено поведение константы пертурбативной КХД

При этом параметр β_π пробной осцилляционной ВФ

$$\Phi(k, \beta) = \frac{2}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \exp\left(-\frac{k^2}{2\beta^2}\right) \quad (3.8)$$

лежит в интервале

$$\beta_\pi = (328.66 \pm 1.45) \text{ МэВ}. \quad (3.9)$$

Решение системы уравнений

$$\begin{cases} \partial M_V(\beta, \dots) / \partial \beta = 0, \\ M_{K^*}(\beta, \dots) = M_{K^\pm} \pm \Delta M_{K^\pm}, \\ M_V^{S=1}(\beta, \dots) - M_P^{S=0}(\beta, \dots) = M_{K^*} - M_{K^\pm} \pm \delta M_{K^*-K^\pm}, \\ f_P(m_u, m_s, \beta) = f_{\text{exp}}^{K^\pm} \pm \Delta f_{\text{exp}}^{K^\pm} \end{cases} \quad (3.10)$$

для бегущей константы $\alpha_s(Q^2)$, отображенной на рисунке 1, с учетом экспериментальных данных [38]

$$M_{K^*} = (493.677 \pm 0.016) \text{ МэВ},$$

$$f_{K^\pm}^P = (155.5 \pm 0.2 \pm 0.8 \pm 0.2) \text{ МэВ},$$

$$\Delta M_{\text{exp}} = M_{K^*} - M_{K^\pm} = (397.983 \pm 0.261) \text{ МэВ}$$

и значений массы u – кварка (3.7) дает, что

$$\begin{aligned} m_s &= (459.9 \pm 31.7) \text{ МэВ}, \\ \beta_K &= (352.48 \pm 1.03) \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для вычисления лептонных констант тяжелых мезонов нам необходимы массы c -, b - кварков. Для расчета ограничений масс тяжелых c -, b - кварков, используем данные для $c\bar{c}$ (η_c и J/ψ – мезоны) и $b\bar{b}$ (η_b и $\gamma(1S)$ – мезоны) систем:

$$\begin{aligned} M_{\eta_c} &= (2980.3 \pm 1.2) \text{ МэВ}, \\ M_{J/\psi} &= (3096.916 \pm 0.011) \text{ МэВ}, \\ M_{\eta_b} &= (9390.9 \pm 2.8) \text{ МэВ}, \\ M_{\gamma(1S)} &= (9460.30 \pm 0.26) \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Поскольку эти системы состоят из частиц одинаковой массы, то для фиксации масс кварков достаточно использовать экспериментальные данные только для лептонных распадов векторных состояний:

$$\begin{aligned} f_{\gamma(1S)}^V &= (238.4 \pm 1.6) \text{ МэВ}, \\ f_{J/\psi}^V &= (277.6 \pm 4) \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Решение систем уравнений, аналогичных уравнениям (3.10) приводит к интервалам:

$$\begin{aligned} m_c &= (1.358 \pm 0.081) \text{ ГэВ}, \\ m_b &= (4.127 \pm 0.105) \text{ ГэВ}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

4 Методика вычисления характеристик мезонов в пуанкаре-ковариантной модели, основанной на точечной форме РГД

При изучении реакций с участием адронов h , таких как лептонные распады

$$h_i \rightarrow h_f + \ell^+ + \nu_\ell, \quad (4.1)$$

упругое рассеяние лептонов на адронах

$$\ell^+ + h_i \rightarrow \ell^+ + h_f \quad (4.2)$$

и др. в S -матричных элементах процессов имеется адронная часть S^h , которая, для вышеупомянутых процессов, может записана в виде

$$I^h(x) = {}_{out} \langle \mathbf{Q}', M', J' \mu' | S^h(x) | \mathbf{Q}, M, J \mu \rangle_{in}. \quad (4.3)$$

Здесь вектор $|\mathbf{Q}, M, J \mu\rangle$ определяет состояние адрона спина J , массы M и импульса \mathbf{Q} в представлении Гейзенберга. Матричный элемент (4.3) параметризуют посредством феноменологических формфакторов, которые определяют из экспериментов. Трансляционная инвариантность требует, чтобы

$$I^h(x) = \exp(i\hat{Q}x) I^h(0) \exp(-i\hat{Q}x). \quad (4.4)$$

Отметим, что в адронную часть входит как сильное взаимодействие (индекс *strong*), так и другие типы взаимодействий (индекс *EW*), определяющие процессы типа (4.1), (4.2) т. е. в представлении взаимодействия S -матрица имеет вид:

$$S^h(x) = T \left\{ \exp \left[i \int H_{tot}^h(x) dx \right] \right\} =$$

$$= T \left\{ \exp \left[i \int H_{tot}^{EW}(x') dx' \right] \exp \left[i \int H_{tot}^{strong}(x) dx \right] \right\} \quad (4.5)$$

с полным гамильтонианом взаимодействия $H_{tot}^h(x) = H_0^h(x) + H_{int}^h(x)$.

Вычисление матричных элементов (4.3) с учетом внутренней структуры адронов является нетривиальной задачей и в разных моделях решается отличающимися друг от друга способами. Поскольку параметризация матричного элемента (4.3) включает как формфакторы, так и 4-импульсы частиц, то возникает задача, какие компоненты необходимо использовать для вычисления формфакторов. Так в рамках моделей на основе динамики на световом фронте [7], [9], [10], [39]–[41] предлагается для расчета токов использовать только те компоненты 4-векторов, которые не содержат взаимодействия («+» – компоненты). Если в случае пространственно-подобного квадрата переданного импульса Q^2 обращение в ноль «–» – компонент тока (содержащих взаимодействие) можно достичь путем выбора специальной системы отсчета, то для времени-подобного Q^2 это сделать не удастся. И поэтому при вычислении формфакторов с $Q^2 > 0$ используют формфакторы, рассчитанные с $Q^2 < 0$ [41]. Важно отметить, что попытка решить задачу вычисления формфакторов в динамике на световом фронте в системах, отличных от специально выбранной, приводит к результатам, которые существенно отличаются от экспериментальных значений [42].

Оригинальная методика вычисления формфакторов в рамках мгновенной формы РГД, основанная на обобщении метода параметризации матричных элементов локальных операторов [43], предложена в работах [11], [12], [32], [44]. На первом этапе с использованием базиса приводимого представления группы Пуанкаре находятся формфакторы для системы без взаимодействия. На втором этапе эти формфакторы используют для расчетов наблюдаемых формфакторов с помощью интегральных представлений. При этом формфакторы, характеризующие матричный элемент (4.3), трактуются как обобщенные функции.

В рамках точечной формы РГД наивная схема вычислений, основанная только на использовании равенства 4-х скоростей для систем с взаимодействием и без него, приводит к результатам, значительно отличающихся от наблюдаемых на эксперименте [15]–[17]. Поэтому авторами работ [14], [18], [23], [45] предложена модификация точечной формы РГД, названная ими дираковской точечной формой динамики (DPF). В данной модификации РГД ими вводится дополнительный единичный вектор $\hat{\mathbf{u}}$, направление которого фиксируется путем требования

равенства 4-импульсов связанной и свободных систем в пределе слабой связи [14], [18]. Построение DPF аналогично методам расчета формфакторов в так называемых ковариантных динамиках [46]–[48], где предлагается ввести явную зависимость матричного элемента (4.3) от некоторого пространственноподобного 4-вектора λ_μ , определяющего поверхность, на которой задается состояние начального вектора состояния системы. Как следует из краткого описания методов, задача получения наблюдаемых даже в рамках РГД требует дальнейших исследований.

Ниже приведем оригинальную схему вычисления характеристик двухчастичных связанных систем в рамках точечной формы динамики РГД [30], [49]. Основной отличительной чертой является использование в матричном элементе (4.3) состояний в представлении Гейзенберга, где сильные взаимодействия учтены точно [29] и совпадение 4-х скоростей систем с взаимодействием и без него. Дополнительным условием данной методики является использование уравнения Липпмана–Швингера для векторов состояний. В предлагаемой схеме вычислений матричного элемента (4.3) можно выделить следующие этапы:

1. На первом этапе матричный элемент (4.3) параметризуют формфакторами с использованием 4-х скоростей.

2. Использование полного набора векторов двухчастичных состояний, образующих базис неприводимого представления группы Π для свободных частиц $|v_p, \mathbf{k}, \lambda_1, \lambda_2\rangle$, и последующий переход от представления Гейзенберга к представлению взаимодействия (индекс V) позволяют привести матричный элемент (4.3) к виду:

$$I^h(0) = \text{out} \langle \mathbf{Q}', M', J' \mu' | S^h(0) | \mathbf{Q}, M, J \mu \rangle_{in} = \sum_{\ell', s'} \sum_{\ell, s} \int d v_p \cdot d v_p k^2 k^2 dk' dk \langle \mathbf{Q}', M', J' \mu' | v_p, k', \ell', s' \rangle \cdot \int_V \langle v_p, k', \ell', s' | S^h(0) | v_p, k, \ell, s \rangle \cdot \langle v_p, k, \ell, s | \mathbf{Q}, M, J \mu \rangle. \quad (4.6)$$

3. Посредством разложения Клебша–Гордана для группы Π оператор (4.6) преобразуется к соотношению:

$$I^h(0) = \int d \mathbf{k}' d \mathbf{k} J^h(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2} \sum_{\lambda'_1, \lambda'_2, \nu'_1, \nu'_2} \sum_{\ell, s} \sum_{\ell', s'} \langle \frac{1}{2} \nu_1, \frac{1}{2} \nu_2 | s \lambda \rangle \langle \ell m, s \lambda | J \mu \rangle \cdot \langle s' \lambda' | \frac{1}{2} \nu'_1, \frac{1}{2} \nu'_2 \rangle \langle J' \mu' | \ell' m', s' \lambda' \rangle \cdot \int d \mathbf{k}' d \mathbf{k} \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(p_1) \omega_{m_Q}(p_2) M}{\omega_{m_q}(k) \omega_{m_Q}(k) \omega_M(Q)}}} \cdot \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(p'_1) \omega_{m_Q}(p'_2) M'}{\omega_{m_q}(k') \omega_{m_Q}(k') \omega_{M'}(Q')}}.$$

$$\cdot Y_{\ell m}^*(\theta'_k, \phi'_k) Y_{\ell m}(\theta_k, \phi_k) \Phi_{\mathbf{Q}; \ell', s'}^{* J' \mu'}(k') \Phi_{\mathbf{Q}; \ell, s}^{J \mu}(k) \cdot \int_V \langle \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}'_1, \lambda'_1, \lambda'_2 | S^h(0) | \mathbf{p}_1, \lambda_1, \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle \cdot D_{\lambda'_1 \nu'_1}^{* 1/2}(\mathbf{n}'_{W_1}) D_{\lambda'_2 \nu'_2}^{* 1/2}(\mathbf{n}'_{W_2}) D_{\lambda_1 \nu_1}^{1/2}(\mathbf{n}_{W_1}) D_{\lambda_2 \nu_2}^{1/2}(\mathbf{n}_{W_2}). \quad (4.7)$$

Таким образом, вычисление адронной части сводится к вычислению матричного элемента с частицами, составляющие адрон (кварки).

4. Следующий этап состоит в вычислении матричного элемента

$$\langle \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \lambda'_1, \lambda'_2 | S^h(0) | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \lambda_1, \lambda_2 \rangle$$

в переменных $\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_{p'}$ и \mathbf{k}, \mathbf{k}' с последующим интегрированием. При этом во всех моделях предполагается, что оператор $S^h(0)$ может быть выражен посредством операторов частиц, составляющих систему (в нашем случае кварков):

$$S^h(0) \approx S^{quark}(0). \quad (4.8)$$

Иными словами, в пуанкаре–ковариантных моделях реакции взаимодействия адронов обусловлены «внутренними» взаимодействиями кварков и глюонов, если для описания адронов привлекается составная кварковая модель. Важной особенностью пуанкаре–ковариантных моделей является то, что частицы, составляющие систему, находятся на массовой оболочке. Далее путем сравнения с феноменологической параметризацией $I^h(x)$ находят выражения для формфакторов. В процессе этих вычислений необходимо учитывать, уравнение Липпмана – Швингера

$$|p\rangle_{in} = \left(I + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} \hat{V} \right) |p\rangle_V \quad (4.9)$$

и то, что вследствие этого, выполняется соотношение [50]:

$$\hat{M} |v_p, k\rangle_V = M_0 |v_p, k\rangle_V. \quad (4.10)$$

Выражение (4.7) имеет громоздкий вид, а задача вычисления адронной части является непростой. Дополнительную трудность создают D матрицы вигнеровского вращения, которые являются нетривиальной функцией переменных $\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_{p'}$ и \mathbf{k}, \mathbf{k}' [51].

Продемонстрируем технику расчета на примере адронного матричного элемента перехода $\langle \mathbf{Q}' | J_\mu^h(0) | \mathbf{Q} \rangle$ между двумя псевдоскалярными мезонами с 4-импульсами $\mathbf{Q} (\mathbf{Q}^2 = M^2)$ и $\mathbf{Q}' (\mathbf{Q}'^2 = M'^2)$. Этот матричный элемент параметризуется двумя формфакторами:

$$\text{out} \langle \mathbf{Q}' | J_\mu^h(0) | \mathbf{Q} \rangle_{in} = \frac{f_+(q^2) (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}')_\mu + f_-(q^2) (\mathbf{Q}' - \mathbf{Q})_\mu}{(2\pi)^3 \sqrt{4\omega_M(\mathbf{Q}) \omega_{M'}(\mathbf{Q}')}}, \quad (4.11)$$

где $q^2 = (\mathbf{Q}' - \mathbf{Q})^2$.

Согласно схеме вычислений, представленной в данном разделе, параметризуем (4.11) в терминах 4-скоростей

$$V_Q = \frac{Q}{M}, V_{Q'} = \frac{Q'}{M'} \quad (4.12)$$

в следующем виде

$$j^\mu = {}_{out} \langle Q' | J_\mu^h(0) | Q \rangle_{in} = \frac{(V_{Q'} + V_Q)_\mu \xi_+(q^2) + (V_{Q'} - V_Q)_\mu \xi_-(q^2)}{(2\pi)^3 \sqrt{4V_0 V_0'}} \quad (4.13)$$

где

$$\xi_\pm(q^2) = \frac{1}{2\sqrt{MM'}} (f_+(q^2)(M \pm M') + f_-(q^2)(M' \mp M)), \quad (4.14)$$

$$V_0 = \frac{\omega_M(Q)}{M}, V_0' = \frac{\omega_{M'}(Q')}{M'}. \quad (4.15)$$

Формфактор $\xi_+(q^2)$ (4.14) в эффективной теории с тяжелыми кварками переходит в функцию Ицзура – Вайзе (см., например, [52]), а формфактор $\xi_-(q^2)$ в данной теории обращается в ноль.

В точечной форме РГД, используя (4.5) и (4.6), преобразуем ${}_{out} \langle Q' | J_\mu^h(0) | Q \rangle_{in}$ к виду

$$j^\mu \equiv \int dk' dk k^2 k'^2 \Phi_{Q'}(k') \Phi_Q(k)_V \left\langle \mathbf{V}_{12}, M' \left| T \left\{ \hat{J}^\mu(0) \exp \left[i \int H_{tot}^{strong}(x) dx \right] \right\} \right| \mathbf{V}_{12}, M \right\rangle_V. \quad (4.16)$$

Для получения формфакторов ξ_\pm необходимо вычислить свертки

$$\xi_\pm(q^2) = (2\pi)^3 \sqrt{4V_0 V_0'} \frac{[(V_{Q'} \pm V_Q)_\mu j^\mu]}{2(1 \pm \varpi)}, \quad (4.17)$$

где величина ϖ связана с инвариантами данного процесса выражением:

$$\varpi = \left[V_Q V_{Q'} \right] = \frac{M'^2 + M^2 - q^2}{2MM'}. \quad (4.18)$$

Использование точечной формы РГД, в которой $V_Q = V_{12}, V_{Q'} = V'_{12}$, и уравнения Липпмана – Швингера (4.9) приводит к тому, что (4.17) приобретает вид:

$$\xi_\pm(q^2) = (2\pi)^3 \int dk' dk k^2 k'^2 \frac{\sqrt{4V_0 V_0'}}{2(1 \pm \varpi_{12})} \cdot \Phi_{Q'}(k') \Phi_Q(k)_V \left\langle \mathbf{V}_{12}, M_0'(k') \left| T \left\{ \left[V'_{12} \pm V_{12} \right]^\mu \hat{J}_\mu(0) \right\} \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \exp \left[i \int H_{tot}^{strong}(x) dx \right] \right| \mathbf{V}_{12}, M_0(k) \right\rangle_V, \quad (4.19)$$

где

$$\varpi_{12} = \frac{M_0'^2(k') + M_0^2(k) - q^2}{2M_0(k)M_0'(k')}, \quad (4.20)$$

а $M_0(k)$ и $M_0'(k')$ инвариантные массы системы

без сильного взаимодействия в начальном и конечном состоянии.

5 Электромагнитные формфакторы псевдоскалярных мезонов в пуанкаре-ковариантной модели

Для вычисления электромагнитного формфактора псевдоскалярного мезона $P(q\bar{Q})$ используем импульсное приближение. В данном приближении вершина взаимодействия псевдоскалярного мезона с учетом кварковой структуры описывается двумя диаграммами, изображенными на рисунке 2, а вершина взаимодействия виртуального фотона с мезоном определяется посредством

$$J_\mu = {}_{out} \langle Q' | J_\mu^h(0) | Q \rangle_{in} = \frac{F_P(t)(Q+Q')_\mu}{(2\pi)^3 \sqrt{4\omega_M(Q)\omega_{M'}(Q')}} = \frac{F_P(t)(V_Q + V_{Q'})_\mu}{(2\pi)^3 \sqrt{4V_0 V_0'}}, t = -(Q' - Q)^2. \quad (5.1)$$

Поправки, связанные с сильными взаимодействиями (см. (4.5)) в диаграммах рисунка 2, учтем введением формфакторов кварков $f_{q,Q}(t)$. Отметим, что учет конечных размеров кварков в таких процессах возникает во многих моделях, включая модели, основанные на РГД [5], [9], [11], [12], [40], [48], [53].

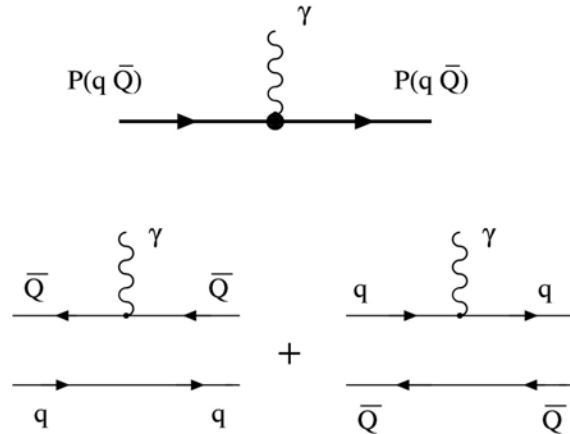


Рисунок 2 – Диаграмма взаимодействия мезона с фотоном. Ниже диаграммы, соответствующие импульсному приближению

Предсказания пертурбативной КХД поведения формфакторов мезонов при больших t диктует выбор формфакторов кварков в виде (см., например, [11], [12], [44])

$$f_q(t) = \frac{1}{1 + \ln(1 + \langle r_q^2 \rangle t) / 6}, \quad (5.2)$$

где $\langle r_q^2 \rangle$ – среднеквадратичный радиус кварка, который рассматривается как параметр модели.

Формфактор (5.2) при $t \rightarrow \infty$ дает логарифмическую поправку к степенной зависимости [11].

Среднеквадратичный радиус кварка выберем в виде [39], [54]

$$\langle r_q^2 \rangle = \frac{a}{m_q^2}, \quad (5.3)$$

где a – некоторый универсальный параметр, который имеет одно и тоже значение для всех кварков. При вычислениях, пренебрегаем в явном виде аномальными магнитными моментами кварков, которые по различным оценкам составляют $|\kappa_q| \sim 0.03 - 0.06$ (см. [55], [56]). Неопределенность, возникающую в этом случае, эффективно учтем ошибкой коэффициента a (см. (6.4)). Вычисления проведем в обобщенной системе Брейта, где

$$\mathbf{V}_Q + \mathbf{V}_Q' = 0. \quad (5.4)$$

Используя методику раздела 4 и требование сохранения тока, приходим к выражению для формфактора:

$$F_p(t) = \frac{1}{8\pi} \sum_{\nu_1, \nu_1'} \int d\mathbf{k} \Phi(k) \sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}(k) \omega_{m_Q}(k)}} \cdot \left[e_q f_q(t) \Phi^*(k_2) \sqrt{\frac{\omega_{m_Q}(k_2)}{\omega_{m_q}(k_2)}} D_{\nu_1 \nu_1'}^{1/2}(-\mathbf{n}_{W_2}(\mathbf{k}, \nu_Q)) \cdot \bar{u}_{\nu_1'}(\mathbf{k}_2, m_q) (V_{12}' + V_{12})^\mu \Gamma_\mu u_{\nu_1}(\mathbf{k}, m_q) + e_Q f_Q(t) \Phi^*(k_1) \sqrt{\frac{\omega_{m_Q}(k_1)}{\omega_{m_Q}(k_1)}} D_{\nu_1 \nu_1'}^{1/2}(-\mathbf{n}_{W_1}(\mathbf{k}, \nu_Q)) \cdot \bar{v}_{\nu_1}(-\mathbf{k}, m_Q) (V_{12}' + V_{12})^\mu \Gamma_\mu v_{\nu_1'}(-\mathbf{k}_1, m_Q) \right]. \quad (5.5)$$

В соотношении (5.5) вектор-параметры вignerовских вращений задаются в виде

$$\mathbf{n}_{W_1}(\mathbf{k}, \nu_Q) = \frac{[\mathbf{u}_{k_1} \nu_Q]}{1 + (\mathbf{u}_{k_1} \nu_Q)}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{n}_{W_2}(\mathbf{k}, \nu_Q) = -\frac{[\mathbf{u}_{k_2} \nu_Q]}{1 - (\mathbf{u}_{k_2} \nu_Q)}$$

с
$$\mathbf{u}_{k_{1,2}} = \frac{\mathbf{k}}{\omega_{m_{1,2}}(k) + m_{1,2}}, \quad (5.7)$$

а 4-вектор Γ_μ соотношением

$$\Gamma_\mu = \left[\gamma_\mu - \frac{q_\mu \cdot q^\nu}{q^2} \gamma_\nu \right], \quad q = Q' - Q. \quad (5.8)$$

Импульсы $\mathbf{k}_{1,2}$ в системе Брейта имеют вид:

$$\mathbf{k}_{1,2} = \mathbf{k} \pm \nu_Q \left((\varpi_{12} + 1) \omega_{m_{1,2}}(k) \pm \sqrt{\varpi_{12}^2 - 1} k \cos \theta_k \right), \quad (5.9)$$

$$\omega_{m_{1,2}}(k_{1,2}) = \varpi_{12} \omega_{m_{1,2}}(k) \pm \sqrt{\varpi_{12}^2 - 1} k \cos \theta_k, \quad (5.10)$$

где

$$\varpi_{12} = \frac{M_0^2(k') + M_0^2(k) + t}{2 M_0(k) M_0(k')}. \quad (5.11)$$

Вследствие импульсного приближения соотношения (5.10) и (5.11) задают уравнения для ϖ_{12} как функции переменных $k, \cos \theta_k, t$ в формуле (5.5). Решение уравнений (5.10) и (5.11) относительно несложно, но конечный результат имеет громоздкий вид. Поэтому приведем только выражение для линейного приближения по t :

$$\varpi_{1,2} = \varpi_{12} \Big|_{k'=k_{1,2}} = 1 + t \frac{\omega_{m_{1,2}}^2(k)}{\left(k^2 \cos^2 \theta_k - \omega_{m_{1,2}}^2(k) \right) \left(\omega_{m_1}(k) + \omega_{m_2}(k) \right)}, \quad (5.12)$$

которое используется для расчета среднеквадратичных радиусов. При вычислениях формфакторов будут применяться точные выражения для $\varpi_{1,2}$.

После вычисления фермионных токов в (5.5), используя метод базисных спиноров (см. [57], [58]) и ряда преобразований, формфактор псевдоскалярного мезона $F_p(t)$ модели, основанной на точечной форме РГД, запишется в виде:

$$F_p(t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\pi d(\cos \theta_k) \Phi(k) \sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}(k) \omega_{m_Q}(k)}} \cdot \left[e_q f_q(t) \Phi^*(k_2) \sqrt{\frac{\omega_{m_Q}(k_2)}{\omega_{m_q}(k_2)}} \cdot \sqrt{\frac{m_q^2 + \omega_{m_q}(k_2) \omega_{m_q}(k) + (\mathbf{k} \mathbf{k}_2)}{(\varpi_2 + 1)}} \cos(\alpha_{W_2} - \beta_{W_2}) + e_Q f_Q(t) \Phi^*(k_1) \sqrt{\frac{m_Q^2 + \omega_{m_Q}(k_1) \omega_{m_Q}(k) + (\mathbf{k} \mathbf{k}_1)}{(\varpi_1 + 1)}} \cdot \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(k_1)}{\omega_{m_Q}(k_1)}} \cos(\alpha_{W_1} - \beta_{W_1}) \right]. \quad (5.13)$$

Углы вignerовских вращений имеют вид

$$\alpha_{W_{1,2}} = \arctan \left[\frac{\nu_{Q_{1,2}} k |\sin \theta_k|}{\omega_{m_{1,2}}(k) + m_{1,2} \pm \nu_{Q_{1,2}} k \cos \theta_k} \right], \quad (5.14)$$

$$\beta_{W_{1,2}} = 2 \arctan \left[\frac{\nu_{Q_{1,2}} k |\sin \theta_k|}{p \left(\omega_{m_{2,1}}(k) + m_{2,1} \right) \pm \nu_{Q_{1,2}} k \cos \theta_k} \right], \quad (5.15)$$

где

$$p = \frac{\omega_{m_{2,1}}(k) + \omega_{m_{2,1}}(k_{1,2})}{\omega_{m_{1,2}}(k) + \omega_{m_{1,2}}(k_{1,2})},$$

$$\nu_{Q_{1,2}} = \sqrt{\frac{\varpi_{1,2} - 1}{\varpi_{1,2} + 1}}.$$

Отметим, что при $m_Q = m_q$ углы вignerовских вращений α и β совпадают и выражение (5.13) существенно упрощается. При $t=0$ из (5.13) следует, что $F_p(0) = 1$.

6 Электромагнитные радиусы мезонов

Рассчитаем среднеквадратичные радиусы заряженных пионов и каонов, используя определение

$$F_P(t) \approx 1 - \langle r_P^2 \rangle \frac{t}{6} \quad (6.1)$$

и соотношение (5.13). При расчете формфакторов остался только один свободный параметр a , связанный со структурой кварков (см. (5.3)).

Численный расчет для пиона с параметрами (3.7) и (3.9) приводит к

$$\langle r_\pi^2 \rangle = \frac{2}{3} \langle r_u^2 \rangle + \frac{1}{3} \langle r_d^2 \rangle + 0.315 \text{ Фм}^2. \quad (6.2)$$

Используя представление радиуса кварка в виде $\langle r_q^2 \rangle = a/m_q^2$ и средневзвешенное значение, полученного в результате исследований реакции $e^- + \pi \rightarrow e^- + \pi$ [59], [60]–[62]

$$\langle r_{\pi^\pm}^2 \rangle_{exp} = (0.439 \pm 0.007) \text{ Фм}^2, \quad (6.3)$$

получим, что

$$a = 0.186 \pm 0.09. \quad (6.4)$$

Модельный (рассчитанный в рамках предлагаемой модели) среднеквадратичный радиус π -мезона

$$\langle r_{\pi^\pm}^2 \rangle = (0.439 \pm 0.013) \text{ Фм}^2 \quad (6.5)$$

находится в доверительном интервале из PDG [38]

$$\langle r_{\pi^\pm}^2 \rangle_{exp} = (0.452 \pm 0.011) \text{ Фм}^2. \quad (6.6)$$

Вычисление среднеквадратичного радиуса K^\pm -мезона с использованием соотношения (6.1) и параметров (3.11), (6.4) дает, что

$$\langle r_{K^\pm}^2 \rangle = (0.358^{+0.013}_{-0.011}) \text{ Фм}^2. \quad (6.7)$$

Модельный расчет полностью лежит в экспериментальном доверительном 1σ -интервале [63]:

$$\langle r_{K^\pm}^2 \rangle_{exp} = (0.34 \pm 0.05) \text{ Фм}^2, \quad (6.8)$$

но выше среднего значения из PDG [38] – $\langle r_{K^\pm}^2 \rangle_{exp} = (0.314 \pm 0.034) \text{ Фм}^2$.

Как следует из (6.2) и (6.4), вклад в среднеквадратичный радиус пиона аналогичных радиусов u и d -кварков составляет около 27–29%. Для сравнения отметим, что в динамике на световом фронте [5], [39] такой вклад составляет 53% ($\langle r_u^2 \rangle = \langle r_d^2 \rangle = 0.23 \text{ Фм}^2$). В мгновенной форме динамика с использованием инвариантной параметризации матричных элементов локальных операторов [12], [54], [64] этот вклад достигает 61%. Таким образом, в ПК-модели вклад структуры кварков в среднеквадратичный радиус π^\pm -мезонов значительно меньше.

В рамках данной схемы можно оценить среднеквадратичный радиус нейтрального K^0 -мезона. Изучение $\langle r_{K^0}^2 \rangle$ этого радиуса интересно, тем, что эта величина чувствительна к разнице между s - и d -кварками [65]. Экспериментальные данные масс псевдоскалярного и векторного состояния системы $d\bar{s}$ [66]

$$M_{K^0} = (497.648 \pm 0.022) \text{ МэВ}, \quad (6.9)$$

$$M_{K^{*0}} = (891.66 \pm 0.26) \text{ МэВ}$$

приводят к значению параметра пробной волновой функции $\beta_{K^0} = (352.60 \pm 12.17) \text{ МэВ}$ при решении системы уравнений (3.2), (3.3).

Вычисления, аналогичные расчетам радиусов заряженных пионов и каонов, приводят к

$$\langle r_{K^0}^2 \rangle = (-0.077 \pm 0.013) \text{ Фм}^2. \quad (6.10)$$

Величина (6.10) полностью согласуется со значением из PDG [38]

$$\langle r_{K^0}^2 \rangle_{exp} = (-0.077 \pm 0.010) \text{ Фм}^2. \quad (6.11)$$

Отметим, что при вычислениях среднеквадратичных радиусов каонов свободных параметров не имелось.

В таблице 1 представлены результаты вычислений среднеквадратичных радиусов в различных моделях и подходах.

Таблица 1 – Электромагнитные радиусы мезонов в различных моделях

Модели	$\langle r_{\pi^\pm}^2 \rangle, \text{ Фм}^2$	$\langle r_{K^\pm}^2 \rangle, \text{ Фм}^2$	$\langle r_{K^0}^2 \rangle, \text{ Фм}^2$
В этой работе	0.439 ± 0.013	$0.358^{+0.013}_{-0.011}$	-0.077 ± 0.013
Модели, основанные на КХД уравнении Дайсона–Швингера	0.45 [67,68]	0.38 [67,68]	-0.086 [67,68]
	0.314 [65]	0.24 [65]	-0.020 [65]
	0.354 [69]		
Квазипотенциальная модель	0.436 [22]	0.325 [22]	-0.072 [22]
Модель Солпитера	$\gg 0.439$ [70]	0.36 [70]	-0.077 [70]
Моск-модель	0.435 [27]	0.348 [27]	-0.090 [27]
Нелокальная киральная модель	0.387 [71]		
Модели, основанные на РГД («световой фронт»)	0.449 [10]	0.327 [10]	0.00 [10]
	0.4356 [39]	0.041 [39]	-0.036 [39]
	0.449 [9]	0.327 [9]	-0.045 [9]
Эксперимент	0.420 ± 0.014 [62]	0.314 ± 0.034 [38]	-0.076 ± 0.021 [72]
	0.439 ± 0.008 [59]	0.34 ± 0.05 [63]	-0.077 ± 0.010 [38]

Отметим, что согласованное описание экспериментальных данных, связанных с массами, лептонными константами и среднеквадратичными радиусами в рамках одной модели, проведено в квазипотенциальной модели [22], ковариантной модели на основе уравнения Солпитера [70] и релятивизированной кварковой модели (Моск-модель) [27]. Результаты ПК-модели коррелируют с результатами этих работ.

7 Электромагнитные формфакторы мезонов

Важно отметить, что процедура получения среднеквадратичных радиусов, используя экспериментальные данные, отличается от расчетов с помощью (6.1) (см., например, [59]). Поэтому основным фактом, позволяющим судить о степени близости к экспериментальным данным, является поведение формфактора от переданного импульса. Вычисление формфактора π^\pm -мезона посредством (5.13) с параметром (6.4) приводит к не только достаточно хорошему согласованию с экспериментальными значениями в области малых квадратов переданных импульсов (рисунок 3), но и во всей области экспериментальных значений t , изображенных на рисунках 4–5.

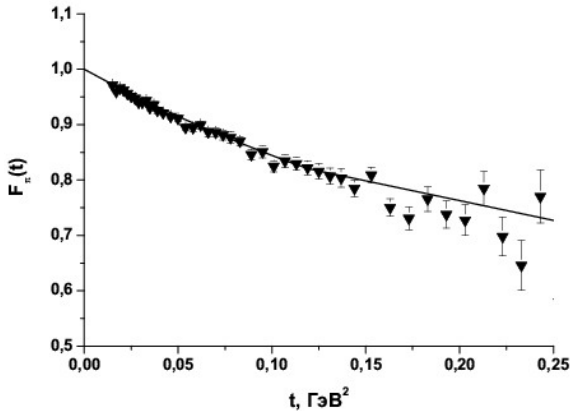


Рисунок 3 – Поведение формфактора (5.13) для пиона в области малых переданных импульсов (символ \blacktriangledown – экспериментальные значения, взятые из [59])

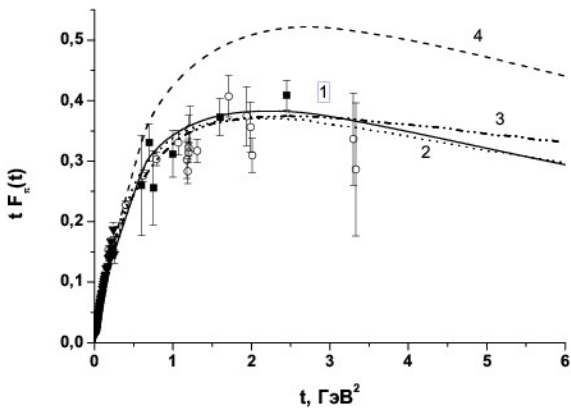


Рисунок 4 – Поведение функции $tF_\pi(t)$ для пиона

На рисунке 4 введены следующие обозначения: символ \blacktriangledown – экспериментальные значения, взятые из работы [59]; символ \blacksquare – данные JLab [73], [74]; символ \circ – данные из [75]; сплошная линия 1 – расчет в ПК-модели с учетом структуры кварков; линия 2 ($\cdots -$) – дисперсионная техника расчета форм-фактора [76]; линия 3 (\cdots) – вычисления в рамках мгновенной формы РГД [77]; линия 4 – расчет в точечной форме РГД без учета размеров кварков

Формфактор пиона в ПК-модели с ростом t убывает как $\alpha_s(t)/t$ (рисунок 4), что согласуется с расчетами формфакторов в рамках КХД.

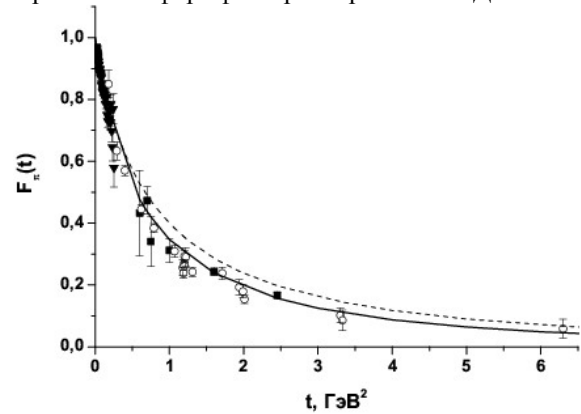


Рисунок 5 – Форм-фактор пиона в области всех известных экспериментальных данных. Обозначения те же, что и на рисунке 4.

На рисунках 4 и 5 для сравнения штриховой линией показано поведение формфактора пиона без учета структуры кварков.

Сравнительный анализ показывает хорошее согласие с дисперсионным подходом к вычислению формфакторов [76], а также с пуанкаре-инвариантной кварковой моделью, основанной на мгновенной форме РГД [12], [78], [77]. Небольшое отличие обусловлено разницей в массах кварков и учетом в [12], [78], [77] их аномальных магнитных моментов.

Поведение формфактора K^\pm -мезона в зависимости от квадрата переданного импульса t отобразено на рисунке 6.

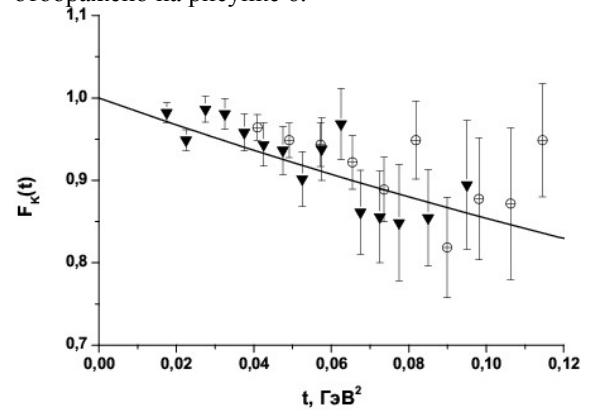


Рисунок 6 – Поведение формфактора каона при малых t

На рисунке 6 введены следующие обозначения: символ \blacktriangledown – экспериментальные значения, взятые из [63]; символ \oplus – данные из работы [61]. Из рисунка 6 видно, что имеется удовлетворительное согласование с экспериментальными значениями, взятыми из [63], и некоторое расхождение с экспериментальными значениями [61], имеющих, правда, значительные погрешности.

Заключение

С учетом всех результатов можно утверждать, что создана пуанкаре–ковариантная кварковая модель мезонов на основе точечной формы РГД. В рамках этой модели рассчитаны среднеквадратичные радиусы и электромагнитные формфакторы псевдоскалярных мезонов с учетом структуры кварков.

Получено хорошее согласование с экспериментальными данными как в области малых, так и больших Q^2 . Так, 3σ –интервалы среднеквадратичных радиусов, рассчитанных в ПК-модели, включают полностью интервалы экспериментальных значений.

В итоге получено согласованное описание масс, лептонных констант и электромагнитных формфакторов псевдоскалярных и векторных мезонов, численные оценки которых описывают современную экспериментальную информацию.

Авторы благодарят профессора Максименко Н.В. (ГГУ), профессора Троицкого В.Е. (НИ-ЯФ МГУ) за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *New results for the charged pion electromagnetic form-factor* / J. Volmer [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – Vol. 86. – P. 1713–1716.
2. *Perdrisat, C.F.* Proton elastic form factor: The JLab data / C.F. Perdrisat // *Eur. Phys. J.* – 2003. – Vol. A17. – P. 317–321.
3. *Gross, F.* Relativistic quantum mechanics and field theory / F. Gross. – N.Y. : John Wiley & Sons Inc., 1993. – 629 P.
4. *Dirac, P.A.M.* Forms of relativistic dynamics / P.A.M. Dirac // *Rev. of Modern Phys.* – 1949. – Vol. 21. – P. 392–399.
5. *Charge form-factor of pi and K mesons* / F. Cardarelli [et al.] // *Phys. Rev.* – 1996. – Vol. D53. – P. 6682–6685.
6. *Electromagnetic form-factors of the rho meson in a light front constituent quark model* / F. Cardarelli [et al.] // *Phys. Lett.* – 1995. – Vol. B349. – P. 393–399.
7. *Coester, F.* Charge form factors of quark-model pions / F. Coester, W.N. Polyzou // *Phys. Rev.* – 2005. – Vol. C71. – P. 028202.
8. *Coester, F.* Charge form factors of quark-model pions. II. [Electronic resource] / F. Coester, W.N. Polyzou. – 2004. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/nucl-th/0405082>. – Date of access: 14.01.2008.

9. *Jaus, W.* Relativistic constituent quark model of electroweak properties of light mesons / W. Jaus // *Phys. Rev.* – 1991. – Vol. D44. – P. 2851–2859.

10. *Schlumpf, F.* Charge form-factors of pseudoscalar mesons / F. Schlumpf // *Phys. Rev.* – 1994. – Vol. D50. – P. 6895–6898.

11. *Крутов, А.Ф.* Электрослабые свойства легких мезонов в релятивистской модели составных кварков / А.Ф. Крутов // *Ядерная физика.* – 1997. – Т. 60, № 8. – С. 1442–1450.

12. *Krutov, A.F.* Relativistic instant-form approach to the structure of two-body composite systems / A.F. Krutov, V.E. Troitsky // *Phys. Rev. C.* – 2002. – P. 045501.

13. *Allen, T.W.* Pion charge form factor in point form relativistic dynamics / T.W. Allen, W.H. Klink // *Phys. Rev.* – 1998. – Vol. C58. – P. 3670–3673.

14. *Desplanques, B.* Nucleon and pion form factors in different forms of relativistic quantum mechanics / B. Desplanques // *Int. J. Mod. Phys.* – 2005. – Vol. A20. – P. 1601–1606.

15. *Desplanques, B.* Form factors in the 'point form' of relativistic quantum mechanics: Single and two-particle currents / B. Desplanques, L. Theussl // *Eur. Phys. J.* – 2004. – Vol. A21. – P. 93.

16. *Desplanques, B.* Effective boost and 'point-form' approach / B. Desplanques, L. Theussl, S. Noguera // *Phys. Rev.* – 2002. – Vol. C65. – P. 038202.

17. *Comparison of different boost transformations for the calculation of form factors in relativistic quantum mechanics* / L. Theussl [et al.] // *Few Body Syst. Suppl.* – 2003. – Vol. 14. – P. 393.

18. *Desplanques, B.* Dirac's inspired point form and hadron form factors / B. Desplanques // *Nucl. Phys.* – 2005. – Vol. A755. – P. 303–306.

19. *Logunov, A.A.* Quasi-optical approach in quantum field theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // *Nuovo Cimento.* – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.

20. *Crater, H.W.* Two-body Dirac equations / H.W. Crater, P. Van Alstine // *Annals Phys.* – 1983. – Vol. 148. – P. 57–94.

21. *Savkli, C.* Quark-antiquark bound states in the relativistic spectator formalism / C. Savkli, F. Gross // *Phys. Rev.* – 2001. – Vol. C63. – P. 035208.

22. *Ebert, D.* Masses and electroweak properties of light mesons in the relativistic quark model / D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin // *Eur. Phys. J.* – 2006. – Vol. C47. – P. 745–755.

23. *Desplanques, B.* Relativistic quantum mechanics: A Dirac's point-form inspired approach / B. Desplanques // *Nucl. Phys.* – 2005. – Vol. A748. – P. 139–167.

24. *Keister, B.D.* Heavy quark symmetry and Dirac's point form dynamics / B.D. Keister // *Phys. Rev.* – 1992. – Vol. D46. – P. 3188–3194.

25. *Keister, B.D.* Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B.D. Keister, W.N. Polyzou // *Adv. Nucl. Phys.* – 1991. – Vol. 20. – P. 225–479.
26. *Klink, W.H.* Constructing Point Form Mass Operators from Interaction Lagrangians / W.H. Klink // *Nucl. Phys.* – 2003. – Vol. A716. – P. 123–135.
27. *Godfrey, S.* Mesons in a relativized quark model with chromodynamics / S. Godfrey, N. Isgur // *Phys. Rev.* – 1985. – Vol. D32. – P. 189–231.
28. *Gromes, D.* Theoretical understanding of quark forces / D. Gromes. – Heidelberg, 1989. – 64 P. – Preprint Institute of Theoretical Physics HD-THER-89-17.
29. *Биленький, С.М.* Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия / С.М. Биленький. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 327 с.
30. *Андреев, В.В.* Описание лептонных распадов в рамках пуанкаре-ковариантной кварковой модели / В.В. Андреев // *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* – 2000. – 2. – С. 93–98.
31. *Андреев, В.В.* Комптоновская поляризуемость каонов в релятивистской гамильтоновой динамике / В.В. Андреев, А.Ф. Крутов // *Вестник Самарского гос. ун-та. Естественно-научная серия. Спец. выпуск.* – 2004. – С. 111–127.
32. *Крутов, А.Ф.* Построение формфакторов составных систем с помощью обобщенной теоремы Вигнера–Экарта для группы Пуанкаре / А.Ф. Крутов, В.Е. Троицкий // *Теоретическая и математическая физика.* – 2005. – Т. 143, № 2. – С. 258–277.
33. *Ebert, D.* Quark–antiquark potential with retardation and radiative contributions and the heavy quarkonium mass spectra / D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin // *Phys. Rev.* – 2000. – Vol. D62. – P. 034014.
34. *Полулептонные распады псевдоскалярных мезонов в мгновенной форме релятивистской гамильтоновой динамики* / Е. В. Баландина [и др.] // *Ядерная физика.* – 2000. – Т. 63, № 2. – С. 301–311.
35. *Kalashnikova, Y.S.* QCD string in light-light and heavy-light mesons / Y.S. Kalashnikova, A.V. Nefediev, Y.A. Simonov // *Phys. Rev.* – 2001. – Vol. D64. – P. 014037.
36. *Badalian, A.M.* Freezing of QCD coupling alpha(s) affects the short distance static potential / A.M. Badalian, D.S. Kuzmenko // *Phys. Rev.* – 2002. – Vol. D65. – P. 016004.
37. *Ganbold, G.* QCD running coupling in low-energy region / G. Ganbold // *Phys. Rev. D.* – May 2010. – Vol. 81, № 9. – P. 094008.
38. *The Review of Particle Physics* / C. Amsler [et al.] // *Physics Letters.* – 2008. – Vol. B667. – P. 1. – 2009 partial update for the 2010 edition.
39. *Hard constituent quarks and electroweak properties of pseudoscalar mesons* / F. Cardarelli [et al.] // *Phys. Lett.* – 1994. – Vol. B332. – P. 1–7.
40. *Chung, P.L.* Charge form-factors of quark model pions / P.L. Chung, F. Coester, W.N. Polyzou // *Phys. Lett.* – 1988. – Vol. B205. – P. 545–548.
41. *Jaus, W.* Semileptonic decays of B and D mesons in the light front formalism / W. Jaus // *Phys. Rev.* – 1990. – Vol. D41. – P. 3394.
42. *Simula, S.* Comparison among Hamiltonian light-front formalisms at $q^+=0$ and $q^+ \neq 0$: Space-like elastic form factors of pseudoscalar and vector mesons / S. Simula // *Phys. Rev.* – 2002. – Vol. C66. – P. 035201.
43. *Чешков, А.А.* Инвариантная параметризация локальных операторов / А.А. Чешков, Ю.М. Широков // *ЖЭТФ.* – 1963. – Т. 44, № 6. – С. 1982–1992.
44. *Krutov, A.F.* Relativistic properties of spin and pion electromagnetic structure / A.F. Krutov, V.E. Troitsky // *J. High Energy Physics.* – 1999. – Vol. 10. – P. 028.
45. *Amghar, A.* The form factor of the pion in 'point-form' of relativistic dynamics revisited / A. Amghar, B. Desplanques, L. Theussl // *Phys. Lett.* – 2003. – Vol. B574. – P. 201–209.
46. *Кадышевский, В.Г.* Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // *ЭЧАЯ.* – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.
47. *Карманов, А.А.* Релятивистские составные системы в динамике на световом фронте / А.А. Карманов // *ЭЧАЯ.* – 1988. – С. 526–578.
48. *Кондратюк, Л.А.* Формфакторы переходов и вероятности полелептонных распадов В и D-мезонов в ковариантной динамике на световом фронте / Л.А. Кондратюк, Д.В. Чекин // *Ядерная физика.* – 2001. – Т. 64, 4. – С. 786–812.
49. *Андреев, В.В.* Точечная форма релятивистской гамильтоновой динамики и электромагнитный радиус пиона / В.В. Андреев, А.В. Соновский // *Известия ГГУ им. Ф. Скорины.* – 2001. – 5 (8). – С. 8–12.
50. *Lucha, W.* Relativistic treatment of fermion anti-fermion bound states / W. Lucha, H. Rupperecht, F.F. Schoberl // *Phys. Rev.* – 1991. – Vol. D44. – P. 242–249.
51. *Андреев, В.В.* О вигнеровских вращениях спиновых базисов в векторной параметризации группы Лоренца / В.В. Андреев // *Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.* – 1988. – № 3. – С. 73–78.
52. *Covariant quark model of form-factors in the heavy mass limit* / A. Le Yaouanc [et al.] // *Phys. Lett.* – 1996. – Vol. B365. – P. 319–326.
53. *Chung, P.L.* Relativistic constituent quark model of nucleon form-factors / P.L. Chung, F. Coester // *Phys. Rev.* – 1991. – Vol. D44. – P. 229–241.
54. *Krutov, A.F.* Relativistic instant-form approach to the structure of two-body composite systems. Nonzero spin. [Electronic resource] /

- A.F. Krutov, V.E. Troitsky. – 2003. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0307217>. – Date of access: 14.01.2008.
55. *Gerasimov, S.B.* Electromagnetic moments of hadrons and quarks in a hybrid model / S.B. Gerasimov. – Dubna, Russia: JINR, 1989. – 19 P. – (Preprint JINR E2-89-837).
56. *Gerasimov, S.B.* Magnetic moments of baryons and strange content of the nucleon / S.B. Gerasimov // Phys. Lett. – 1995. – Vol. B357. – P. 666–670.
57. *Андреев, В.В.* Аналитическое вычисление фейнмановских амплитуд / В.В. Андреев // Ядерная физика. – 2003. – Т. 66, 2. – С. 410–420.
58. *Андреев, В.В.* Методы вычисления амплитуд в квантовополевых теориях и моделях / В.В. Андреев. – Гомель: УО «Гомельский государственный университет им.Ф. Скорины», 2004. – 235 с.
59. *A measurement of the space-like pion electromagnetic form-factor* / S.R. Amendolia [et al.] // Nucl. Phys. – 1986. – Vol. B277. – P. 168–216.
60. *A measurement of the pion charge radius* / S.R. Amendolia [et al.] // Phys. Lett. – 1984. – Vol. B146. – P. 116–131.
61. *Direct measurement of the negative kaon form-factor* / E.B. Dally [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1980. – Vol. 45. – P. 232–235.
62. *Measurement of the Sigma – charge radius by Sigma–electron elastic scattering* / I. Eschrich [et al.] // Phys. Lett. – 2001. – Vol. B522. – P. 233–239.
63. *A Measurement of the kaon charge radius* / S.R. Amendolia [et al.] // Phys. Lett. – 1986. – Vol. B178. – P. 435–454.
64. *Krutov, A.F.* On a possible estimation of the constituent-quark parameters from Jefferson Lab experiments on pion form factor / A.F. Krutov, V.E. Troitsky // Eur. Phys. J. – 2001. – Vol. C20. – P. 71–76.
65. *Burden, C.J.* Electromagnetic Form Factors of Charged and Neutral Kaons / C.J. Burden, C.D. Roberts, M.J. Thomson // Phys. Lett. – 1996. – Vol. B371. – P. 163–168.
66. *Review of Particle Physics* / W.-M. Yao [et al.] // Journal of Physics G. – 2006. – Vol. 33. – P. 1.
67. *Maris, P.* The pi, K+, and K0 electromagnetic form factors / P. Maris, P.C. Tandy // Phys. Rev. – 2000. – Vol. C62. – P. 055204.
68. *Maris, P.* Electromagnetic transition form factors of light mesons / P. Maris, P.C. Tandy // Phys. Rev. – 2002. – Vol. C65. – P. 045211.
69. *Roberts, C.D.* Electromagnetic pion form-factor and neutral pion decay width / C.D. Roberts // Nucl. Phys. – 1996. – Vol. A605. – P. 475–495.
70. *Electromagnetic meson form-factors in the Salpeter model* / C.R. Munz [et al.] // Phys. Rev. – 1995. – Vol. C52. – P. 2110–2119.
71. *Dorokhov, A.E.* Pion radii in nonlocal chiral quark model / A.E. Dorokhov, A.E. Radzhabov, M.K. Volkov // Eur. Phys. J. – 2004. – Vol. A21. – P. 155–159.
72. *Investigation of K(L,S) → pi+ pi- e+ e- decays* / A. Lai [et al.] // Eur. Phys. J. – 2003. – Vol. C30. – P. 33–49.
73. *Determination of the Charged Pion Form Factor at Q² = 1.60 and 2.45 (GeV/c)²* / T. Horn [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2006. – Vol. 97. – P. 192001.
74. *Determination of the pion charge form factor for Q² = 0.60–1.60 GeV²* / V. Tadevosyan [et al.] // Phys. Rev. – 2007. – Vol. C75. – P. 055205.
75. *Electroproduction of single pions at low epsilon and a measurement of the pion form-factor up to q² = 10-GeV²* / C.J. Bebek [et al.] // Phys. Rev. – 1978. – Vol. D17. – P. 1693–1712.
76. *Donoghue, J.F.* Asymptotic limits and the structure of the pion form factor / J.F. Donoghue, E.S. Na // Phys. Rev. D. – 1997. – Vol. 56, № 11. – P. 7073–7076.
77. *Крутов, А.Ф.* Мгновенная форма пуанкаре-инвариантной квантовой механики и описание структуры составных систем / А.Ф. Крутов, В.Е. Троицкий // ЭЧАЯ. – 2009. – Т. 40, № 2. – С. 268–318.
78. *Krutov, A.F.* Nonperturbative relativistic approach to pion form factor versus JLab experiments / A.F. Krutov, V.E. Troitsky, N.A. Tsirova // Phys. Rev. – 2009. – Vol. C80. – P. 055210.

Поступила в редакцию 21.02.11.