УДК 621.373 : 535

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И ПОЛЯРИЗАЦИИ ОБЪЕМНОГО КОЛЬЦЕВОГО РЕЗОНАТОРА

Т. Ф. Панкратова

Найдены поляризации собственных колебаний устойчивого четырехзеркального кольцевого резонатора, заполненного однородной средой, ось которого может не лежать в одной плоскости. Получены приближенные формулы для вычисления собственных частот. Указан способ вычисления соответствующих распределений поля.

1. Рассмотрим оптический кольцевой N-зеркальный резонатор, заполненный изотропной средой с диэлектрической и магнитной проницаемостями $\varepsilon=\varepsilon(\mathbf{r})$, $\mu=\mu(\mathbf{r})$. Зададим поле в резонаторе системой стационарных уравнений Максвелла

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{E}&=i\omega\mu\mathbf{H},\\ \operatorname{rot}\mathbf{H}&=-i\omega\varepsilon\mathbf{E},\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

и условиями идеального отражения на зеркалах S_j

$$\mathbf{E}_{\text{tang.}}|S_j=0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ N.\tag{2}$$

Лучом в неоднородной среде называется экстремаль интеграла Ферма $I=\int\sqrt{\varepsilon\mu\,(d\mathbf{r},\ d\mathbf{r})}$. Ось резонатора — замкнутый луч, который, последовательно отражаясь от всех зеркал, после всех отражений переходит сам в себя. При некоторых условиях собственные электромагнитные колебания в резонаторе сосредоточены в окрестности его оси. Эти условия, грубо говоря, сводятся к следующему. Пусть I_0 — квадратичное приближение интеграла I в окрестности оси. Экстремали интеграла I_0 — лучи в первом приближении. Резонатор называется устойчивым по перому приближению, если лучи в первом приближении, близкие к оси резонатора, после многократных отражений от всех зеркал остаются вблизи оси. Это может иметь место, если пучок света вблизи оси достаточно узок, ось резонатора проходит достаточно далеко от краев зеркал, а размеры зеркал велики, так что дифракционными потерями на краях можно пренебречь. Перечисленные условия сводятся к некоторым неравенствам на параметры резонатора. Для четырехзеркального резонатора эти неравенства будут выписаны ниже.

Задача о собственных колебаниях кольцевого резонатора, ось которого лежит целиком в некоторой плоскости, может быть сведена к скалярной. В этом случае в резонаторе существуют собственные колебания двух различных поляризаций. Для одной вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости оси, для другой перпендикулярен этой плоскости. Для каждой поляризации уравнения Максвелла сводятся к уравнению $\Delta u+\varepsilon\mu\omega^2u=0$ с граничным условием $\partial u/\partial n|_{S_j}=0$ для одной поляризации и $u|_{S_j}=0$ для другой. Формулы для собственных функций и собственных частот таких резонаторов (устойчивых по первому приближению) получены Поповым[1-3].

В произвольной неоднородной среде, однако, ось резонатора не лежит целиком в некоторой плоскости. Более того резонатор, заполненный однородной средой, может быть устроен так, что его ось не принадлежит никакой плоскости. Поместим, например, четыре зеркала в вершины тетраэдра так, что ось резонатора совпадает с четырьмя его ребрами (рис. 2). Если вектор **E** перпендикулярен плоскости падения луча на одно из зеркал, то он уже направлен под некоторым других углом по отношению к плоскости падения на следующее зеркало. Здесь разбиение задачи на две скалярные невозможно.

Методика решения задачи (1), (2) в наиболее общем случае для устойчивых по первому приближению резонаторов изложена автором в работе [4], однако никаких конкретных примеров там не рассмотрено. В настоящей работе получены явные формулы для собственных чисел и собственных функций задачи (1), (2) в случае четырехзеркального резонатора, заполненого однородной средой. Ось резонатора при этом может не лежать в одной плоскости, что приводит, как оказывается, к появлению двух поляризаций собственных колебаний с различными частотами, для которых вектор **E** образует разные углы с разными плоскостями падения.

2. Решения задачи (1), (2), сосредоточенные вблизи оси резонатора, в каждой точке в окрестности оси можно построить в виде следующих формальных рядов по обратным степеням большого параметра:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}_{q,\, m_1,\, m_2,\, p} &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}^{(k)} \Omega^{-k/2} \exp(i\Omega I), \\ \mathbf{H}_{q,\, m_1,\, m_2,\, p} &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\mathbf{H}}^{(k)} \Omega^{-k/2} \exp(i\Omega I), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где интеграл I берется вдоль оси резонатора от некоторой фиксированной точки до основания перпендикуляра, опущенного на ось из точки, в которой вычисляется поле; $q \gg 1$, $m_{1,2} = 0, 1, 2, \ldots$, p — индекс поляризации — принимает два значения: $p = 1, 2$.

Параметр Ω в формуле (3) является нулевым приближением для собственной частоты ω и задается следующим выражением:

$$\Omega = \frac{2\pi\left(q + \frac{N}{2}\right) + \sum\limits_{k=1}^{2}\left(m_k + \frac{1}{2}\right)\alpha_k - \vartheta_p}{\int\limits_0^L \sqrt{\varepsilon\mu\,(d\mathbf{r},\, d\mathbf{r})}}, \tag{4}$$

где α_1, α_2, ϑ_1, ϑ_2 — числа, зависящие от параметров резонатора (ниже они будут написаны явно в рассмотренном примере), L — длина всей оси. Частота ω выражается через Ω приводимой ниже формулой

$$\omega = \Omega + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega^{-k} \delta_k. \tag{5}$$

Способ определения чисел δ_k (поправок к нулевому приближению) изложен в работе [4].

Задача решается в ортогональной системе координат (s, ξ_1, ξ_2), связанной с лучом. А именно, s — длина дуги оси резонатора, ξ_1, ξ_2 — декартовы координаты, в каждой точке $(s, 0, 0)$ перпендикулярные к оси. В нулевом приближении собственное поле поперечно $\hat{E}_s^{(0)} = \hat{H}_s^{(0)} = 0$ и удовлетворяет таким же соотношениям, как в плоской волне

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon}\, \hat{E}_1^{(0)} &= \sqrt{\mu}\, \hat{H}_2^{(0)}, \\ \sqrt{\varepsilon}\, \hat{E}_2^{(0)} &= -\sqrt{\mu}\, \hat{H}_1^{(0)}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Собственные функции нулевого приближения имеют следующий вид:

$$\mathbf{E}^{(0)} = (\det\gamma)^{-1/2} \exp\left[\frac{i\sqrt{\varepsilon\mu}}{2}(\gamma\gamma^{-1}\mathbf{x},\, \mathbf{x})\right] P_{m_1 m_2}(s,\, \mathbf{x})\, \mathbf{C}_p^{(j)}, \tag{7}$$

где $\mathbf{x} = (\sqrt{\Omega}\,\xi_1,\ \sqrt{\Omega}\,\xi_2)$, p — индекс поляризации, $\gamma(s)$ — матрица, столбцами которой являются решения $\boldsymbol{\gamma}_k(s)$ уравнения Эйлера для $\boldsymbol{\gamma}_k$

$$\frac{d^2}{ds^0}\gamma_k - \left[\sqrt{\varepsilon\mu}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)\right]\Big|_{s,\,0,\,0}\frac{d}{ds}\gamma_k + K(s)\,\gamma_k = 0, \tag{8}$$

$K(s) = \sqrt{\varepsilon\mu}\left\| \frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_k}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\Big|_{s,\,0,0}\right\|$ — матрица второго порядка, $P_{m_1 m_2}(s,\ \mathbf{x})$ — полином степени $m_1 + m_2$ по $\sqrt{\Omega}\,\xi_1$, $\sqrt{\Omega}\,\xi_2$ с коэффициентами, зависящими от s; $\mathbf{C}_p^{(j)} = (C_{1p}^{(j)},\ C_{2p}^{(j)})$ — вектор, в каждой точке s перпендикулярный к оси, фиксированный на каждом отрезке оси между двумя соседними зеркалами (называемом плечом резонатора). Значение этого вектора определено ниже формулами (18), (19).

3. Опишем способ вычисления чисел α_1, α_2, ϑ_1, ϑ_2 в формуле (4). Фиксируем четыре линейно независимых решения $\boldsymbol{\gamma}_k^{(j)}$, $k=1, 2, 3, 4$, уравнения (8) в каждом j-м плече резонатора. Любое другое решение $\boldsymbol{\gamma}^{(j)}$ имеет вид

$$\boldsymbol{\gamma}^{(j)}(s) = \sum_{k=1}^{4} a_k^{(j)}\boldsymbol{\gamma}_k^{(j)}(s). \tag{9}$$

Таким образом, любое решение уравнения (8) в каждом плече резонатора определяется постоянным вектором $\mathbf{A}^{(j)} = (a_1^{(j)},\ a_2^{(j)},\ a_3^{(j)},\ a_4^{(j)})$. Векторы $\mathbf{A}^{(j+1)}$ и $\mathbf{A}^{(j)}$ в двух соседних плечах резонатора связаны между собой матрицей Γ_j, которую легко получить из вариационных соображений. После последовательного отражения от всех зеркал вектор $\mathbf{A}^{(j)}$ преобразуется в вектор $\mathbf{A}^{(j+N)}$, связанный с $\mathbf{A}^{(j)}$ следующей вещественной матрицей четвертого порядка Γ:

$$\Gamma = \Gamma_{j+N} \cdots \Gamma_{j+1}\Gamma_j, \tag{10}$$

которая имеет четыре собственных числа,

$$\Gamma\mathbf{A}_k = \lambda_k\mathbf{A}_k,\quad k = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{11}$$

Резонатор является устойчивым по первому приближению, если все числа λ_k простые и равны по модулю единице

$$\lambda_k = \exp(i\alpha k),\quad \lambda_{k+2} = \bar{\lambda}_k = \exp(-i\alpha_k),\quad k = 1,\ 2. \tag{12}$$

Решения уравнения (8) и (9), можно выбрать так, что будут выполняться следующие условия:

$$1)\ (\operatorname{Im}\gamma\gamma^{-1}\mathbf{x},\ \mathbf{x}) > 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \neq (0,\ 0). \tag{13}$$

Это условие обеспечивает быстрое убывание решений вида (7) при удалении от оси.

2) После обхода всей оси столбцы $\boldsymbol{\gamma}_k^{(j)}$ матрицы γ в формуле (7) приобретают множитель $\exp(i\alpha_k)$, $k = 1,\ 2$

$$\boldsymbol{\gamma}_k^{(j+N)}(s) = \boldsymbol{\gamma}_k^{(j)}(s)\exp(i\alpha_k),\quad k = 1,\ 2. \tag{14}$$

3) На каждом зеркале автоматически будет выполняться равенство показателей экспонент и полиномиальных множителей для падающего и отраженного лучей.

Теперь остается подобрать постоянные векторы $\mathbf{C}_p^{(j)}$ в каждом плече резонатора так, чтобы выполнялись условия идеального отражения на зеркалах и построенное поле было однозначным. Коэффициент отражения для вектора $\mathbf{E}_\perp$, перпендикулярного плоскости падения луча на зеркало, равен -1, а для вектора $\mathbf{E}_\parallel$, лежащего в плоскости падения, равен 1. Плоскость Q_{j+1} падения на j-е зеркало повернута относительно плоскости Q_j падения на $j-1$-е зеркало на угол φ_j (рис. 1). Отсюда следует, что

$$\mathbf{E}^{(j+1)}|_{s_j} = JU(\varphi_j)\,\mathbf{E}^{(j)}|_{s_j}, \tag{15}$$

где $\mathbf{E}^{(k)} = (E_\parallel^{(k)},\ E_\perp^{(k)})$, $U(\varphi_j)$ — матрица поворота на φ_j,

$$J = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Вектор $\mathbf{E}^{(j+N)}$ в луче, обошедшем всю ось, приобретает по сравнению с вектором $\mathbf{E}^{(j)}$ в первоначальном луче постоянный множитель вида

$$\mathbf{C}_p^{(j+N)} = G_j \mathbf{C}_p^{(j)}, \tag{17}$$

где

$$G_j = JU(\varphi_{j+N-1}) \ldots JU(\varphi_{j+1})\, JU(\varphi_j). \tag{18}$$

Матрица второго порядка G_j имеет два собственных числа $\exp(i\vartheta_p)$, $p = 1, 2$. Возьмем в выражении (7) в качестве вектора $\mathbf{C}_p^{(j)}$ собственный вектор матрицы G_j

$$G_j \mathbf{C}_p^{(j)} = \mathbf{C}_p^{(j)} \exp(i\vartheta_p), \quad p = 1,2. \tag{19}$$

Из требования однозначности следует, что вектор $\mathbf{E}^{(j+N)}(s)$ в луче, отраженном от всех зеркал, должен совпадать с вектором $\mathbf{E}^{(j)}(s)$ в первоначальном луче. Из этого требования и вытекает выражение (4) для собственных частот резонатора, где $\alpha_k = \arccos \frac{1}{2}(\lambda_k + \bar{\lambda}_k)$ определяется формулами (10), (11), число ϑ_p — аргумент собственного значения $\exp(i\vartheta_p)$ матрицы вида (18).

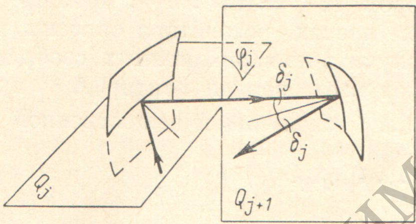

Рис. 1.

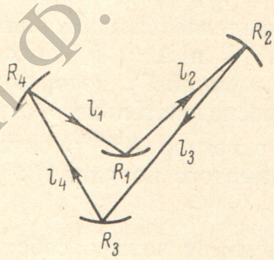

Рис. 2.

4. Настоящая работа посвящена выводу формул для чисел α_k, ϑ_p, связывающих эти числа явно с параметрами резонатора для случая четырех зеркал и однородной среды ($N = 4$, $\varepsilon = \mu = 1$).

Опишем коротко результаты и приведем полученные формулы.

Зададим параметры резонатора. Пусть все зеркала сферические с радиусом R_j каждое (j — номер зеркала, $j = 1, 2, 3, 4$). Пусть l_j — расстояние по оси между двумя соседними зеркалами S_{j-1} и S_j, а φ_j — угол между двумя соседними плоскостями падения (рис. 1, 2).

Для однородной среды уравнения (8) имеют следующие четыре линейно независимые решения в каждом j-м плече резонатора:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1^{(j)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_2^{(j)} &= \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_3^{(j)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \gamma_4^{(j)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Фиксируем их. Любое другое решение вследствие формулы (9) имеет вид

$$\gamma(j) = \begin{pmatrix} a_1^{(j)} + a_2^{(j)} s \\ a_3^{(j)} + a_4^{(j)} s \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Векторы

$$\mathbf{A}^{j+1} = \left(a_1^{(j+1)},\ a_2^{(j+1)},\ a_3^{(j+1)},\ a_4^{(j+1)}\right) \text{ и } \mathbf{A}^{(j)} = \left(a_1^{(j)},\ a_2^{(j)},\ a_3^{(j)},\ a_4^{(j)}\right)$$

связаны между собой следующей матрицей отражения:

$$\Gamma_j = w^{-1}(l_j)\, g_j U(\varphi_j)\, w(l_j), \tag{22}$$

где

$$w(s) = \begin{pmatrix} 1, & s, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & s \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad w^{-1}(s) = w(-s),$$

$$g_j = \begin{pmatrix} -1, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{2\cos\delta_j}{R_j}, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -\frac{2\cos\delta_j}{R_j}, & 1 \end{pmatrix},$$

$$U(\varphi_j) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j, & 0, & \sin\varphi_j, & 0 \\ 0 & \cos\varphi_j, & 0 & \sin\varphi_j \\ -\sin\varphi_j, & 0, & \cos\varphi_j, & 0 \\ 0 & -\sin\varphi_j & 0, & \cos\varphi_j \end{pmatrix},$$

δ_j — угол падения луча на j-е зеркало, φ_j — угол между плоскостями Q_j и Q_{j-1}.

Перемножая четыре матрицы вида (22) по формуле (10), получим матрицу Γ, собственные значения которой — решения возвратного уравнения $\det(\Gamma - \lambda I)$ четвертого порядка, которое для данного резонатора приводится к виду

$$\chi^2 + (2B\cos\varphi)\,\chi + (B^2 - 4\sin^2\varphi) = 0, \tag{23}$$

где

$$\chi = \lambda + \bar{\lambda} = 2\cos\alpha, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4,$$

$$B = a_{43}a_{21} - c_{43}b_{21} - b_{43}c_{21} + d_{43}d_{21},$$

$$a_{ik} = 1 - \frac{2(l_i - l_k)\cos\delta_k}{R_k},$$

$$b_{ik} = 2\left[\frac{\cos\delta_i}{R_i} + \frac{\cos\delta_k}{R_k} - \frac{2(l_i - l_k)\cos\delta_i\cos\delta_k}{R_iR_k}\right],$$

$$c_{ik} = l_i - \frac{2l_k(l_i - l_k)\cos\delta_k}{R_k},$$

$$d_{ik} = 1 - 2\left[\frac{l_i\cos\delta_i}{R_i} + \frac{l_k\cos\delta_k}{R_k} - \frac{2l_k(l_i - l_k)\cos\delta_i\cos\delta_k}{R_iR_k}\right].$$

Резонатор устойчив по первому приближению, если решения

$$\chi_{1,2} = B\cos\varphi \pm \sqrt{4 - B^2}\,\sin\varphi \tag{24}$$

уравнения (23) вещественные, разные, не превосходящие по модулю двух. Отюда следующие условия устойчивости рассматриваемого резонатора:

$$B^2 < 4, \quad |B\cos\varphi \pm \sqrt{4 - B^2}\,\sin\varphi| < 2, \tag{25}$$

при этом числа α_1, α_2, ϑ_1, ϑ_2 вычисляются по формулам

$$\alpha_{1,2} = \arccos\frac{1}{2}\chi_{1,2}, \tag{26}$$

$$\vartheta_1 = \varphi, \quad \vartheta_2 = -\varphi. \tag{27}$$

В результате из равенств (4) и (5) вытекает следующая приближенная формула для собственных частот резонатора:

$$\omega_{q,\, m_1,\, m_2,\, p} \simeq \frac{2\pi q + \sum\limits_{k=1}^{2}\left(m_k + \frac{1}{2}\right)\alpha_k - \vartheta_p}{\sum\limits_{j=1}^{4} l_j}, \tag{28}$$

где α_k, ϑ_p определяются соотношениями (24), (26), (27). Собственные функции имеют вид (7) с соответствующими упрощениями (о вычислении $P_{m_1, m_2}(s,\ \mathbf{x})$ см. [4]).

5. Полученные формулы относятся к резонаторам, устойчивым по первому приближению. Резонатор, построенный только из плоских зеркал, неустойчив. Однако даже при одном неплоском зеркале, например, первом ($R_1 = R < \infty$) и трех плоских $R_2 = R_3 = R_4 = \infty$, можно сделать резонатор устойчивым, выполнив условия (25). В этом случае коэффициент B в выражении (24) заметно упрощается. А именно, если расстояния между зеркалами одинаковые $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$, а $\delta_1 = \delta$ — угол падения луча на первое зеркало, то

$$B = 2\left(1 - \frac{2l\cos\delta}{R}\right). \tag{29}$$

Условия устойчивости при этом принимают весьма наглядный вид

$$\left.\begin{aligned} &0 < l\cos\delta < R < \infty, \\ &\left|\cos\varphi \pm \sqrt{2l\cos\delta\,(R - 2l\cos\delta)}\,\sin\varphi\right| < \frac{R}{|R - 2l\cos\delta|}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Числа α_1, α_2 вычисляются по формуле

$$\alpha_{1,\,2} = \arccos\frac{(R - 2l\cos\delta)\left[\cos\varphi \pm \sqrt{2l\cos\delta\,(R - 2l\cos\delta)}\sin\varphi\right]}{R}. \tag{31}$$

В заключение замечу, что основные идеи построения решений, сосредоточенных в окрестности изолированного луча, почерпнуты из работы Бабича [5].

Литература

[1] М. М. Попов. Вестн. ЛГУ, № 4, вып. 1, серия физ.-хим., 42, 1967.
[2] М. М. Попов. Опт. и спектр., *25*, 314, 1968.
[3] М. М. Попов. Опт. и спектр., *25*, 394, 1968.
[4] Т. Ф. Панкратова. Записки научн. семинаров ЛОМИ, *15*, 122, 1969.
[5] В. М. Бабич. Записки научных семинаров ЛОМИ, *9*, 15, 1968.

Поступило в Редакцию 31 августа 1972 г.