

ПРОСВЕТЛЯЮЩИЕ ТОНКОСЛОЙНЫЕ ПОКРЫТИЯ ДЛЯ НАКЛОННОГО ПАДЕНИЯ СВЕТА

И. М. Минков

Теоретически показана возможность создания четвертьволновых просветляющих диэлектрических покрытий для наклонно падающего монохроматического света. Рассчитано покрытие, просветляющее при угле падения света 60° , и исследованы спектральные и угловые характеристики коэффициента отражения света от него.

Введение

Теория просветления тонкослойных покрытий, работающих при нормальном падении света, хорошо разработана [1, 2]. Рассчитанные по этой теории покрытия просветляют в интервале углов $0-20^\circ$, что обусловлено слабым изменением френелевских коэффициентов отражения в этих пределах.

Переход к созданию просветляющих покрытий для наклонного падения света, падающего под большими углами, влечет за собой необходимость просветления одновременно для света перпендикулярной и параллельной поляризаций. В литературе, насколько нам известно, не имеется сведений о решении подобной задачи.

Ниже теоретически исследуется возможность создания покрытия, у которого для наклонно падающего монохроматического света длиной волны λ_0 коэффициент отражения для обеих поляризаций равен нулю.

Постановка задачи

Нумерация слоев тонкослойного непоглощающего покрытия начинается со стороны падающего светового пучка, причем окаймляющим средам присвоены номера 0 и $m+1$. Считая, что свет падает из воздуха, n_0 принимаем равным единице и для удобства показатель преломления подложки n_{m+1} обозначим n_D . Рассмотрение ограничивается покрытиями, у которых оптическая толщина каждого слоя по ходу луча равна $\lambda_0/4$, т. е.

$$n_j d_j \cos \theta_j = \frac{\lambda_0}{4} \quad (j=1, 2, \dots, m),$$

где d_j — геометрическая толщина, n_j — показатель преломления j -слоя, θ_j — угол преломления в j -слое, λ_0 — длина волны света в пустоте.

Энергетический коэффициент отражения от такого четвертьволнового покрытия вычисляется по формуле [2]

$$R = \left(\frac{1-V}{1+V} \right)^2. \quad (1)$$

Здесь

$$V = \left\{ \begin{array}{l} \frac{u_0 u_2^2 u_4^2 \dots u_m^2}{u_D u_1^2 u_3^2 \dots u_{m-1}^2}, \text{ если число слоев } m = 2k, \\ \frac{u_0 u_D u_2^2 u_4^2 \dots u_{m-1}^2}{u_1^2 u_3^2 \dots u_m^2}, \text{ если число слоев } m = 2k + 1, \end{array} \right\} \quad (2)$$

а u_j — эффективный показатель преломления

$$u_j = \begin{cases} n_j \cos \theta_j & \text{для } \perp \text{ поляризованного света,} \\ n_j / \cos \theta_j & \text{для } \parallel \text{ поляризованного света.} \end{cases} \quad (3)$$

Ставится задача, можно ли подобрать физически осуществимые показатели преломления слоев n_j ($j = 1, 2, \dots, m$), удовлетворяющие условию

$$n_{\min} \leq n_j \leq n_{\max}, \quad (4)$$

таким образом, чтобы при заданном угле падения $\bar{\theta}$ имело место

$$R_{\perp}(\bar{\theta}, \lambda_0) = R_{\parallel}(\bar{\theta}, \lambda_0) = 0. \quad (5)$$

Метод расчета просветляющего покрытия

Из (1) ÷ (3) следует, что требуемое равенство (5) осуществляется тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{g(0)} \frac{n_2^2 n_4^2 \dots n_{2k}^2}{n_1^2 n_3^2 \dots n_{2k-1}^2} &= 1, \\ \frac{1}{g(y)} \frac{(n_2^2 - y^2)(n_4^2 - y^2) \dots (n_{2k}^2 - y^2)}{(n_1^2 - y^2)(n_3^2 - y^2) \dots (n_{2k-1}^2 - y^2)} &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $y = \sin \theta_0$, а

$$\frac{1}{g(y)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{n_D^2 - y^2}}, & \text{если } m = 2k, \\ \frac{\sqrt{(1-y^2)(n_D^2 - y^2)}}{n_{2k+1}^2 - y^2}, & \text{если } m = 2k + 1. \end{cases} \quad (7)$$

При выводе формулы (6) использовано вытекающее из инварианта преломления $n \sin \theta = \text{const}$ соотношение

$$\cos \theta_j = \sqrt{1 - \frac{y^2}{n_j^2}}.$$

Нетрудно убедиться, что для однослойного покрытия ($m = 1, k = 0$) соотношение (6) выполняется для $y \neq 0$ только в тривиальном случае равенства показателей преломления окаймляющих сред и слоя. Для двухслойного покрытия непосредственно из (6) следует

$$n_1 = \sqrt{\frac{|n_D + y^2 + \sqrt{(1-y^2)(n_D^2 - y^2)}|}{n_D + 1}}, \quad n_2 = n_1 \sqrt{n_D}. \quad (8)$$

Для любого угла падения света, отличного от нормального, величина n_1 , согласно (8), ограничена сверху неравенством

$$n_1 < \sqrt{\frac{2n_D}{n_D + 1}},$$

и, следовательно, для обычно применяемых показателей преломления подложки $n_D = 1.5 \div 1.8$ для n_1 получаются нереализуемые значения, меньшие 1.38. Можно показать, что то же самое имеет место для трехслойного покрытия.

К сожалению, для покрытий с числом слоев, большим трех, строгий анализ, по-видимому, невозможен и уступает место приближенному анализу.

Введем в рассмотрение непрерывную функцию

$$\Phi(y) = \frac{1}{g(y)} \frac{(n_2^2 - y^2)(n_4^2 - y^2) \dots (n_{2k}^2 - y^2)}{(n_1^2 - y^2)(n_3^2 - y^2) \dots (n_{2k-1}^2 - y^2)}, \quad (9)$$

где $g(y)$ определяется согласно (7). С ее помощью уравнения для определения n (6) можно переписать в виде

$$\Phi(0) = 1, \quad \Phi(y) = 1.$$

Из-за наличия в $\Phi(y)$ множителя $\sqrt{1-y^2}$ при скользящем падении света ($y = \sin 90^\circ = 1$)

$$\Phi(1) = 0.$$

Поэтому, если показатели преломления в (9) выбраны так, что $\Phi(0) = 1$, то достаточным условием выполнения равенства $\Phi(\hat{y}) = 1$ ($0 < \hat{y} < 1$) будет рост функции Φ в точке $y = 0$. Действительно, если $\Phi(y)$ с ростом y становится больше своего значения, равного единице, то для достижения нулевого значения при $y = 1$ она хотя бы один раз примет значение единицы. Сказанное поясняется рис. 1.

Функция Φ будет возрастать в нуле, если

$$\begin{aligned} \Phi'(0) = \frac{d\Phi}{d(y^2)} \Big|_{y=0} = \Phi(0) \left[-\gamma + \frac{1}{n_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{n_3^2} + \dots + \frac{1}{n_{2k-1}^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_4^2} - \dots - \frac{1}{n_{2k}^2} \right] > 0, \end{aligned}$$

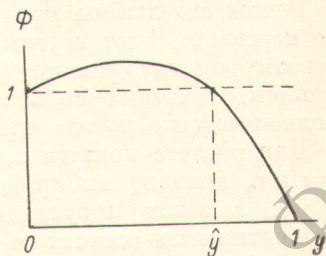


Рис. 1.

где

$$\gamma = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n_D^2} \right) & \text{при } m = 2k, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n_D^2} \right) - \frac{1}{n_{2k+1}^2} & \text{при } m = 2k + 1. \end{cases}$$

Учитывая структуру $\Phi(y)$, нетрудно понять, что большему значению $\Phi'(0)$ соответствует большее \hat{y} .

Таким образом, поставленную задачу можно сформулировать так: найти значения показателей преломления n_1, n_2, \dots, n_{2k} ¹ в условиях

$$\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_3^2} + \dots + \frac{1}{n_{2k-1}^2} - \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_4^2} - \dots - \frac{1}{n_{2k}^2} = \max \quad (10)$$

при

$$\frac{n_2^2 n_4^2 n_6^2 \dots n_{2k}^2}{n_1^2 n_3^2 n_5^2 \dots n_{2k-1}^2} = g(0) \quad (11)$$

и

$$n_{\min} \leq n_j \leq n_{\max} \quad (j = 1, 2, \dots, 2k). \quad (12)$$

Нахождение оптимальных n_j ($j = 1, 2, \dots, 2k$), удовлетворяющих (10)–(12), представляет собой задачу нелинейного программирования. Однако преследуя прагматические цели, нетрудно указать набор n_j , простой по структуре и, как показывают выборочные расчеты, весьма близкий к оптимальному.

Положим

$$n_2^2 = n_4^2 = \dots = n_{2k}^2 = n^2$$

и

$$n_1^2 = n_3^2 = \dots = n_{k+l-1}^2 = n_{\min}^2, \quad l = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ четно,} \\ 1, & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (13)$$

$$n_{k+l+1}^2 = \dots = n_{2k-1}^2 = n_{\max}^2.$$

Тогда равенство (11) переписывается в виде

$$\frac{n^{2k}}{n_{\min}^{k+l} n_{\max}^{k-l}} = g(0),$$

¹ Если число слоев $m = 2k + 1$, то входящее в $g(y)$ [см. (7)] n_{2k+1} принимается равным n_{\min} .

откуда

$$\left. \begin{aligned} n^2 &= n_{\min} n_{\max} \sqrt[k]{g(0)}, & \text{если } k \text{ четно,} \\ n^2 &= n_{\min} n_{\max} \sqrt[k]{g(0)} \sqrt{\frac{n_{\min}}{n_{\max}}}, & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Определяемые из (13) и (14) показатели преломления удовлетворяют также условию (12). Подставляя их значения в (9) и приравняв $\Phi(y) = 1$, получим алгебраическое уравнение относительно y^2

$$\frac{1}{g(y)} \frac{(n^2 - y^2)^k}{(n_{\min}^2 - y^2)^{\frac{k+l}{2}} (n_{\max}^2 - y^2)^{\frac{k-l}{2}}} = 1. \quad (15)$$

Решив его любым методом (например, методом Ньютона^[3]), находим его корень \hat{y}^2 . Этот корень определяет максимальный угол падения света, при котором для данного числа слоев m покрытие может быть просветляющим. Отметим, что при $\Phi'(0) > 0$ такое покрытие существует и что \hat{y} увеличивается с ростом числа слоев.

Для расчета покрытия, просветляющего под заданным углом падения $\hat{y} = \sin \hat{\theta}$, вначале выбирают минимальное число слоев m , для которого $\hat{y} > \hat{y}$, а затем производят корректировку показателей преломления. Корректировка состоит в ухудшении оптимальных свойств покрытия. Она может быть проведена различными способами. Один из возможных способов — изменение показателей преломления слоев с четными номерами.

Положим

$$n_{\alpha} n_{\beta} = n^2, \quad (16)$$

где n_{α} и n_{β} — показатели преломления пары слоев с четными номерами,² n — показатель преломления четных слоев, соответствующий $\hat{y} > \hat{y}$ и определяемый из (14). Выполнение (16) влечет за собой выполнение (11) при изменении в двух четных слоях n на n_{α} и n_{β} .

Подставляя n_{α} и n_{β} в уравнение (15) вместо n и обозначая число пар четных слоев, где изменился показатель преломления через p ($p \leq (k-l)/2$), получаем

$$(n_{\alpha}^2 - \hat{y}^2) (n_{\beta}^2 - \hat{y}^2) = Q(\hat{y}), \quad (17)$$

где

$$Q(\hat{y}) = \left[g(\hat{y}) \frac{(n_{\max}^2 - \hat{y}^2)^{(k-l)/2} (n_{\min}^2 - \hat{y}^2)^{(k+l)/2}}{(n^2 - \hat{y}^2)^{k-2p}} \right]^{1/p}.$$

Из (17) с учетом (16) имеем

$$n_{\alpha, \beta}^2 = \frac{[n^4 + \hat{y}^4 - Q(\hat{y})] \pm \sqrt{[n^4 + \hat{y}^4 - Q(\hat{y})]^2 - 4\hat{y}^4 n^4}}{2\hat{y}^2}. \quad (18)$$

Если \hat{y} значительно меньше \hat{y} , то при малых p (например, $p=1$, когда показатели преломления изменяются только в двух слоях) корректировка может оказаться невозможной. Это проявится в том, что определяемые из (18) n_{α} и n_{β} перестанут удовлетворять (12). В этом случае следует увеличить число пар слоев p . Заметим, что при максимальном значении p , равном $(k-l)/2$, условие (12) будет всегда выполняться.

Ч и с л е н н ы й п р и м е р

В качестве примера приведем расчет просветляющего покрытия для длины волны λ_0 и угла падения $\hat{\theta}$. Слои покрытия предполагаются выполненными из флюорита магния ($n_{\min} = 1.38$) и сернистого цинка ($n_{\max} = 2.3$),

² Слой с четными номерами (так же как и с нечетными) можно менять между собой местами. Это вытекает, в частности, из формул (1)–(3).

а также из смеси этих веществ, что обеспечивает получение слоев с промежуточными между 1.38 и 2.3 величинами показателей преломления. Вначале определяется, при каком числе слоев m возможно просветление при заданном $\hat{\theta}$. Для этого, используя (13) и последовательно решая

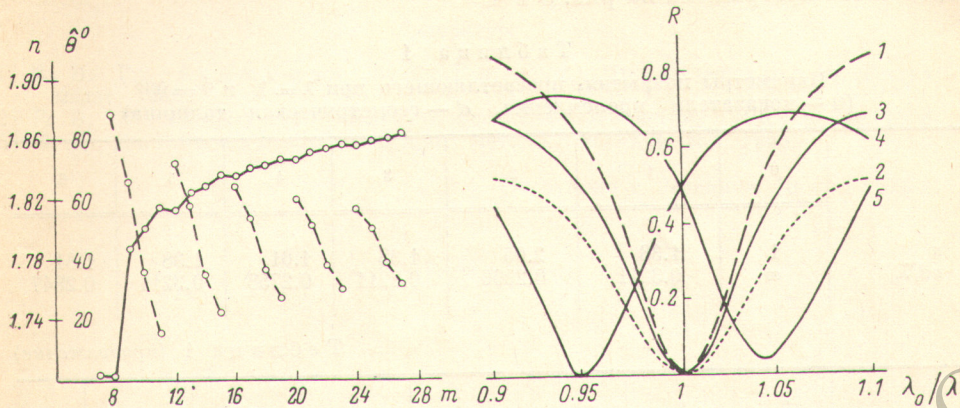


Рис. 2. Зависимость между числом слоев покрытия m и максимальным углом падения света $\theta_0 = \hat{\theta}$, для которого это покрытие может быть сделано просветляющим (точки на сплошной кривой).

Точками на штриховой кривой указаны соответствующие показатели преломления слоев с четными номерами. $n_{\min} = 1.38$, $n_{\max} = 2.3$.

Рис. 3. Спектральная зависимость коэффициента отражения 13-слойного покрытия, рассчитанного на падение света длиной волны λ_0 под углом 60° .

Кривые 1, 2, 3 — значение R_{\perp} , R_{\parallel} и R для угла падения 60° . Кривые 4, 5 — значение R для углов падения 45° и 75° .

уравнение (15) для возрастающего числа слоев, находим максимальное значение $\theta_0 = \hat{\theta}$, соответствующее каждому m . Результаты такого расчета приведены на рис. 2.³ Из рис. 2 видно, что для просветления под углом падения 45° достаточно 10 слоев, 60° — 13 слоев, 70° — 17 слоев и т. д.

Остановимся подробнее на расчете покрытия, просветляющего под углом падения $\hat{\theta} = 60^\circ$. Из решения уравнения (15) (см. также рис. 2) следует, что максимальное число слоев, при котором $\hat{\theta}$ больше 60° , равно 13. При этом $\hat{\theta} = 62.2713^\circ$, а показатель преломления четных слоев $n = 1.8145361$. Корректировка для угла 60° осуществляется по формуле (18). При этом r принимается равным единице, т. е. изменяются показатели преломления только двух четных слоев.

Результат корректировки: $n_{\alpha} = 2.0465028$, $n_{\beta} = 1.6103254$. Подстановка написанных выше значений показателей преломления в формулы (1) ÷ (3) дает

$$R_{\perp}(60^\circ, \lambda_0) = R_{\parallel}(60^\circ, \lambda_0) = 0.$$

На практике, конечно, невозможно выдержать значение показателей преломления с такой степенью точности и значения R_{\perp} и R_{\parallel} будут отли-

³ Немонотонность зависимости $\hat{\theta}$ от m обусловлена, по-видимому, тем, что используемый набор показателей преломления не является оптимальным.

чататься от нуля. Для исследования спектральных свойств покрытия брались округленные значения показателей преломления. Вместе с оптическими толщинами слоев они сведены в табл. 1. Зависимость R_{\perp} , R_{\parallel} и $R = (R_{\perp} + R_{\parallel})/2$ такого покрытия от длины волны и угла падения падающего света изображена на рис. 3 и 4.

Таблица 1
 Параметры покрытия, просветляющего при $\lambda = \lambda_0$ и $\bar{\theta} = 60^\circ$
 (n — показатели преломления, d — геометрическая толщина)

	0	1	2	3	4	5	6
n	1	1.38	2.05	1.38	1.61	1.38	1.81
nd/λ_0	∞	0.3211	0.2966	0.3211	0.2758	0.3211	0.2847

Таблица 1 (продолжение)

	7	8	9	10	11	12	13	14
n	1.38	1.81	2.3	1.81	2.3	1.81	2.3	1.52
nd/λ_0	0.3211	0.2847	0.2699	0.2847	0.2699	0.2847	0.2699	∞

Интересно отметить, что при падении на покрытие света под углом, несколько отличным от 60° , оно продолжает оставаться просветляющим, но область просветления сдвигается. При увеличении угла падения эта область смещается в длинноволновую часть спектра, а при уменьшении — в коротковолновую. Сказанное иллюстрируется кривыми 4 и 5 рис. 3, дающими зависимость $R(\lambda)$ для углов падения света 45° и 75° . Значение R_{\perp} , R_{\parallel} и R в минимуме и локализация минимумов по спектру для ряда углов падения приведены в табл. 2.

Таблица 2
 Минимумы коэффициентов отражения в процентах и их локализация при различных углах падения света

	θ_0 , град.						
	45	50	55	60	65	70	75
R_{\perp}	0.05	0.25	0.10	0.02	0.33	0.79	1.82
λ_0/λ	0.9483	0.9656	0.9828	1.0000	1.0155	1.0287	1.0353
R_{\parallel}	0.16	0.12	0.06	0.005	0.07	0.72	2.73
λ_0/λ	0.9455	0.9628	0.9812	1.0000	1.0186	1.0362	1.0541
R	0.18	0.25	0.10	0.01	0.28	1.26	4.68
λ_0/λ	0.9474	0.9646	0.9823	1.000	1.0166	1.0314	1.0432

Из табл. 2 видно, что с изменением угла падения минимумы R_{\perp} и R_{\parallel} перестают совпадать друг с другом.

Может показаться, что наличие просветляющей области при углах падения, больших 60° , противоречит результатам, отображенным на рис. 2. Действительно, согласно табл. 2, рассчитанное 13-слойное покрытие просветляет при угле падения 70° , а согласно рис. 2, для просветления под этим углом нужно не менее 17 слоев. Но этом противоречие кажущееся, ибо ранее речь шла о полном просветлении, т. е. о строгом равенстве нулю (по крайней мере в теоретическом смысле) $R_{\perp}(\lambda_0)$ и $R_{\parallel}(\lambda_0)$. Здесь же

такое равенство не имеет место, ибо минимумы R_{\perp} и R_{\parallel} заметно отличаются от нуля и смещены по спектру. Однако указанный факт можно использовать для конструирования фильтров с неполным просветлением, но с меньшим числом слоев.

Литература

- [1] И. В. Гребенщиков, А. Г. Власов. Просветление оптики. Гостехиздат, 1946.
- [2] Г. В. Розенберг. Оптика тонкослойных покрытий, ГИФМЛ, М., 1958.
- [3] М. Д. Сальвадори. Численные методы в технике. ИЛ, 1955.

Поступило в Редакцию 10 мая 1973 г.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф.Скорини