УДК 539.186

# О РЕЛАКСАЦИИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ АТОМОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

*Ю. А. Куденко* и *А. П. Сливинский*

Рассматривается действие внешнего поля со случайно меняющейся фазой на пару двухуровневых атомов, взаимодействие между которыми (кулоновское и обменное) зависит от состояния членов пары. В условиях, близких к резонансу, проведено точное усреднение матрицы плотности. Найдены все релаксационные константы независимо от соотношений между амплитудой внешнего поля, константой взаимодействия и обратным временем расцепления корреляции фаз внешнего поля. Описаны особенности релаксации диагональных и недиагональных элементов матрицы плотности при сильном взаимодействии атомов. В частности, при увеличении взаимодействия наблюдается сужение ширины уровня, в то время как ширина линии совпадает с обратным корреляционным временем поля накачки.

## Введение

В ряде работ [1–3, 5, 6] методом Гайтлера—Ма [4] подробно исследовались коллективные свойства пар одинаковых неподвижных атомов, взаимодействующих в диполь-дипольном приближении в присутствии поля вакуума. При этом один из атомов мог находиться в возбужденном состоянии. Распад одновременно возбужденных атомов при аналогичных условиях изучался в работах [6–8]. В этом случае оказалось, что динамика высвечивания не зависит от взаимодействия атомов [8], как и в случае одного возбуждения [6].

Общей особенностью работ [1–8] является учет взаимодействия системы атомов с полем вакуума в рамках метода Гайтлера—Ма [4]. Это приводит к тому, что в уравнениях движения системы релаксационные константы не зависят от свойств взаимодействия атомов. В действительности, однако, параметры релаксации, входящие в уравнения движения, сами являются функциями всех свойств системы и это можно было бы обнаружить при более точном микроскопическом учете динамики поля вакуума. Трудности, возникающие при этом, общеизвестны (см., например, [9]). Поэтому для выяснения общей картины релаксации системы взаимодействующих атомов представляет интерес рассмотреть задачу, в которой вместо поля вакуума введено некоторое внешнее поле (поле накачки) с точно заданными характеристиками случайного изменения во времени. При таком подходе релаксация системы полностью определяется в результате усреднения по заданному случайному внешнему полю.[1] Путем удобного выбора случайного процесса, описывающего поле накачки, удается точно провести усреднение уравнений движения атомов и определить динамику системы для произвольных соотношений между параметрами интенсивности накачки, корреляционным временем поля накачки и константой взаимодействия атомов.

Рассматриваемая ситуация реализуется, например, для достаточно медленно движущихся атомов газа или для атомов и ионов присадки, когда с увеличением их концентрации возникают парные корреляции.

[1] В такой постановке некоторые простые примеры были рассмотрены Кубо [10].

## § 1. Гамильтониан и уравнения движения

Для простоты ограничимся рассмотрением двух одинаковых неподвижных водородоподобных атомов. Система из двух таких атомов характеризуется триплетным и синглетным спиновыми состояниями. В отсутствие внешнего магнитного поля в гамильтониане не содержится операторов, действующих на спиновые функции, и, следовательно, нет переходов между этими состояниями. Таким образом, при исследовании уравнений движения для рассматриваемой системы мы будем иметь дело с двумя различными группами уравнений в соответствии с тем, является ли исходное состояние системы триплетным или синглетным. Для общности допустим возможность перекрытия волновых функций. Тогда волновая функция системы имеет вид

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} U_1(\mathbf{r}_1, t) & \pm U_2(\mathbf{r}_1, t) \\ U_1(\mathbf{r}_2, t) & U_2(\mathbf{r}_2, t) \end{vmatrix}; \quad \int |\Psi|^2 \, d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = 1. \qquad (1.1)$$

Верхний знак в (1.1) относится к триплетному состоянию, нижний — к синглетному.

Для атома с неэквидистантным энергетическим спектром можно ограничиться лишь двумя состояниями, частота перехода между которыми близка к частоте поля накачки.

$$U_i(\mathbf{r}_k, t) = c_{i1}(t)\,\psi_{i1}(k) + c_{i2}(t)\,\psi_{i2}(k), \qquad (1.2)$$

где одноатомные волновые функции в представлении взаимодействия имеют вид

$$\psi_{mn}(k) = R_{mn}(\mathbf{r}_k)\exp(-i\varepsilon_{mn}t).$$

Здесь первый индекс нумерует атом, второй состояние, $\varepsilon_{mn}$ — энергия ($\hbar = 1$), при этом индекс 1 отнесен к основному состоянию, индекс 2 — к возбужденному. Волновые функции ортонормированы

$$\int \psi^*_{mn}(k)\,\psi_{pq}(k)\,d\mathbf{r}_k = \delta_{mp}\delta_{nq}. \qquad (1.3)$$

Гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_{01} + \hat{H}_{02} + \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{g}_{12}. \qquad (1.4)$$

Здесь $\hat{H}_{0i}$ — оператор свободного $i$-го атома, $\hat{P}_i = \hat{\mathbf{d}}_i\mathbf{E}_0\cos[\omega t + \varphi(t)]$ — оператор электродипольного взаимодействия $i$-го атома с монохроматическим полем накачки частоты $\omega$ и случайной фазой $\varphi(t)$, $\hat{g}_{12}$ — оператор кулоновского взаимодействия.

Для пары атомов удобно пользоваться четырехиндексной матрицей плотности

$$\rho_{\alpha\beta;\,ik} = c_{1\alpha}c^*_{1\beta}c_{2i}c^*_{2k}. \qquad (1.5)$$

Среднее значение произвольного оператора $\hat{A}$ имеет вид

$$\langle\hat{A}\rangle = \mathrm{Sp}\,(\hat{\rho}\hat{A}) = \rho_{\alpha\beta;\,ik}A_{\beta\alpha;\,ki}, \qquad (1.6)$$

здесь и далее суммирование идет по повторяющимся индексам.

Уравнение для матрицы плотности системы будет иметь вид

$$\dot{\rho}_{\alpha\beta;\,ik} = i\,[\rho_{\alpha\gamma;\,in}H_{\gamma\beta;\,nk}], \qquad (1.7)$$

$$H'_{\gamma\beta;\,nk} = V_{\gamma\beta}\delta_{nk} + \delta_{\gamma\beta}V_{nk} + Q_{\gamma\beta;\,nk} \pm J_{\gamma\beta;\,nk}, \qquad (1.8)$$

$$V_{12} = G_{12}\exp[-i\Delta t - i\varphi(t)] + G^*_{21}\exp[i(2\omega - \Delta) + i\varphi(t)]$$

$$\Delta = \omega - (\varepsilon_{k2} - \varepsilon_{k1}). \qquad (1.8а)$$

Кулоновские и обменные интегралы

$$Q_{\alpha\beta;\,ik} = \int \psi^*_{1\alpha}(1)\,\psi_{1\beta}(1)\,\hat{g}_{12}\psi^*_{2i}(2)\,\psi_{2k}(2)\,d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2,$$

$$J_{\alpha\beta;\,ik} = \int \psi^*_{1\alpha}(1)\,\psi_{1\beta}(2)\,\hat{g}_{12}\psi^*_{2i}(2)\,\psi_{2k}(1)\,d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \qquad (1.8б)$$

Так как мы ограничиваемся резонансным случаем, то оставляем следующие кулоновские интегралы и наибольший обменный интеграл: $Q = Q_{11;\,22} = Q_{22;\,11}$; $Q_1 = Q_{22;\,22}$; $q = Q_{21;\,12} = Q_{12;\,21}$; $J_{22;\,22} = J$; $Q_0 = Q_{11;\,11}$; $K = Q_1 \pm J$. Таким образом, для описания синглетной пары выбираем положительный обменный интеграл, для триплетной — отрицательный. $V = V_{12} = G_{12} \exp[-i\Delta t - i\varphi(t)]$.

Условие нормировки на полную волновую функцию имеет вид

$$\rho_{\alpha\alpha;\,kk} = 1. \tag{1.9}$$

Система уравнений (1.7) обладает следующим свойством симметрии:

$$\rho_{11;\,22} + \rho_{22;\,11} = \rho_{21;\,12} + \rho_{12;\,21}, \tag{1.10}$$

что позволяет разбить систему (1.7) на две независимые подсистемы

$$\left.\begin{aligned} &\dot a = i\,(xV^* - Vx^*);\ \dot b = 3i(yV^* - Vy^*);\ \dot x = 2iVa - i\beta y + i\delta x,\\ &\dot y = 2iVb + 4iV^*z - i\beta x + i\delta y;\ \dot z = iVy + 2i\delta z\\ &\text{плюс уравнения для комплексно сопряженных } x,\ y,\ z. \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot c = i\,(w^*V - V^*w) + 2iqd;\ \dot d = i\,(u^*V + V^*u) + 2iqc,\\ &\dot u = 2iVc - i\beta w + i\delta u;\ \dot w = -2iVd - i\beta u + i\delta w\\ &\text{плюс уравнения для комплексно сопряженных } u,\ w. \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$a = \rho_{11;\,11} - \rho_{22;\,22};\ b = \rho_{11;\,11} + \rho_{22;\,22} - 2\,(\rho_{22;\,11} + \rho_{11;\,22}); \tag{1.11a}$$

$$x = \rho_{12;\,11} + \rho_{11;\,12} + (\rho_{22;\,12} + \rho_{12;\,22});$$

$$y = \rho_{12;\,11} + \rho_{11;\,12} - (\rho_{12;\,22} + \rho_{22;\,12});\ z = \rho_{12;\,12}; \tag{1.11б}$$

$$c = \rho_{22;\,11} - \rho_{11;\,22};\ d = \rho_{21;\,12} - \rho_{12;\,21}; \tag{1.12a}$$

$$u = \rho_{12;\,11} - \rho_{11;\,12} + (\rho_{22;\,12} - \rho_{12;\,22});\ w = \rho_{12;\,11} - \rho_{11;\,12} - (\rho_{22;\,12} - \rho_{12;\,22}); \tag{1.12б}$$

$$\beta = (K + Q_0)/2 - Q - q;\ \delta = (K - Q_0)/2. \tag{1.13}$$

Разбиение на две независимые подсистемы отражает факт существования у пары атомов двух независимых каналов распада или возбуждения [1, 8], симметричный и асимметричный по возбуждению. Как показано в работе [8], с симметричным промежуточным состоянием наиболее эффективно взаимодействуют фотоны, для которых разность фаз $\mathbf{qR}$ есть $\pm 2\pi n$, а с асимметричным взаимодействуют фотоны, разность фаз для которых $\pm 2\pi\ (2n+1)$, здесь $\mathbf{q}$ — волновой вектор и $\mathbf{R}$ — межатомное расстояние.

Отметим, что элементы матрицы плотности $\rho_{11;\,11}$ $\rho_{22;\,22}$, $\rho_{12;\,12}$, $\rho_{21;\,21}$ находятся только из одной подсистемы (1.11), которая определяет симметричный канал. Остальные же элементы матрицы плотности определяются одновременно обеими подсистемами (1.11) и (1.12), т. е. их динамика определяется одновременно симметричным ($S$) и асимметричным ($A$) каналами.

Для свободных атомов переменные подсистемы (1.12) тождественно обращаются в нуль и система атомов в этом случае описывается только симметричной по возбуждению волновой функцией.

## § 2. Усреднение уравнений движения

Выберем закон изменения фазы в виде

$$\varphi(t) = \alpha \int_0^t \sum_k \delta\,(t' - t_k)\,dt', \tag{2.1}$$

т. е. фаза увеличивается скачкообразно в точках $t_k$, попадающих в интервал $(0,\ t)$, на одну и ту же величину $\alpha$. Распределение точек сбива фаз предполагается случайным и заданным в виде пуассоновского распределения. Следовательно, вероятность появления сбива фазы в интервале $(t, t+dt)$ равна $\lambda dt$. Время $1/\lambda = \tau_0$ имеет смысл среднего времени между сбивами, и будем полагать $\omega_0 \gg \lambda$.

При введении новых переменных

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \exp [i\Delta t + i\varphi (t)], \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \exp [i\Delta t + i\varphi (t)], \; z_1 = z \exp [2i\Delta t + 2i\varphi (t)] \tag{2.2}$$

(1. 11) и (1. 12) перепишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} &\dot a = iG^* x_1 - iGx_1^*; \; \dot b = 3iG^* y_1 - 3iGy_1^*; \; \dot x_1 = \\ &= 2iGa - i\beta y_1 + i\Big[\delta + \Delta + \alpha \sum_k \delta (t - t_k)\Big] x_1; \\ &\dot y_1 = 2iGb + 4iG^* z_1 - i\beta x_1 + i\Big[\delta + \Delta + \alpha \sum_k \delta (t - t_k)\Big] y_1; \\ &\dot z_1 = iGy_1 + 2i\Big[\delta + \Delta + \alpha \sum_k \delta (t - t_k)\Big] z_1 \\ &\text{плюс уравнения для комплексно-сопряженных } x_1, \; y_1, \; z_1. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot c = iGw_1^* - iG^* w_1 + 2iqd; \; \dot d = iGu_1^* + iG^* u_1 + 2iqc; \\ &\dot u_1 = 2iGc - i\beta w_1 + i\Big[\delta + \Delta + \alpha \sum_k \delta (t - t_k)\Big] u_1; \\ &\dot w_1 = -2iGd - i\beta u_1 + i\Big[\delta + \Delta + \alpha \sum_k \delta (t - t_k)\Big] w_1 \\ &\text{плюс уравнения для комплексно-сопряженных } u_1, \; w_1. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Вид подсистем (2. 3) и (2. 4) позволяет применить метод, использованный, например, в работах [12–14].

Рассмотрим фазовое пространство комбинаций случайных переменных $\rho_{\alpha\beta;\, ik}$, входящих в (2. 3) и (2. 4). Набор этих переменных будем описывать вектором $\xi$. Составим уравнение баланса для функции распределения $f(\xi, t)$, описывающее изменение числа точек в элементе фазового объема $d\xi$ с координатой $\xi$ за время $dt$

$$f[\xi (f + dt), \; t + dt] \, d\xi (t + dt) - f (\xi, t) \, d\xi (t) = -\lambda dt f (\xi, t) \, d\xi (t) + \lambda dt f (\xi, t) \, d\xi (t).$$

Здесь первый член в правой части учитывает уход точек из $d\xi$ и второй — приход из $d\xi$ вследствие столкновений. Переходя к пределу $dt \to 0$, получаем кинетическое уравнение для функции распределения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot\xi f) = -\lambda \Big[f (\xi, t) - f (\xi, t) \frac{\partial \xi}{\partial \xi}\Big]. \tag{2.5}$$

Для вывода связи между $\xi$ и $\xi$ воспользуемся решением уравнения движения общего вида, и в малой $\varepsilon$ окрестности точки столкновения: $\xi (t + \varepsilon) = \xi (t - \varepsilon) \exp \Big\{i\omega [(t + \varepsilon) - (t - \varepsilon)] + i\alpha \int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \delta (t' - t_\varepsilon) \, dt'\Big\}$, устремляя $\varepsilon$ к нулю, получаем связь: $\xi = \xi \exp (i\alpha)$.

Исполняя это процедуру для уравнения (2. 3) и подставив в (2. 5),

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -i (G^* x_1 - Gx_1^*) \frac{\partial f}{\partial a} - 3i (G^* y_1 - Gy_1^*) \frac{\partial f}{\partial b} - i \frac{\partial}{\partial x} \{[2Ga - \beta y_1 + (\delta + \Delta) x_1] f\} -$$

$$- i \frac{\partial}{\partial y_1} \{[2Gb + 4G^* z_1 - \beta x_1 + (\delta + \Delta) y_1] f\} - i \frac{\partial}{\partial z_1} \{[Gy_1 + 2 (\delta + \Delta) z_1] f\}$$

$$\text{плюс к. с. члены} + \lambda f (a, \; b, \; x_1 e^{-i\alpha}, \; y_1 e^{-i\alpha}, \; z_1 e^{-2i\alpha}, \; \text{к. с.}, \; t) - \lambda f. \tag{2.6}$$

Здесь учтено, что якобиан $\partial \bar{\xi}/\partial \xi = 1$. Умножая последовательно (2.6) на $a$, $b$, $x_1$, $y_1$, $z_1$, $x_1^*$, $y_1^*$, $z_1^*$ и интегрируя по всему фазовому пространству, получим следующие уравнения для первых моментов

$$\left.\begin{aligned} &\langle \dot{a} \rangle = iG^* \langle x_1 \rangle - iG \langle x_1^* \rangle; \ \langle \dot{b} \rangle = 3i \left(G^* \langle y_1 \rangle - G \langle y_1^* \rangle\right); \\ &\langle \dot{x}_1 \rangle = 2iG \langle a \rangle - i\beta \langle y_1 \rangle + [i(\delta + \Delta) + \lambda (e^{i\alpha} - 1)] \langle x_1 \rangle; \\ &\langle \dot{y}_1 \rangle = 2iG \langle b \rangle + 4iG \langle z_1 \rangle - i\beta \langle x_1 \rangle + [i(\delta + \Delta) + \lambda (e^{i\alpha} - 1)] \langle y_1 \rangle; \\ &\langle \dot{z}_1 \rangle = iG \langle y_1 \rangle + [2i(\delta + \Delta) + \lambda (e^{2i\alpha} - 1)] \langle z_1 \rangle \\ &\text{плюс уравнения для комплексно-сопряженных } \langle x_1 \rangle, \langle y_1 \rangle, \langle z_1 \rangle. \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Выполняя аналогичные операции для (2.4), получим

$$\left.\begin{aligned} &\langle \dot{c} \rangle = iG \langle w_1^* \rangle - iG^* \langle w_1 \rangle + 2iq \langle d \rangle, \\ &\langle \dot{d} \rangle = iG \langle u_1^* \rangle + iG^* \langle u_1 \rangle + 2iq \langle c \rangle; \\ &\langle \dot{u}_1 \rangle = 2iG \langle c \rangle - i\beta \langle w_1 \rangle + [i(\delta + \Delta) + \lambda (e^{i\alpha} - 1)] \langle u_1 \rangle; \\ &\langle \dot{w}_1 \rangle = -2iG \langle d \rangle - i\beta \langle u_1 \rangle + [i(\delta + \Delta) + \lambda (e^{i\alpha} - 1)] \langle w_1 \rangle \text{ плюс урав-} \\ &\text{нения для комплексно-сопряженных } \langle u_1 \rangle, \langle w_1 \rangle. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Из этих систем уравнений для средних мы можем определить динамику только для комбинаций диагональных элементов матрицы плотности $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$, $\langle c \rangle$, $\langle d \rangle$.

В Приложении приведены соответствующие подстановки, которые позволяют определить динамику для средних значений оставшихся недиагональных элементов матрицы плотности и соответствующие системы уравнений.

Точные решения (2.7) и (2.8) будут иметь вид

$$\langle \xi \rangle = \sum_m \varkappa_m \exp (\Gamma_m t), \tag{2.9}$$

где $\varkappa_m$ — константы, определяемые из начальных условий. Это решение справедливо при произвольных соотношениях между обратным временем расцепления корреляции поля накачки, интенсивностью накачки и силой кулоновского взаимодействия.

## § 3. Динамика усредненной матрицы плотности и релаксационные константы

С физической точки зрения представляет интерес рассмотреть следующие три предельных случая: 1) обратное корреляционное время поля накачки $\lambda$ значительно больше всех параметров системы, 2) интенсивность накачки значительно больше всех параметров системы, 3) кулоновское взаимодействие значительно превышает все параметры системы.

Для подсистемы, описывающей $S$-канал, корни нулевого приближения в указанных случаях имеют вид

$$1)\ \Gamma^0_{1,2} = 0,\ \Gamma^0_{3,4,5,6} = -\lambda \pm i\lambda,\ \Gamma^0_{7,8} = -2\lambda;\ 2)\ \Gamma^0_{1,2} = 0,\ \Gamma^0_{3,4,5,6} = \pm 2i\,|G|,$$
$$\Gamma^0_{7,8} = \pm 4i\,|G|;\ 3)\ \Gamma^0_{1,2} = 0,\ \Gamma^0_{3,4,5,6} = \pm i(\beta \pm \delta),\ \Gamma^0_{7,8} = \pm 2i\delta.$$

Для подсистемы, описывающей $A$-канал,

$$1)\ \Gamma^0_{1,2} = 0,\ \Gamma^0_{3,4,5,6} = -\lambda \pm i\lambda;\ 2)\ \Gamma^0_{1,2,3,4} = 0,\ \Gamma^0_{5,6} = \pm 2i\,|G|;$$
$$3)\ \Gamma^0_{1,2} = \pm 2iq;\ \Gamma^0_{3,4,5,6} = \pm i(\beta \pm \delta).$$

При написании этих корней и в дальнейшем мы выбрали для удобства $\alpha = \pi/2$; $\Delta = 0$.

В табл. 1—3 приведены поправки к соответствующим корням нулевого приближения. Табл. 1 содержит поправки к корням $\Gamma^0$, которым соответствует решение, определяющее из подсистем (2.7) и (2.8) переменные $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$, $\langle c \rangle$, $\langle d \rangle$ и неинтересующие нас $\langle x_1 \rangle$, $\langle y_1 \rangle$, $\langle z_1 \rangle$, $\langle u_1 \rangle$, $\langle w_1 \rangle$ и комплексно-сопряженные им. Из (1.1а) и (1.12а) следует, что динамика

Таблица 1

| *S*-канал | | | *A*-канал | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2\|G\|^2/\lambda$<br>$-2\|G\|^2/\lambda$ | —<br>— | —<br>— | $-\|G\|^2/\lambda$<br>$-(\|G\|^2/\lambda)-i(\|G\|^2/\lambda)$ | —<br>— | —<br>— |
| $-\lambda$<br>$-\lambda$ | —<br>— | $-\lambda\pm i\lambda$<br>$-\lambda\pm i\delta$ | $-\lambda$<br>$-\lambda$ | —<br>— | $-\lambda\pm i\lambda$<br>$-\lambda\pm i\delta$ |
| $-4\lambda\|G\|^2/\delta^2$ | $-2\lambda$ | — | — | $-(32\lambda q^4/\delta^4)\pm(8i\lambda q\beta^2/\delta^3)$ | — |
| $-4\lambda\|G\|^2/\delta^2$ | $-2\lambda\pm i[2\lambda+(\|G\|^2/\delta)]$ | — | — | $-(32\lambda q^4/\delta^4)\pm(4i\|G\|^2/\delta)$ | — |

$\langle\rho_{11;\,11}\rangle$ и $\langle\rho_{22;\,22}\rangle$ определяется только $S$-каналом, в то время как динамика $\langle\rho_{22;\,11}\rangle$ и $\langle\rho_{11;\,22}\rangle$ связана как с $S$-, так и с $A$-каналами. Табл. 2 содержит поправки корней, которым соответствует решение, определяющее из подсистем (П. 2) и (П. 4) переменные $\langle x\rangle$, $\langle y\rangle$, $\langle u\rangle$, $\langle w\rangle$ и неинтересующие нас $\langle a_1\rangle$, $\langle b_1\rangle$, $\langle x_1^*\rangle$, $\langle y_1^*\rangle$, $\langle z_1\rangle$, $\langle z_1^*\rangle$, $\langle c_1\rangle$, $\langle d_1\rangle$, $\langle u_1^*\rangle$, $\langle w_1^*\rangle$. Из (1. 11б) и (1. 12б) следует, что в $\langle\rho_{12;\,ii}\rangle$, $\langle\rho_{\alpha\alpha;\,12}\rangle$ также замешана динамика $S$- и $A$-каналов. Табл. 3 содержит поправки корней, которым соответствует решение, определяющее из подсистемы (П. 6) переменную $z$ и неинтересующие нас $\langle a_2\rangle$, $\langle b_2\rangle$, $\langle x_2\rangle$, $\langle y_2\rangle$, $\langle x_2^*\rangle$, $\langle y_2^*\rangle$, $\langle z_2^*\rangle$. Из (1. 12б) следует, что динамика $\langle\rho_{12;\,12}\rangle$ определяется только $S$-каналом.

Таблица 2

| *S*-канал | | | *A*-канал | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-(\|G\|^2/\lambda)+i[\delta+(\|G\|^2/\lambda)]$<br>$-(\|G\|^2/\lambda)+i[\delta+(\|G\|^2/\lambda)]$ | —<br>— | —<br>— | $-(\|G\|^2/\lambda)+i[\delta\pm\beta+(\|G\|^2/\lambda)]$<br>$-(\|G\|^2/\lambda)+i[\delta\pm\beta+(\|G\|^2/\lambda)]$ | —<br>— | —<br>— |
| $-\lambda+(i\lambda/2)$<br>$-\lambda+(i\lambda/2)$ | —<br>— | $-\lambda-i\lambda$<br>$-\lambda-i(\lambda+\delta)$ | $-\lambda$<br>$-\lambda$ | —<br>— | $-\lambda+i(\lambda/2)$<br>$-\lambda+i(\lambda/2)$ |
| $-\lambda-i\lambda$ | $-\lambda-i[\lambda+(\|G\|^2/\delta)]$ | — | — | $-\lambda-i[\lambda+2(\|G\|^2/\delta)]$ | — |
| $-\lambda-i\lambda$ | $-\lambda-i[\lambda+(\|G\|^2/\delta)]$ | — | — | $-\lambda-i[\lambda+2(\|G\|^2/\delta)]$ | — |

В табл. 1—3 строкам сверху вниз соответствуют приближения: $\lambda\gg|G|\gg g_{\alpha\beta;\,ik}$, $\lambda\gg g_{\alpha\beta;\,ik}\gg|G|$; $|G|\gg\lambda\gg g_{\alpha\beta;\,ik}$; $|G|\gg g_{\alpha\beta;\,ik}\gg\lambda$; $g_{\alpha\beta;\,ik}\gg\lambda\gg|G|$; $g_{\alpha\beta;\,ik}\gg|G|\gg\lambda$. Столбцы в таблицах слева направо соответствуют следующим корням нулевого приближения для $S$-канала: 0, $\pm 2i\delta$; $\pm 2i\,|G|$; для $A$-канала: 0, $\pm 2iq$, $\pm 2i\,|G|$.

Таблица 3

| *S*-канал | | |
|---|---|---|
| $-(6\delta^2/\lambda)-2(\|G\|^2/\lambda)\pm 2i\delta$<br>$-(6\delta^2/\lambda)-2(\|G\|^2/\lambda)\pm 2i\delta$ | —<br>— | —<br>— |
| $-\lambda/2$<br>$-\lambda/2$ | —<br>— | $-\lambda-i\lambda$<br>$-\lambda-i(\delta+\beta)$ |
| $-2\lambda$<br>$-2\lambda$ | $-\lambda-i[\lambda+(\|G\|^2/\delta)]$<br>$-\lambda-i[\lambda+(\|G\|^2/\delta)]$ | —<br>— |

Из выражения (2. 9) следует, что если все $\varkappa_m$ одного порядка, то динамика системы будет определяться долгоживущими экспонентами, у которых показатель будет содержать отрицательную действительную часть, наименьшую по модулю. На основании этого мы не приводим в таблицах поправок к корням $\pm i(\beta \pm \delta)$; $2\lambda$; $-\lambda \pm i\lambda$; $\pm 4i\,|G|$, так как действительные части $\Gamma_m$ в этих случаях превышают по модулю или совпадают с наибольшими из приведенных.

Для времен, превышающих все релаксационные времена системы населенности, согласно (1. 9), (1. 11а), (1. 12а), в отсутствие термостата составят: $\langle\rho_{11;\,11}\rangle = \langle\rho_{22;\,22}\rangle = 1/3$; $\langle\rho_{22;\,11}\rangle = \langle\rho_{11;\,22}\rangle = 1/6$. С учетом термостата населенности будут стремиться к своим равновесным значениям с соответствующими найденными релаксационными временами.

## Выводы

Для свободных атомов, когда отсутствует $A$-канал, релаксация диагональных элементов, определяемая из табл. 1, и недиагональных элементов из табл. 2 совпадает с вычисленной, например, в работах [14, 15]. В добавление к этому есть релаксация, обусловленная присутствием недиагонального элемента $\langle\rho_{12;\,12}\rangle$, определяемая из табл. 3. При обратном корреляционном времени, значительно большем интенсивности накачки, релаксация $\langle\rho_{\alpha\alpha;\,\alpha\alpha}\rangle$ происходит вдвое быстрее, чем для элементов $\langle\rho_{12;\,ii}\rangle$, $\langle\rho_{\sigma\sigma;\,12}\rangle$. При интенсивности накачки, значительно большей обратного корреляционного времени, релаксация идет с характерным обратным корреляционным временем $\lambda$.

При включении слабого кулоновского взаимодействия, как это видно из таблиц, релаксация системы остается прежней и учет кулоновского взаимодействия приводит к появлению $A$-канала, релаксационные константы которого совпадают с константами для $S$-канала в соответствующих приближениях. Появляются также множители, осциллирующие с частотой порядка кулоновского взаимодействия.

В рассмотренных ситуациях ($\lambda \gg |G|$, $g_{\alpha\beta;\,ik}$) самая узкая ширина уровня и линии порядка $\lambda\,|G|^2/\delta^2$ при этих условиях может возникнуть решение, соответствующее приближению хаотических фаз, т. е. кинетическому уравнению типа уравнения баланса [16].

При дальнейшем увеличении кулоновского взаимодействия ($g_{\alpha\beta;\,ik} \gg \lambda$, $|G|$) поведение релаксационных констант существенно изменяется. Как видно из табл. 1, релаксация диагональных элементов $\langle\rho_{11;\,11}\rangle$, $\langle\rho_{22;\,22}\rangle$ порядка $\lambda\,|G|^2/\delta^2$ и может быть значительно меньше рассмотренной выше. Релаксация диагональных элементов $\langle\rho_{11;\,22}\rangle$, $\langle\rho_{22;\,11}\rangle$ определяется динамикой обоих каналов. При $q^4 > |G|^2\delta^2$ обратное время релаксации этих элементов будет по-прежнему порядка $\lambda\,|G|^2/\delta^2$. При $q^4 < |G|^2\delta^2$ релаксация диагональных элементов $\langle\rho_{11;\,22}\rangle$, $\langle\rho_{22;\,11}\rangle$ будет порядка $\lambda q^4/\delta^4$.

Для недиагональных элементов $\langle\rho_{12;\,ii}\rangle$, $\langle\rho_{\sigma\sigma;\,12}\rangle$, как видно из табл. 2, обратное время релаксации для обоих каналов одинаково и равно $\lambda$, т. е. обратному корреляционному времени поля накачки, и не зависит от соотношения между интенсивностью накачки и обратным временем корреляции. Аналогичный результат для недиагональных элементов $\langle\rho_{12;\,12}\rangle$, $\langle\rho_{21;\,21}\rangle$ следует из табл. 3.

Следовательно, при сильной связи корреляция различных состояний системы расцепляется за время, равное среднему времени между сбивами фаз поля накачки, в то время как сами состояния релаксируют к равновесным за время, много большее. Это связано с тем, что сильная связь между атомами приводит к быстрым переходам внутри системы атомов, поддерживающим тем самым населенности, но быстро сбивающим фазовую память недиагональных элементов. Заметим, что подобная ситуация в одноатомной двухуровневой системе принципиально отсутствует (см. случай $\lambda \gg |G|$, $g_{\alpha\beta;\,ik}$). Действительно, в этом случае одни и те же переходы между двумя уровнями определяют как релаксацию, так и исчезновение недиагональных элементов матрицы плотности.

Для триплетных пар атомов или ионов в случае сильной связи релаксационные константы будут меньше, чем для синглетных. Это сущест венно для обсуждавшейся ранее [11] возможности индуцированного магнитного порядка.

В заключение выражаем глубокую благодарность Г. М. Заславскому за плодотворную дискуссию и В. А. Игнатченко за внимание к работе.

## *Приложение*

Для определения динамики недиагональных элементов матрицы плотности $\langle y\rangle$, $\langle x\rangle$ производим следующую подстановку в уравнениях (2. 7):

$$\left.\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \exp\left[-i\Delta t - i\varphi(t)\right]; \quad \begin{pmatrix} x_1^* \\ y_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \exp\left[-2i\Delta t - 2i\varphi(t)\right]; \\ &z_1 = z\exp\left[i\Delta t + i\varphi(t)\right]; \qquad z_1^* = z^*\exp\left[-3i\Delta t - 3i\varphi(t)\right]; \end{aligned}\right\} \tag{П. 1}$$

После усреднения, аналогичного тому, как это было проделано для (2. 3), получим

$$\left.\begin{aligned} \langle \dot a_1\rangle &= iG^*\langle x\rangle - iG\langle x^*\rangle + \left[-i\Delta + \lambda\left(e^{-i\alpha}-1\right)\right]\langle a_1\rangle, \\ \langle \dot b_1\rangle &= 3i\left(G^*\langle y\rangle - G\langle y^*\rangle\right) + \left[-i\Delta + \lambda\left(e^{-i\alpha}-1\right)\right]\langle b_1\rangle, \\ \langle \dot x\rangle &= 2iG\langle a_1\rangle - i\beta\langle y\rangle + i\delta\langle x\rangle, \\ \langle \dot y\rangle &= 2iG\langle b_1\rangle - i\beta\langle x\rangle + 4iG^*\langle z_1\rangle + i\delta\langle y\rangle, \\ \langle \dot x_1^*\rangle &= -2iG^*\langle a_1\rangle + i\beta\langle y_1^*\rangle + \left[-i(\delta+2\Delta) + \lambda\left(e^{-2i\alpha}-1\right)\right]\langle x_1^*\rangle, \\ \langle \dot y_1^*\rangle &= -2iG^*\langle b_1\rangle - 4iG\langle z_1^*\rangle + i\beta\langle x_1^*\rangle + \left[-i(\delta+2\Delta) + \lambda\left(e^{-2i\alpha}-1\right)\right]\langle y_1^*\rangle, \\ \langle \dot z_1\rangle &= iG\langle y_1\rangle + \left[i(\Delta+2\delta) + \lambda\left(e^{i\alpha}-1\right)\right]\langle z_1\rangle, \\ \langle \dot z_1^*\rangle &= -iG^*\langle y_1^*\rangle + \left[-i(3\Delta+2\delta) + \lambda\left(e^{-3i\alpha}-1\right)\right]\langle z_1^*\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{П. 2}$$

Для определения динамики недиагональных элементов $\langle u\rangle$, $\langle w\rangle$ проделаем следующую подстановку:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \exp\left[-i\Delta t - i\varphi(t)\right]; \quad \begin{pmatrix} u_1^* \\ w_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^* \\ w^* \end{pmatrix} \exp\left[-2i\Delta t - 2i\varphi(t)\right], \tag{П. 3}$$

и после усреднения получим следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} \langle \dot c_1\rangle &= iG\langle w_1^*\rangle - iG^*\langle w\rangle + 2iq\langle d_1\rangle + \left[-i\Delta + \lambda\left(e^{-i\alpha}-1\right)\right]\langle c_1\rangle, \\ \langle \dot d_1\rangle &= iG\langle u_1^*\rangle + iG^*\langle u\rangle + 2iq\langle c_1\rangle + \left[-i\Delta + \lambda\left(e^{-i\alpha}-1\right)\right]\langle d_1\rangle, \\ \langle \dot u\rangle &= 2iG\langle c_1\rangle - i\beta\langle w\rangle + i\delta\langle u\rangle, \\ \langle \dot w\rangle &= -2iG\langle d_1\rangle - i\beta\langle u\rangle + i\delta\langle w\rangle, \\ \langle \dot u_1^*\rangle &= -2iG^*\langle c_1\rangle + i\beta\langle w_1^*\rangle + \left[-i(\delta+2\Delta) + \lambda\left(e^{-2i\alpha}-1\right)\right]\langle u_1^*\rangle, \\ \langle \dot w_1^*\rangle &= 2iG^*\langle d_1\rangle + i\beta\langle u_1^*\rangle + \left[-i(\delta+2\Delta) + \lambda\left(e^{-2i\alpha}-1\right)\right]\langle w_1^*\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{П. 4}$$

Для недиагонального элемента $\langle z\rangle$ подстановка будет иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \exp\left[-2i\Delta t - 2i\varphi(t)\right]; \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \exp\left[-i\Delta t - i\varphi(t)\right]; \\ &\begin{pmatrix} x_2^* \\ y_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \exp\left[-3i\Delta t - 3i\varphi(t)\right]; \quad z_2^* = z^*\exp\left[4i\Delta t + 4i\varphi(t)\right], \end{aligned}\right\} \tag{П. 5}$$

и после усреднения получаем

$$\left.\begin{aligned} \langle \dot a_2\rangle &= iG^*\langle x_2\rangle - iG\langle x_2^*\rangle + \left[-2i\Delta + \lambda\left(e^{-2i\alpha}-1\right)\right]\langle a_2\rangle, \\ \langle \dot b_2\rangle &= 3iG^*\langle y_2^*\rangle - 3i\,G\langle y_2^*\rangle + \left[-2i\Delta + \lambda\left(e^{-2i\alpha}-1\right)\right]\langle b_2\rangle, \\ \langle \dot x_2\rangle &= 2iG\langle a_2\rangle - i\beta\langle y_2\rangle + \left[i(\delta-\Delta) + \lambda\left(e^{-i\alpha}-1\right)\right]\langle x_2\rangle, \\ \langle \dot y_2\rangle &= 2iG\langle b_2\rangle + 4iG^*\langle z\rangle - i\beta\langle x_2\rangle + \left[i(\delta-\Delta) + \lambda\left(e^{-i\alpha}-1\right)\right]\langle y_2\rangle, \\ \langle \dot x_2^*\rangle &= -2iG^*\langle a_2\rangle + i\beta\langle y_2^*\rangle + \left[-i(\delta+3\Delta) + \lambda\left(e^{-3i\alpha}-1\right)\right]\langle x_2^*\rangle, \\ \langle \dot y_2^*\rangle &= -2iG^*\langle b_2\rangle - 4iG\langle z_2^*\rangle + i\beta\langle x_2^*\rangle + \left[-i(\delta+3\Delta) + \lambda\left(e^{-3i\alpha}-1\right)\right]\langle y_2^*\rangle, \\ \langle \dot z\rangle &= iG\langle y_2\rangle + 2i\delta\langle z\rangle, \\ \langle \dot z_2^*\rangle &= -iG^*\langle y_2^*\rangle + \left[i(2\delta+4\Delta) + \lambda\left(e^{4i\alpha}-1\right)\right]\langle z_2^*\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{П. 6}$$

## Литература

[1] D. A. Hutchinson, H. F. Hameka. J. Chem. Phys., *41*, 2006, 1964.
[2] J. W. Czarnik, P. R. Fontana. J. Chem. Phys., *50*, 4071, 1969.
[3] D. D. Hearn, P. R. Fontana. J. Chem. Phys., *51*, 1871, 1969.
[4] W. Heitler, S. T. Ma. Proc. Roy. Irish. Acad., *52*, 109, 1949.
[5] А. А. Варфоломеев. ЖЭТФ, *59*, 1702, 1970.
[6] А. А. Варфоломеев. ЖЭТФ, *62*, 111, 1972.
[7] M. J. Stephen. J. Chem. Phys., *40*, 669, 1964.
[8] Д. Ф. Смирнов, И. В. Соколов, Е. Д. Трифонов. ЖЭТФ, *63*, 2105, 1972.
[9] F. K. Lamb, D. Ter Haar. Phys. Reports., *2c*, 253, 1971.
[10] R. Kubo. J. Math. Phys., *4*, 174, 1963.
[11] Ю. А. Куденко, А. П. Сливинский. ФТТ, *13*, 1248, 1971.
[12] H. L. Frish, S. P. Lloyd. Phys. Rev., *120*, 1175, 1960.
[13] M. M. Leibowith. J. Math. Phys., *4*, 852, 1963.
[14] Г. Е. Векштейн, Г. М. Заславский. ДАН СССР, *172*, 69, 1967.
[15] А. И. Бурштейн. ЖЭТФ, *48*, 850; *49*, 1363, 1965.
[16] В. М. Файн. Усп. физ. наук, *79*, 641, 1963.

Поступило в Редакцию 23 июля 1973 г.