

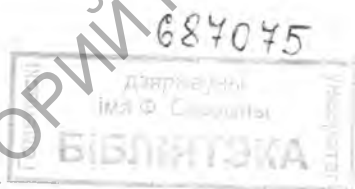
4312. ПР

22.1.14
C292

М.В. Селькин

МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ В ТЕОРИИ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ



МИНСК
"БЕЛАРУСКАЯ НАВУКА"

1997

Селькин М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. — Мн.: Беларуская навука, 1997. — 144 с. — ISBN 985-439-011-х.

Разработана теория подгрупповых функторов; установлена связь функторов с классами Шунка и формациями; теория подгрупповых функторов применена для изучения свойств подгрупп fratтиниева типа и установления дистрибутивности решетки всех классов Шунка; для классов Шунка изучены свойства заданных максимальных подгрупп и их пересечений; описано поведение формационно достижимых подгрупп в обобщенно fratтиниевых расширениях групп; исследовано строение нормальных подгрупп, имеющих заданные пересечения с максимальными подгруппами.

Предназначена для научных работников, аспирантов и студентов-математиков.

Библиогр.: 113 назв.

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук В.А. Ведерников,
д-р физ.-мат. наук Н.С. Черников

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть P — множество всех простых чисел. Если $p \in P$ и $\pi \subseteq P$, то $\pi' = P \setminus \pi$,
 $p' = P \setminus \{p\}$.

Пусть G — группа, \mathfrak{X} — класс групп. Тогда:

- $|G|$ — порядок группы G ;
- $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G ;
- $\pi(\mathfrak{X})$ — множество всех простых чисел, делящих порядки групп из \mathfrak{X} ;
- $\text{Char}(\mathfrak{X})$ — множество всех простых чисел p , для которых группа порядка p входит в \mathfrak{X} ;
- $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G ;
- $\Phi_\pi(G)$ — пересечение максимальных подгрупп группы G , индексы которых не делятся на числа из π ;
- $\Phi_p(G)$ — пересечение максимальных подгрупп группы G , индексы которых не делятся на p ;
- $\Phi_n(G)$ — пересечение максимальных подгрупп группы G , индексы которых не равны p^k для всех $p \in P$ и $k = 1, 2, \dots, n$;
- $\Phi_x(G)$ — пересечение максимальных подгрупп группы G , имеющих не-примарный индекс;
- $\Phi_\Theta(G)$ — обобщенная подгруппа Фраттини, определяемая m -функтором Θ ;
- $\Delta(G)$ — пересечение всех ненормальных максимальных подгрупп группы G ;
- $\Delta^*(G)$ — пересечение всех \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп группы G ;
- $\bar{\Delta}^*(G)$ — пересечение всех \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , не принадлежащих классу \mathfrak{X} ;
- $\Delta_{\pi'}^*(G)$ — пересечение всех \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , индексы которых не делятся на числа из π ;
- $\Delta_p^*(G)$ — пересечение всех \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , индексы которых не делятся на p ;
- $\bar{\Delta}_{\pi'}^*(G)$ — пересечение всех \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , которые не принадлежат \mathfrak{X} и индексы которых не делятся на числа из π ;

- $\Delta_{\alpha}^{\mathfrak{X}}(G)$ — пересечение всех \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , обладающих свойством α ;
 $\Delta_{\alpha}^{\times}(G)$ — пересечение всех \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , имеющих составной индекс;
 $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{X}}(G)$ — пересечение всех \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , имеющих простой индекс;
 $O_{\pi}(G)$ — наибольшая нормальная π -подгруппа группы G ;
 $O_p(G)$ — наибольшая нормальная p -подгруппа группы G ;
 $\delta_{\mathfrak{X}}^{\times}(G)$ — пересечение всех \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , содержащих $O_{\pi}(G)$;
 $\bar{\delta}_{\mathfrak{X}}^{\times}(G)$ — пересечение всех \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , содержащих $O_{\pi}(G)$ и не принадлежащих \mathfrak{X} ;
 $\varphi_{\mathfrak{X}}(G)$ — пересечение всех максимальных подгрупп группы G , содержащих $O_{\pi}(G)$;
 $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G ;
 $O_{p\text{-н}}(G)$ — наибольшая нормальная p -нильпотентная подгруппа группы G ;
 $Z_{\mathfrak{X}}^{\times}(G)$ — \mathfrak{X} -гиперцентр группы G ;
 $Z_{\mathfrak{X}}(G)$ — гиперцентр группы G ;
 G_p — силовская p -подгруппа группы G ;
 G_{π} — холловская π -подгруппа группы G ;
 $S(G)$ — наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G ;
 $\ell_p(G)$ — p -длина группы G ;
 $\text{Hol}G$ — голоморф группы G ;
 $\text{Soc}(G)$ — цоколь группы G ;
 $\text{Soc}_{\mathfrak{X}}(G)$ — \mathfrak{X} -цоколь группы G ;
 $\mathfrak{F}(G, \mathfrak{X})$ — подгруппа группы G , определяемая равенством $\mathfrak{F}(G, \mathfrak{X})/\Phi(G) = \text{Soc}_{\mathfrak{X}}(G/\Phi(G))$;
 $G^{\mathfrak{X}}$ — \mathfrak{X} -корадикал группы G .

Если H и K — подгруппы группы G , то:

- $\text{Core}_G(H)$ — ядро подгруппы H в группе G ;
 $|G : H|$ — индекс подгруппы H в группе G ;
 H^G — нормальное замыкание подгруппы H в группе G ;
 $C_G(H)$ — централизатор подгруппы H в группе G ;
 $C_G(H/K)$ — централизатор фактора H/K в группе G ;
 $N_G(H)$ — нормализатор подгруппы H в группе G ;
 $[H, K]$ — взаимный коммутант подгрупп H и K ;
 $\langle H, K \rangle$ — подгруппа, порожденная подгруппами H и K .

Если подгруппа H субнормальна в G , то мы пишем $H \triangleleft\triangleleft G$. Запись $H \triangleleft \circ G$ означает, что H — максимальная подгруппа группы G .

Если K — нормальная подгруппа группы G , то:

- $m(G, K)$ — множество всех максимальных подгрупп группы G , не содержащих K ;
 $m_1(G, K)$ — множество всех тех максимальных подгрупп M из $m(G, K)$, для которых $M \cap K \neq 1$.

Если A и B — группы, то:

- $A \times B$ — прямое произведение групп A и B ;
 $[A]B$ — полупрямое произведение групп A и B ;
 $A \text{ wr } B$ — регулярное сплетение групп A и B .

Пусть \mathfrak{X} — класс групп. Тогда:

- \mathfrak{X}_π — класс всех π -групп из \mathfrak{X} ;
 $\text{form } \mathfrak{X}$ — наименьшая формация, содержащая класс \mathfrak{X} ;
 $\text{form } G$ — наименьшая формация, содержащая группу G ;
 $\ell\text{form } \mathfrak{X}$ — наименьшая локальная формация, содержащая класс \mathfrak{X} ;
 $Q\mathfrak{X}$ — класс всех гомоморфных образов групп из \mathfrak{X} ;
 $P\mathfrak{X}$ — класс всех групп, примитивные гомоморфные образы которых принадлежат \mathfrak{X} ;
 $E_\Phi \mathfrak{X}$ — класс всех тех групп G , которые обладают нормальной подгруппой N такой, что $G/N \in \mathfrak{X}$ и $N \subseteq \Phi(G)$;
 \mathcal{P} — класс всех примитивных групп;
 \mathcal{P}_1 — класс всех примитивных монолитических групп с абелевым монолитом;
 \mathcal{P}_2 — класс всех примитивных монолитических групп с неабелевым монолитом;
 \mathcal{P}_3 — класс всех примитивных немонолитических групп;
 $Q(\mathfrak{X})$ — Q -граница класса \mathfrak{X} ;
 \mathfrak{N} — класс всех нильпотентных групп;
 \mathfrak{N}_p — класс всех p -групп;
 \mathfrak{E}_π — класс всех π -групп;
 \mathfrak{H} — класс всех сверхразрешимых групп;
 \mathfrak{S} — класс всех разрешимых групп;
 \mathcal{K} — множество всех классов Шунка;
 $\mathfrak{H}_{\text{reg}}$ — множество всех регулярных m -функторов, выдерживающих все изоморфизмы.

ВВЕДЕНИЕ

В теории конечных групп центральное место занимают объекты, экстремально расположенные в группе. К таким объектам, в первую очередь, относятся максимальные подгруппы. Знание их строения, способа вложения в группу, а также взаимодействия между собой и с другими подгруппами позволяет вскрыть многие свойства самих групп. Указанные обстоятельства предопределили широкий интерес исследователей к максимальным подгруппам еще на рубеже XX века [65, 89]. При этом выделлись и стали интенсивно развиваться следующие два направления:

- 1) изучение строения группы в зависимости от свойств некоторой системы ее максимальных подгрупп;
- 2) определение свойств пересечений заданных максимальных подгрупп и исследование влияния этих свойств на подгрупповое и нормальное строение группы.

На перспективность и важность первого направления указано С.Н. Черниковым в обзоре: “Исследования групп с теми или иными ограничениями для подгрупп определяют одно из основных направлений в общей теории групп” [54].

Начало этого направления восходит к работе О.Ю. Шмидта [65], где доказана разрешимость конечной группы, все максимальные подгруппы которой нильпотентны. Дальнейшее развитие этой работы привело к так называемым критическим группам, т.е. группам, у которых все максимальные подгруппы обладают некоторым свойством, в то время как сама группа его не имеет. В этом направлении отметим работу И.К. Чунихиной, С.А. Чунихина [55] о строении критических p -разложимых групп, работы Хупперта [99] и Дёрка [79] о критических сверх-

разрешимых группах, теорему Томпсона [113] о минимальных неразрешимых группах.

Большое место в теории конечных групп занимают также исследования по выяснению влияния индексов максимальных подгрупп на строение группы. В этом плане выделим результат Ф. Холла из [53] о разрешимости групп, индексы максимальных подгрупп которых либо просты, либо являются квадратами простых чисел. Отметим также теорему Хупперта [99] о характеристике сверхразрешимых групп и результаты Л.А. Шеметкова [57], В.А. Ведерникова [6] и Л.Я. Полякова [22,23] о влиянии индексов максимальных подгрупп на строение нормальных подгрупп.

Второе из указанных выше направлений инициировано работой Фраттини [89], установившего нильпотентность пересечения $\Phi(G)$ всех максимальных подгрупп конечной группы G . В 50-х годах теорема Фраттини получила развитие в работах Гашюца [90] (пересечение $\Delta(G)$ всех ненормальных максимальных подгрупп группы G) и Дескинса [78] (пересечение $\Phi_p(G)$ всех максимальных подгрупп группы G , индексы которых не делятся на p). Ряд интересных результатов о свойствах подгрупп Фраттиниева типа получены в работах В.А. Ведерникова и Т.Т. Огаркова [8], В.А. Ведерникова и Н.Г. Дуки [7], В.В. Шлыка [62] и др.

Развитие структурной теории конечных групп в 60-х годах в значительной степени стимулировалось результатами, связанными с теорией формаций. Берущая начало в 1963 г. от работы [91] Гашюца, теория формаций к концу 70-х годов достигла степени своей зрелости. Напомним, что класс групп называется формацией, если он замкнут относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений с конечным числом сомножителей. Наиболее яркие результаты в теории формаций конечных групп принадлежат Бэру, Гашюцу, Хупперту, Дёрку, Картеру, Хоуксу, Л.А. Шеметкову, А.Н. Скибе, В.А. Ведерникову. Особо следует отметить монографию Л.А. Шеметкова "Формации конечных групп", оказавшую огромное влияние на развитие теории формаций конечных групп в последующие годы.

Если на первых шагах своего развития понятие формации использовалось в основном в связи с разработкой общих методов отыскания канонических подгрупп в конечных разрешимых группах, то позже стало ясно, что методы теории классов с успехом могут быть применены при решении целого спектра

задач в произвольных конечных группах. По этому поводу С.А. Чунихин и Л.А. Шеметков в обзоре [56] отмечают следующее:

“Есть много теорем, условия которых определенным образом связаны с конкретными формациями (например, с формацией нильпотентных групп). Общая тенденция в развитии теории формаций состоит в анализе того, насколько эта конкретность существенна. Пересмотру подвергаются и многие понятия. Общий взгляд, который мы имеем благодаря Гашюцу, позволяет получать результаты, объединяющие разрозненные закономерности и которые нередко являются новыми и для самых распространенных формаций”.

Сказанное относится и к результатам, связанным с максимальными подгруппами конечных групп. Применение идей и методов теории формаций позволило систематизировать накопившийся богатый фактический материал о максимальных подгруппах. Этому способствовало введенное в работах Картера, Хоукса [77] и Л.А. Шеметкова [58] понятие \mathfrak{f} -абнормальной максимальной подгруппы.

Напомним, что если \mathfrak{f} — непустая формация, то максимальная подгруппа M группы G называется \mathfrak{f} -нормальной, если $M \cong G^{\mathfrak{f}}$, и \mathfrak{f} -абнормальной, если $MG^{\mathfrak{f}} = G$. Понятно, что при таком подходе подгруппа $\Delta^{\mathfrak{f}}(G)$, равная пересечению всех \mathfrak{f} -абнормальных максимальных подгрупп ($\Delta^{\mathfrak{f}}(G) = G$, если в группе G таких подгрупп нет), совпадает с подгруппой Фраттини в случае, когда \mathfrak{f} — единичная формация. Если $\mathfrak{f} = \mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп, то подгруппа $\Delta^{\mathfrak{f}}(G)$ совпадает с подгруппой Гашюца $\Delta(G)$, равной пересечению всех ненормальных максимальных подгрупп.

Исследования свойств подгруппы $\Delta^{\mathfrak{f}}(G)$ для разрешимых локальных формаций были начаты В.В. Шлыком в [63]. В работах Л.А. Шеметкова [58] и автора [26,27] рассматривались произвольные локальные формации. Аналоги подгруппы $\Delta^{\mathfrak{f}}(G)$ изучались М.В. Селькиным в работах [29,34,38,45,46].

В конце 80-х и начале 90-х годов интерес к подгруппам Фраттини типа значительно активизировался. Так, в монографии [61] Л.А. Шеметков и А.Н. Скиба изучают свойства подгруппы $\Delta^{\mathfrak{f}}(G)$ для нелокальных формаций. Баллестер—Болинше в [67], Фенг и Чанг в [83] повторяют результаты автора о подгруппах типа $\Delta^{\mathfrak{f}}(G)$. Пересечения максимальных подгрупп с ограничениями на индексы изучаются в работах [2,72,83]. Поведение

нормальных и обобщенно нормальных подгрупп в обобщенно фраттиниевых расширениях изучаются в работах Баллестера—Болинше и Перец—Рамош [68], Бейдлемана и Смита [74]. Так называемые ядра формаций исследуют Бетчел и Хофман в [73]. Влияние максимальных подгрупп на строение группы и ее нормальных подгрупп изучается в работах [10,24,95]. В работах В.Н. Семенчука [47], А.Ф. Васильева [4], А.В. Сидорова [49], А.В. Бузланова [3], А.Д. Ходаевича [52] были исследованы минимальные не f -группы и группа с заданными системами f -абнормальных и f -нормальных подгрупп.

Существенное развитие в это время в теории конечных групп получили функциональные подходы. Особо выделим работу С.Ф. Каморникова и Л.А. Шеметкова об операторах Виландта на субнормальных подгруппах [17] и работу С.Ф. Каморникова об операторах Виландта—Кегеля на f -достижимых подгруппах групп [12].

Внедрение функциональных подходов в исследования свойств максимальных подгрупп дало возможность по-новому взглянуть на задачи о пересечениях максимальных подгрупп и проблемы характеристики нормальных подгрупп, имеющих специальные пересечения с максимальными подгруппами группы. При этом оказалось, что более естественно решение таких задач с позиций классов Шунка, чем с позиций формаций.

Напомним, что класс \mathfrak{X} называется классом Шунка, если он является гомоморфом и содержит группы, все примитивные гомоморфные образы которых входят в \mathfrak{X} . Понятие класса Шунка было введено в 1967 г. Шунком [110] в связи с изучением проективных свойств групп. Среди исследований по теории классов Шунка наиболее значительный след оставили публикации Дёрка [80], Гашюца [92,93], Фёрстера [84,85,87], Эриксона [82].

В данной работе идеи классов Шунка используются для исследования свойств подгрупп фраттиниева типа, а также для изучения строения нормальных подгрупп, имеющих заданные пересечения с максимальными подгруппами группы. Новые функциональные подходы в совокупности с проективными возможностями классов Шунка позволили расширить формационную схему решения указанных задач и ответить на ряд открытых вопросов.

Ниже охарактеризовано содержание книги по главам. Некоторые комментарии к отдельным результатам можно найти в

заключительном параграфе (“Дополнения и комментарии”) к каждой главе. Отметим, что все рассматриваемые группы предполагаются конечными. В работе используются определения и обозначения, принятые в [59,61,81].

В главе 1 “Классы Шунка и m -функторы” развивается функциональный подход, обосновывающий необходимость рассмотрения с позиций классов Шунка задачи о пересечении максимальных подгрупп конечной группы. В основу данного подхода положены понятия m -функтора и обобщенной подгруппы Фраттини, возникшие из анализа результатов [78,89,90], связанных с изучением свойств максимальных подгрупп и их пересечений. Эти понятия определяются следующим образом. Пусть Θ — подгрупповой функтор, который сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\Theta(G)$ ее максимальных подгрупп и саму группу G . Функтор Θ называется m -функтором, если для любой максимальной подгруппы $M \in \Theta(G)$ всегда следует $M^x \in \Theta(G)$ для всех $x \in G$. Обобщенная подгруппа (или Θ -подгруппа) Фраттини $\Phi_{\Theta}(G)$ группы G определяется как пересечение всех подгрупп из $\Theta(G)$. Так как всегда $G \in \Theta(G)$, то пересечение $\Phi_{\Theta}(G)$ не является пустым для любой группы G .

Особое место занимают регулярные m -функторы, возникшие на основе аксиоматизации свойства инвариантности некоторых m -функторов при всех гомоморфизмах групп. m -Функтор Θ называется регулярным, если выполняются следующие два условия:

- 1) из $N \triangleleft G$ и $M \in \Theta(G)$ следует $MN/N \in \Theta(G/N)$;
- 2) из $M/N \in \Theta(G/N)$ следует $M \in \Theta(G)$.

Понятно, что в общем случае значения m -функтора Θ на изоморфных группах могут быть различными. Для того чтобы устранить такой недостаток, будем полагать, что m -функтор Θ обладает свойством

$$\Theta(G^{\alpha}) = \{M^{\alpha} \mid M \in \Theta(G)\}$$

для любого изоморфизма α любой группы G . Будем говорить в этом случае, что Θ выдерживает все изоморфизмы.

Связь теории m -функторов с теорией классов групп устанавливает теорема 1.1.16. Прежде чем сформулировать ее, приведем определения \mathfrak{X} -нормальной и \mathfrak{X} -абнормальной максимальных подгрупп для произвольного класса \mathfrak{X} .

Если \mathfrak{X} — непустой класс групп, то максимальная подгруппа M группы G называется:

- 1) \mathfrak{X} -нормальной, если $G/\text{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$;
- 2) \mathfrak{X} -абнормальной, если $G/\text{Core}_G(M)$ не входит в \mathfrak{X} .

1.1.16. Теорема. Пусть Θ — регулярный m -функтор, который выдерживает все изоморфизмы. Тогда класс $\mathfrak{X} = \{G \mid \Phi_\Theta(G) = G\}$ является классом Шунка и для любой группы R максимальные подгруппы из $\Theta(R)$ являются \mathfrak{X} -абнормальными.

Теорема 1.1.16 интересна в следующих отношениях.

1. Она позволяет строить новые примеры классов Шунка по заданным m -функторам, и наоборот, выделять регулярные m -функторы, соответствующие классам Шунка.

2. Подчеркивает важность изучения пересечения \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп именно для классов Шунка \mathfrak{X} и позволяет вложить в единую схему соответствующие исследования Л.А. Шеметкова [58], Балдестера—Болинше [67] и автора [26,27,29,34,38,45] по локальным формациям и исследования Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [61] по произвольным формациям.

Из леммы 1.2.1 и теоремы 1.2.3 следует, в частности, что изучение пересечений \mathfrak{f} -абнормальных максимальных подгрупп для формаций редуцируется к соответствующей задаче для классов Шунка. Такая редукция позволяет успешно использовать при решении указанной задачи технические возможности, возникающие из замкнутости класса Шунка относительно фраттиниевых расширений, а также проективные свойства классов Шунка.

3. С теоремой 1.1.16 связаны определенные перспективы изучения обобщенной подгруппы Фраттини $\Phi_\Theta(G)$ для регулярного m -функтора Θ , так как в этом случае для любой группы G справедливо включение

$$\Delta^*(G) \subseteq \Phi_\Theta(G),$$

где \mathfrak{X} — класс Шунка, индуцированный m -функтором Θ . Такой взгляд на проблему изучения подгрупп фраттинијева типа позволяет разбить ее исследование на два этапа:

- 1) изучение строения подгруппы $\Delta^*(G)$;
- 2) изучение строения факторгруппы $\Phi_\Theta(G)/\Delta^*(G)$.

Параграф 1.2 посвящен изучению свойств решеток m -функторов и классов Шунка.

Пусть $\mathcal{H}_{\text{рег}}$ — множество всех регулярных m -функторов, выдерживающих изоморфизмы. На этом множестве определим операции объединения и пересечения m -функторов следующим образом:

$$(\Theta_1 \cup \Theta_2)(G) = \Theta_1(G) \cup \Theta_2(G),$$

$$(\Theta_1 \cap \Theta_2)(G) = \Theta_1(G) \cap \Theta_2(G).$$

Положим $\Theta_1 \wedge \Theta_2 = \Theta_1 \cap \Theta_2$, $\Theta_1 \vee \Theta_2 = \Theta_1 \cup \Theta_2$.

Пусть \mathcal{K} — множество всех классов Шунка, на котором введем отношение частичного порядка следующим образом: $\mathfrak{X}_1 \leq \mathfrak{X}_2$ тогда и только тогда, когда класс Шунка \mathfrak{X}_1 содержится в классе Шунка \mathfrak{X}_2 . Для любых двух классов Шунка \mathfrak{X}_1 и \mathfrak{X}_2 положим $\mathfrak{X}_1 \wedge \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_1 \vee \mathfrak{X}_2$ — наименьший класс Шунка, содержащий множество $\mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2$.

Следующая теорема устанавливает связь между решетками $\mathcal{H}_{\text{рег}}$ и \mathcal{K} .

1.2.6. Теорема. Отображение, сопоставляющее каждому m -функтору $\Theta \in \mathcal{H}_{\text{рег}}$ класс Шунка, индуцированный m -функтором Θ , задает антиэпиморфизм решетки $\mathcal{H}_{\text{рег}}$ на решетку \mathcal{K} всех классов Шунка.

Так как $\mathcal{H}_{\text{рег}}$ — полная дистрибутивная решетка, то следствием указанного в теореме 1.2.6 антиэпиморфизма является следующий факт.

1.2.8. Следствие. Решетка всех классов Шунка конечных групп дистрибутивна.

Отметим, что решетка многообразий групп не является дистрибутивной [98]. Модулярными, но не дистрибутивными являются также решетки всех формаций и всех локальных формаций [51, 61], решетка p -локальных формаций [69].

В теории формаций конечных групп большое место занимают исследования, связанные с изучением решетки подформаций формации, порожденной конечной группой G . В случае, когда G — разрешимая группа, Брайант, Брайс и Хартли [76] доказали, что решетка подформаций формации $\text{form}G$ конечна. В общем случае вопрос о конечности указанной решетки является весьма сложным и известен в теории групп как проблема Гашюца [81] (см. также проблему 9.59 из [18]). Интересные частные случаи проблемы Гашюца изучены в работах А.Н. Скибы [50] и Фоя

[88]. Вопрос о конечности решетки подклассов Фиттинга класса FitG изучался Н.Т. Воробьевым [9]. Результаты параграфа 1.2 позволяют в полной мере ответить на аналогичный вопрос для классов Шунка.

В главе 2 “ Θ -Подгруппы Фраттини” реализуется описанная выше схема изучения Θ -подгруппы Фраттини $\Phi_{\Theta}(G)$ по свойствам подгруппы $\Delta^*(G)$, где \mathfrak{X} — класс Шунка, индуцированный \mathfrak{m} -функтором Θ . Первым шагом на этом пути является исследование структуры подгруппы $\Delta^*(G)$ для класса Шунка \mathfrak{X} . Эта задача решается в параграфе 2.1 для тех классов Шунка, которые обладают свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$.

Как известно [66], множество \mathcal{P} всех примитивных групп разбивается в объединение трех попарно непересекающихся множеств $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$, где \mathcal{P}_1 — класс примитивных монолитических групп с абелевым монолитом; \mathcal{P}_2 — класс примитивных монолитических групп с неабелевым монолитом; \mathcal{P}_3 — класс примитивных немонолитических групп. Условие $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ означает, что Q -граница класса \mathfrak{X} не содержит немонолитических примитивных групп (напомним, что Q -границей класса \mathfrak{X} называется класс $\ell(\mathfrak{X})$, состоящий из всех тех групп G , которые не принадлежат \mathfrak{X} , но $G/N \in \mathfrak{X}$ для всех $1 \neq N \triangleleft G$). Следующая лемма показывает, что множество классов Шунка с указанной Q -границей достаточно широко. Отметим лишь, что введение такого ограничения связано с применением технического аппарата, предусматривающего наличие у класса Шунка \mathfrak{X} определенных проективных свойств.

Центральное место во второй главе занимает теорема 2.1.29, устанавливающая строение подгруппы $\Delta^*(G)$ для любой группы G .

2.1.29. Теорема. Пусть \mathfrak{X} — нормально наследственный класс Шунка, обладающий свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Пусть в любой группе $R \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$, где \mathfrak{N} — класс всех нильпотентных групп, все \mathfrak{X} -проекторы сопряжены. Тогда $\Delta^*(G) = A \times B$, где

$$A \in \mathfrak{X}, B \subseteq \Phi(G), \pi(\mathfrak{X}) \cap \pi(B) = \emptyset.$$

Напомним, что если \mathfrak{X} — непустой класс групп, то подгруппа N группы G называется \mathfrak{X} -проектором, если NN/N — \mathfrak{X} -

максимальная подгруппа группы G/N для любой нормальной подгруппы N группы G .

Класс \mathfrak{X} называется нормально наследственным, если из $G \in \mathfrak{X}$ всегда следует, что $N \in \mathfrak{X}$ для любой нормальной подгруппы N группы G . Через $\pi(\mathfrak{X})$ обозначается множество всех простых чисел, делящих порядки групп из \mathfrak{X} .

Из результатов Шмида [109] и Э.Ф. Шмигирева [64] в любой группе с разрешимым \mathfrak{f} -корадикалом существует единственный класс сопряженных \mathfrak{f} -проекторов, если \mathfrak{f} — локальная формация. Поэтому из теоремы 2.1.29 ввиду леммы 2.1.6 вытекают соответствующие результаты Л.А.Шеметкова [58] и автора [27] для локальных формаций.

Согласно теореме Шунка [110], в любой разрешимой группе существует единственный класс сопряженных \mathfrak{X} -проекторов для любого класса Шунка \mathfrak{X} . Кроме того, на основании леммы 2.1.6 каждый разрешимый класс Шунка \mathfrak{X} обладает свойством $\mathfrak{K}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Поэтому на основании теоремы 2.1.29 имеем

2.1.35. Следствие. Пусть \mathfrak{X} — нормально наследственный разрешимый класс Шунка. Тогда для любой группы G справедливо равенство $\Delta^*(G) = A \times B$, где

$$A \in \mathfrak{X}, \quad B \subseteq \Phi(G), \quad \pi(\mathfrak{X}) \cap \pi(B) = \emptyset.$$

В работе [61] А.Н. Скиба и Л.А. Шеметков изучали строение подгруппы $\Delta^s(G)$ для произвольной формации. При этом исследованы только \mathfrak{f} -гиперцентральные свойства такой подгруппы. Детальное строение подгруппы $\Delta^s(G)$ в случае произвольной формации \mathfrak{f} устанавливает следующий результат, вытекающий из теоремы 2.1.29.

2.5.2. Теорема. Пусть \mathfrak{f} — непустая разрешимая нормально наследственная формация. Тогда для любой группы G подгруппа $\Delta^s(G)$ представима в виде прямого произведения $\Delta^s(G) = A \times B$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $A/\Phi(A) \in \mathfrak{f}$;
- 2) $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{f}) = \emptyset$;
- 3) $B \subseteq \mathfrak{f}(G)$.

Доказательству теоремы 2.1.29 предшествует в работе ряд результатов, устанавливающих для класса Шунка \mathfrak{X} связь \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп группы с ее \mathfrak{X} -

центральными и \mathfrak{X} -эксцентральными главными факторами. В случае формаций такая связь хорошо исследована (см., например, [59,61]). Напомним, что если \mathfrak{X} — непустой класс групп, то нормальный фактор H/K группы G называется \mathfrak{X} -центральным, если

$$[H/K] (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{X}.$$

Если же

$$[H/K] (G/C_G(H/K)) \notin \mathfrak{X},$$

то фактор H/K называется \mathfrak{X} -эксцентральным.

Следующая теорема для класса Шунка \mathfrak{X} характеризует \mathfrak{X} -абнормальные и \mathfrak{X} -нормальные максимальные подгруппы группы в терминах \mathfrak{X} -центральности.

2.1.7. Теорема. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, обладающий свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Пусть H/K — главный фактор группы G , M — максимальная подгруппа группы G , не покрывающая H/K . Тогда и только тогда подгруппа M \mathfrak{X} -нормальна в G , когда фактор H/K \mathfrak{X} -централен в G .

Так как каждая локальная формация является классом Шунка, то из теоремы 2.1.7 следует соответствующий результат Л.А. Шеметкова из [58]. Случай произвольной формации \mathfrak{f} , рассмотренный А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым в [61] выводится из теоремы 2.1.7, если рассмотреть класс Шунка $\mathfrak{X} = E_{\mathfrak{f}}$.

В случае, когда \mathfrak{X} — непустая формация, \mathfrak{X} -абнормальная максимальная подгруппа группы может быть определена как максимальная подгруппа, не содержащая \mathfrak{X} -корадикал группы. Подобная характеристика развивается в работе для классов Шунка. Это достигается с помощью следующего определения.

Пусть \mathfrak{X} — непустой класс групп. Нормальная подгруппа N группы G называется \mathfrak{X} -корадикальной подгруппой, если $G/N \in \mathfrak{X}$ и всегда из $G/K \in \mathfrak{X}$ и $K \subseteq N$ следует $K = N$. Множество всех \mathfrak{X} -корадикальных подгрупп группы G мы называем \mathfrak{X} -корадикалом группы G и обозначаем через G^* .

Для R_0 -замкнутого класса \mathfrak{X} (в частности, для непустой формации) определенное выше множество G^* одноэлементно. В этом случае единственную \mathfrak{X} -корадикальную подгруппу группы

G также обозначаем через G^* . Для класса Шунка \mathfrak{X} , не являющегося формацией, G^* может содержать несколько \mathfrak{X} -корадикальных подгрупп. Однако все они расположены одинаково по отношению ко всем максимальным подгруппам группы.

2.1.18. Теорема. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, обладающий свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Если M — максимальная подгруппа группы G , то либо M содержит все \mathfrak{X} -корадикальные подгруппы группы G , либо M не покрывает каждую из них.

2.1.19. Следствие. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, обладающий свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Пусть M — максимальная подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) подгруппа M \mathfrak{X} -нормальна тогда и только тогда, когда она содержит все \mathfrak{X} -корадикальные подгруппы группы G ;

2) подгруппа M \mathfrak{X} -абнормальна тогда и только тогда, когда она не содержит ни одну из \mathfrak{X} -корадикальных подгрупп группы G .

Указанная характеристика \mathfrak{X} -нормальных максимальных подгрупп дает возможность описать строение Θ -подгруппы Фраттини группы G в случае, когда Θ — \mathfrak{X} -нормальный m -функтор (т.е. m -функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все ее \mathfrak{X} -нормальные максимальные подгруппы).

Результаты параграфа 2.1, устанавливающего строение подгруппы $\Delta^*(G)$, применяются в параграфах 2.2 и 2.3 при изучении Θ -подгрупп Фраттини группы G для m -функторов, близких к \mathfrak{X} -абнормальным. В частности, в параграфе 2.2 исследуются свойства Θ -подгруппы Фраттини в случае, когда Θ — m -функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все ее \mathfrak{X} -абнормальные максимальные подгруппы, не принадлежащие классу \mathfrak{X} . В дальнейшем Θ -подгруппу Фраттини $\Phi_\Theta(G)$ группы G , соответствующую указанному m -функтору Θ , будем обозначать $\bar{\Delta}^*(G)$.

2.2.3. Теорема. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, обладающий свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Пусть группа G не принадлежит классу \mathfrak{X} . Тогда выполняется одно из следующих двух утверждений:

1) всякая \mathfrak{X} -абнормальная максимальная подгруппа группы G принадлежит \mathfrak{X} и $N/N \cap \Phi(G)$ — \mathfrak{X} -эксцентральный главный фактор группы G для любой \mathfrak{X} -корадикальной подгруппы N группы G ;

2) группа G обладает \mathfrak{X} -абнормальными максимальными подгруппами, не принадлежащими \mathfrak{X} , причем $\bar{\Delta}^*(G) = \Delta^*(G)$.

Из теоремы 2.2.3, в частности, следует, что для любой группы G и любого класса Шунка \mathfrak{X} с условием $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq P_1 \cup P_2$ выполняется одно из утверждений:

- 1) $\bar{\Delta}^*(G)/\Delta^*(G) = 1$;
- 2) $\bar{\Delta}^*(G)/\Delta^*(G) = G/\Delta^*(G)$.

Обратим внимание еще на одно следствие теоремы 2.2.3. Пусть \mathfrak{X} — произвольный класс Шунка, G — разрешимая группа. Тогда выполняется одно из трех утверждений:

- 1) $\bar{\Delta}^*(G) = \Delta^*(G) = G \in \mathfrak{X}$;
- 2) $\bar{\Delta}^*(G) = G$, $\Delta^*(G) \neq G$ и $\Delta^*(G) = \text{Core}_G(H)$, где H — \mathfrak{X} -проектор группы G ;
- 3) $\bar{\Delta}^*(G) \neq G$ и $\bar{\Delta}^*(G) = \Delta^*(G)$.

В параграфе 2.2 исследуется также для локальной формации \mathfrak{f} строение подгруппы $\Delta^*(G)$, являющейся пересечением \mathfrak{f} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , обладающих некоторым свойством α , сохраняющимся при действии всех автоморфизмов группы G . Полученная информация используется (см. следствия 2.1.10 и 2.1.11) для изучения пересечений несверхразрешимых максимальных подгрупп составного индекса.

В параграфе 2.3 изучается строение подгруппы $\Delta^{\mathfrak{f}}(G)$, являющейся пересечением \mathfrak{f} -абнормальных максимальных подгрупп, индексы которых не делятся на числа из некоторого множества π . Центральное место здесь занимает теорема 2.3.3.

2.3.3. Теорема. Пусть \mathfrak{f} — непустая формация. Если в группе G подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} , то

$$\Delta^{\mathfrak{f}}(G)/O_{\pi}(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G/O_{\pi}(G)).$$

2.3.4. Следствие. Если \mathfrak{f} — локальная нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, а подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} , то $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{f}}(G)/O_{\pi}(G) \in \mathfrak{f}$.

Если $\pi = \{p\}$, где p — простое число, то подгруппу $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{f}}(G)$ будем обозначать $\Delta_p^{\mathfrak{f}}(G)$. Ввиду теоремы Силова и теоремы 2.3.3 справедливы следующие утверждения.

2.3.5. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — непустая формация. Тогда

Имя Ф. Скарины

БІБЛІОТЕКА

$$\Delta_p^{\mathfrak{f}}(G)/O_p(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G/O_p(G))$$

для любой группы G .

2.3.6. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — локальная нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы. Тогда $\Delta_p^{\mathfrak{f}}(G)/O_p(G) \in \mathfrak{f}$ для любой группы G .

Следующая теорема устанавливает связь подгруппы $\Delta^{\mathfrak{f}}(G)$ с подгруппой $\Delta_p^{\mathfrak{f}}(G)$.

2.3.7. Теорема. Пусть p и q — различные простые числа. Тогда для любой формации \mathfrak{f} и любой группы G справедливо равенство

$$\Delta_p^{\mathfrak{f}}(G) \cap \Delta_q^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G).$$

В параграфе 2.4 исследуется поведение обобщенно субнормальных подгрупп в обобщенно фраттиниевых расширениях конечных групп. Результаты этого параграфа направлены на развитие следующей теоремы Л.А. Шеметкова.

Теорема [59]. Пусть \mathfrak{f} — некоторая локальная формация, N — нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{f}$. Тогда подгруппа N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $N_1 \in \mathfrak{f}$;
- 2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{f}) = \emptyset$;
- 3) $N_2 \subseteq \Phi(G)$.

Среди многочисленных направлений развития этого результата выделим прежде всего направление, связанное с заменой локальной формации \mathfrak{f} в указанной теореме другими классами с достаточно хорошими фраттиниевыми свойствами. С реализацией этого направления в работе связана следующая теорема.

2.4.1. Теорема. Пусть \mathfrak{X} — непустой класс Шунка. Пусть в любой группе $R \in \mathfrak{X}$, где \mathfrak{N} — класс всех нильпотентных групп, все \mathfrak{X} -проекторы сопряжены. Пусть N — нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{X}$. Если $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{X})$, то подгруппа N представима в виде прямого произведения $N = A \times B$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $A \in \mathfrak{X}$;
- 2) $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{X}) = \emptyset$;

3) $B \subseteq \Phi(G)$.

Приведем лишь одно следствие этого результата, характеризующее степень распространения теоремы Л.А. Шеметкова.

2.4.4. Следствие. Пусть \mathfrak{X} — нормально наследственный разрешимый класс Шунка. Пусть N — нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{X}$. Тогда подгруппа N представима в виде прямого произведения $N = A \times B$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $A \in \mathfrak{X}$;
- 2) $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{X}) = \emptyset$;
- 3) $B \subseteq \Phi(G)$.

Второе направление развития теоремы Л.А. Шеметкова инициировано следующей проблемой Бейдлемана и Смита из [74]: “Пусть H — субнормальная подгруппа группы G , содержащая подгруппу $\Phi(G)$. Будет ли H сверхразрешимой, если сверхразрешима группа $H/\Phi(G)$?” Мы исследуем эту проблему более широко, рассматривая вместо формации всех сверхразрешимых групп произвольную локальную наследственную формацию и заменяя субнормальную подгруппу H обобщенно субнормальной (в смысле Кегеля) подгруппой. Отметим, что некоторые частные аспекты такой постановки задачи рассмотрены Баллестером—Болинше и Перец—Рамош в работе [68].

Прежде чем сформулировать основной результат параграфа 2.4, приведем некоторые определения.

Определение. Пусть \mathfrak{f} — непустая формация. Подгруппа H группы G называется \mathfrak{f} -достижимой, если существует такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G,$$

что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется одно из условий:

- 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i ;
- 2) \mathfrak{f} -корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1} .

Определение. Пусть \mathfrak{f} — непустая формация. Подгруппа H группы G называется \mathfrak{f} -субнормальной, если либо $H = G$, либо существует такая максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G,$$

что \mathfrak{f} -корадикал подгрупп H_i содержится в H_{i-1} для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Напомним, что понятие \mathfrak{f} -субнормальной подгруппы в классе разрешимых групп введено Картером и Хоуксом [77], в произвольном случае — Л.А. Шеметковым [58]. Понятие \mathfrak{f} -достижимой подгруппы впервые предложено Кегелем [102]. Указывая на важность развития теории таких подгрупп, Кегель [102] отмечает, что "...представляет интерес некоторые теоремы о субнормальных подгруппах доказать в подходящей форме для \mathfrak{f} -субнормальных подгрупп".

Понятия \mathfrak{f} -субнормальной и \mathfrak{f} -достижимой подгруппы позволили систематизировать многие закономерности, связанные с нормальными и субнормальными подгруппами (см., например, работы [1,5,12]). Идея \mathfrak{f} -достижимой подгруппы помогает, в частности, развить теорему Л.А.Шеметкова о строении нормальных подгрупп во Фраттининовых расширениях групп.

2.4.11. Теорема. Пусть \mathfrak{f} — наследственная локальная формация, N — \mathfrak{f} -достижимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{f}$. Тогда подгруппа N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $N_1 \in \mathfrak{f}$;
- 2) $\pi(N_1) \cap \pi(\mathfrak{f}) = \emptyset$;
- 3) $N_2 \subseteq \Phi(G)$.

2.4.17. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — наследственная локальная формация, N — \mathfrak{f} -субнормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{f}$. Тогда $N \in \mathfrak{f}$.

Третье направление развития указанной выше теоремы Л.А. Шеметкова состоит в замене подгруппы Фраттини $\Phi(G)$ группы G обобщенной подгруппой Фраттини $\Phi_{\mathfrak{f}}(G)$ и, в частности, подгруппой $\Delta^{\mathfrak{f}}(G)$. В данной работе это удается сделать в случае нормальной подгруппы для произвольной локальной нормально наследственной формации, а в случае \mathfrak{f} -достижимой подгруппы — для локальной наследственной формации.

2.4.5. Теорема. Пусть \mathfrak{f} — нормально наследственная локальная формация, N — нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f}$. Тогда подгруппа N представима в виде прямого произведения $N = A \times B$, множители которого удовлетворяют условиям:

- 1) $A \in \mathfrak{f}$;
- 2) $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{f}) = \emptyset$;

3) $B \subseteq \Phi(G)$.

2.4.18. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — наследственная локальная формация, H — \mathfrak{f} -достижимая подгруппа группы G и $H/H \cap \Delta^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f}$. Тогда подгруппа H представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $H_1 \in \mathfrak{f}$;
- 2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{f}) = \emptyset$;
- 3) $H_2 \subseteq \Phi(G)$.

2.4.19. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если подгруппа H \mathfrak{f} -достижима в группе G и $H/H \cap \Delta^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f}$, то $H \in \mathfrak{f}$.

Следующий результат дает положительный ответ на поставленный выше вопрос Бейдлемана и Смита.

2.4.20. Следствие. Пусть H — подгруппа группы G . Пусть существует такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G,$$

что для любого $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется одно из условий:

- 1) H_{i-1} нормальна в H_i ;
- 2) разрешимый корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1} и $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число. Если группа $H/H \cap \Delta^{\mathfrak{f}}(G)$ сверхразрешима, то H — сверхразрешимая подгруппа группы G . В частности, из сверхразрешимости группы $H/H \cap \Phi(G)$ следует сверхразрешимость подгруппы H .

Теорема 2.4.11 позволяет получить значительную информацию о структуре максимальных \mathfrak{f} -достижимых \mathfrak{f} -подгрупп конечных групп, т.е. таких \mathfrak{f} -достижимых подгрупп H группы G , которые принадлежат формации \mathfrak{f} и обладают тем свойством, что всегда из $H \subseteq K$, где K — \mathfrak{f} -достижимая \mathfrak{f} -подгруппа группы G , следует равенство $H = K$.

Такая информация является достаточно важной при изучении некоторых вопросов теории \mathfrak{f} -достижимых подгрупп (см., например, работы [5,102]).

Исследователи свойств подгруппы $\Delta^{\mathfrak{f}}(G)$ обратили внимание на один из вопросов Майера. В работе [103] Майер доказывает нильпотентность подгруппы $\Delta(G)$ (пересечение всех ненормальных максимальных подгрупп группы G) следующим образом. Он показывает, что подгруппа X группы G — перестановочная с

любой максимальной подгруппой из G — субнормальна в G . Отсюда, в частности, следует, что все силовские подгруппы из $\Delta(G)$ субнормальны в G , т.е. подгруппа $\Delta(G)$ нильпотентна.

Майер исследовал также свойства подгруппы H перестановочной с каждой самонормализуемой подгруппой из G . При этом он показал, что $H \triangleleft \triangleleft G$ и разрешимый корадикал подгруппы H нормален в G . По результатам работ Ито и Сепы [101], Майера и Шмида [104] Майер в [103] предлагает уточнить строение группы $H/\text{Core}_G(H)$: всегда ли группа $H/\text{Core}_G(H)$ будет нильпотентной, а если она нильпотентна, то будет ли гиперцентральная. В данной работе приводятся примеры, которые дают отрицательный ответ на эти вопросы.

В третьей главе “Характеризация нормальных подгрупп” исследуются свойства нормальной подгруппы K группы G в зависимости от свойств системы максимальных подгрупп из G , не покрывающих K .

Через $\Phi_1(G)$ обозначается пересечение максимальных в G подгрупп простого индекса; через $\Phi_2(G)$ — пересечение максимальных в G подгрупп, индексы которых не равны простым числам или квадратам простых чисел, ...; через $\Phi_k(G)$ — пересечение максимальных в G подгрупп, индексы которых не равны p^i для любого простого p и всех $i = 1, 2, \dots, k$; через $\Phi_\infty(G)$ — пересечение максимальных в G подгрупп непримарных индексов. Ясно, что

$$\Phi(G) = \Phi_0(G) \subseteq \Phi_1(G) \subseteq \dots \subseteq \Phi_\infty(G).$$

Следующие две теоремы дают достаточно важную информацию о строении подгрупп $\Phi_k(G)$ и $\Phi_\infty(G)$. Напомним только, что через $S(G)$ обозначается разрешимый радикал группы G , т.е. наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G . Через $\mathfrak{X}(k)$ мы обозначаем класс всех разрешимых групп, у которых индексы максимальных подгрупп не делятся на p^{k+1} для всех простых p . Согласно лемме 3.4.8, $\mathfrak{X}(k)$ — нормально наследственный класс Шунка для всех k .

3.4.2. Теорема. Для любой группы G справедливы утверждения:

- 1) подгруппа $\Phi_1(G)$ сверхразрешима;
- 2) подгруппа $\Phi_2(G)$ разрешима;

3) тогда и только тогда в группе G подгруппа $\Phi_\infty(G)$ неразрешима, когда

$$G/S(\Phi_\infty(G)) = \Phi_\infty(G)/S(\Phi_\infty(G)) \times H/S(\Phi_\infty(G)),$$

где

$$\Phi_\infty(G)/S(\Phi_\infty(G)) \simeq \text{PSL}(2,7); H = H^{\text{formPSL}(2,7)}.$$

3.4.10. Теорема. Пусть k — некоторое натуральное число. Тогда для любой группы G справедливы утверждения:

1) либо подгруппа $\Phi_k(G)$ разрешима, либо

$$\Phi_k(G)/S(\Phi_k(G)) \simeq \text{PSL}(2,7);$$

2) $S(\Phi_k(G)) \in \mathfrak{X}(k)$;

3) $e_p(S(\Phi_k(G))) \leq k$ для любого простого p .

В основе теорем 3.4.2 и 3.4.10 лежат результаты первых трех параграфов третьей главы. В частности, в параграфе 3.1 исследуется строение нормальной подгруппы K группы G при условии, что все максимальные подгруппы из G , не содержащие K , пересекаются с K по нильпотентным подгруппам.

В параграфе 3.2 изучается нормальное строение группы, у которой все максимальные подгруппы, не содержащие ее субнормальную подгруппу, имеют примарный индекс. Такая постановка задачи восходит к теореме Гуральника [95] о том, что индекс любой максимальной подгруппы группы G примарен в том и только в том случае, когда либо группа G разрешима, либо $G/S(G) \simeq \text{PSL}(2,7)$.

Теоремы 3.1.5 и 3.2.1 используются в параграфе 3.3 для установления достаточных признаков частичной сверхразрешимости и разрешимости нормальной подгруппы K группы G при ограничениях на индексы K -максимальных подгрупп, т.е. тех максимальных подгрупп M группы G , которые не содержат K и имеют с K неединичное пересечение.

Глава 1

КЛАСС ШУНКА И m -ФУНКТОРЫ

В настоящей главе развивается функциональный подход, обосновывающий необходимость рассмотрения с позиций классов Шунка задачи о пересечении максимальных подгрупп конечной группы. Здесь вводятся понятия m -функтора и Θ -подгруппы Фраттини, имеющие основное значение. В параграфе 1.1 приводится некоторая классификация m -функторов и устанавливается их связь с классами Шунка. В теореме 1.1.16 показывается, что действие любого регулярного m -функтора на конечной группе заключается в выделении некоторых ее \mathcal{X} -абнормальных максимальных подгрупп для подходящего класса Шунка \mathcal{X} . Тем самым задача изучения свойств Θ -подгруппы Фраттини $\Phi_{\Theta}(G)$ группы G редуцируется к вопросу о строении подгруппы $\Delta^*(G)$, равной пересечению всех \mathcal{X} -абнормальных максимальных подгрупп группы G .

Параграф 1.2 посвящен изучению свойств решеток \mathcal{M}_{reg} и \mathcal{L} соответственно всех регулярных m -функторов и всех классов Шунка. В теореме 1.2.6 строится решеточный антиэпиморфизм решетки \mathcal{M}_{reg} на решетку \mathcal{L} . Следствием этого антиэпиморфизма является тот факт (см. следствие 1.2.8), что решетка \mathcal{L} всех классов Шунка является дистрибутивной. В теореме 1.2.11 для классов Шунка положительно решается аналог известной проблемы Гашюца о конечности решетки подформаций формации, порожденной конечной группой.

1.1. m -Функторы на группах

Пусть Θ — подгрупповой функтор, который сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\Theta(G)$ ее максимальных подгрупп и саму группу G . При этом будем дополнительно

предполагать, что Θ выдерживает все внутренние автоморфизмы группы G , т.е. если максимальная подгруппа M группы G принадлежит $\Theta(G)$, то $M^x \in \Theta(G)$ для всех $x \in G$. В дальнейшем такие функторы будем называть m -функторами.

Если Θ — некоторый m -функтор, то через $\bar{\Theta}$ будем обозначать дополнительный к Θ m -функтор, т.е. $M \in \bar{\Theta}(G)$ тогда и только тогда, когда максимальная подгруппа M группы G не входит в $\Theta(G)$ и всегда $G \in \bar{\Theta}(G)$. Ясно, что $\Theta(G) \cup \bar{\Theta}(G)$ содержит в точности все максимальные подгруппы группы G и саму группу G , а $\Theta(G) \cap \bar{\Theta}(G) = \{G\}$.

Пусть Θ — некоторый m -функтор. Для данной группы G обозначим через $\Phi_{\Theta}(G)$ пересечение всех подгрупп из $\Theta(G)$. Назовем подгруппу $\Phi_{\Theta}(G)$ обобщенной подгруппой (или Θ -подгруппой) Фраттини группы G .

Приведем примеры m -функторов и за некоторыми m -функторами и Θ -подгруппами Фраттини зафиксируем обозначения, позволяющие выделять их из семейства всех m -функторов и Θ -подгрупп Фраттини.

1.1.1. Пример. Пусть Θ — m -функтор, который сопоставляет каждой группе G множество всех ее максимальных подгрупп и саму группу G . Тогда $\bar{\Theta}(G) = \{G\}$ для любой группы G . При этом $\Phi_{\Theta}(G) = \Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G , $\Phi_{\bar{\Theta}}(G) = G$.

1.1.2. Пример. Пусть Θ — m -функтор, выделяющий в каждой группе в точности один класс сопряженных максимальных подгрупп и саму группу. Тогда $\bar{\Theta}(G)$ — множество всех максимальных подгрупп группы G , которые не сопряжены с некоторой фиксированной максимальной подгруппой M группы G (разумеется, что $\bar{\Theta}(G)$ содержит и саму группу G). При этом $\Phi_{\Theta}(G) = \text{Core}_G(M)$ — ядро подгруппы M в группе G . Очевидно, что

$$\Phi_{\bar{\Theta}}(G) \cap \text{Core}_G(M) = \Phi(G)$$

для любой группы G .

1.1.3. Пример. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Обозначим через Θ_{π} — m -функтор, сопоставляющий каждой группе G саму группу G и множество всех максимальных под-

групп группы G , индексы которых не делятся на числа из π . Тогда $\Theta_\pi(G) = \{G\} \cup \{M\}$, M — максимальная подгруппа G и $|G : M|$ делится хотя бы на одно число из π . Будем обозначать далее подгруппу $\Phi_{\omega_\pi}(G)$ через $\Phi_\pi(G)$, а подгруппу $\Phi_{\bar{\omega}_\pi}(G)$ — через $\Phi_{\bar{\pi}}(G)$.

В случае, когда множество π состоит из одного простого числа p , m -функтор Θ_π будем обозначать через Θ_p , а соответствующий ему дополнительный m -функтор — через $\bar{\Theta}_p$. Тогда Θ_p -подгруппа Фраттини совпадает с введенной Дескинсом в [78] подгруппой $\Phi_p(G)$.

1.1.4. Пример. Пусть \mathcal{A} — некоторое подмножество множества \mathbb{N} всех натуральных чисел такое, что \mathcal{A} образует полугруппу с единицей. В дальнейшем такие полугруппы будем называть полугруппами индексов Гашюца.

Максимальную подгруппу M группы G назовем максимальной \mathcal{A} -подгруппой, если $|G : M| \in \mathcal{A}$. Через $\mathcal{A} = \mathbb{N} \setminus \mathcal{A}$ будем обозначать множество, дополнительное к \mathcal{A} в множестве всех натуральных чисел.

Обозначим через $\Theta_{\mathcal{A}}(G)$ множество

$$\{G\} \cup \{M \subset G \mid |G : M| \in \mathcal{A}\}.$$

Назовем m -функтор $\Theta_{\mathcal{A}}$ m -функтором, индуцированным полугруппой индексов Гашюца \mathcal{A} . Очевидно, дополнительным к нему будет m -функтор $\bar{\Theta}_{\mathcal{A}}$, сопоставляющий группе G множество, содержащее группу G и максимальные подгруппы, индексы которых входят в $\mathcal{A} = \mathbb{N} \setminus \mathcal{A}$. Соответствующие m -функторам $\Theta_{\mathcal{A}}$ и $\bar{\Theta}_{\mathcal{A}}$ обобщенные подгруппы Фраттини группы G будем обозначать соответственно через $\Phi_{\mathcal{A}}(G)$ и $\Phi_{\bar{\mathcal{A}}}(G)$.

Если P — множество всех простых чисел, то через P^n обозначим множество всех степеней простых чисел, имеющих вид p^k , где $k = 1, 2, \dots, n$, а через P^∞ обозначим множество всех степеней простых чисел. Очевидно, множества $(\mathbb{N} \setminus P^n)$, где $n \in \mathbb{N}$, и $(\mathbb{N} \setminus P^\infty)$ — полугруппы индексов Гашюца. Соответствующие им Θ -подгруппы Фраттини обозначим через $\Phi_n(G)$ и $\Phi_\infty(G)$. Легко заметить, что $\Phi_1(G)$ — пересечение всех максимальных подгрупп группы G , имеющих простой индекс; $\Phi_n(G)$ — пересечение максимальных в G подгрупп, индексы которых не равны p^k для

всех $p \in P$ и $k = 1, 2, \dots, n$; $\Phi_{\infty}(G)$ — пересечение максимальных в G подгрупп непримарных индексов.

Прежде чем перейти к примерам m -функторов и Θ -подгрупп Фраттини, определяемых заданными классами групп, приведем следующее определение, являющееся основным в данной работе.

1.1.5. Определение. Пусть \mathfrak{X} — непустой класс групп. Максимальная подгруппа M группы G называется:

- 1) \mathfrak{X} -нормальной, если $G/\text{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$;
- 2) \mathfrak{X} -абнормальной, если $G/\text{Core}_G(M) \notin \mathfrak{X}$.

В случае, когда \mathfrak{X} — непустая формация, т.е. класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений с конечным числом сомножителей, определение 1.1.5 эквивалентно следующему определению. Напомним только, что если \mathfrak{f} — непустая формация и G — группа, то через $G^{\mathfrak{f}}$ обозначается \mathfrak{f} -корадикал группы G , т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in \mathfrak{f}$.

1.1.6. Определение. Пусть \mathfrak{f} — непустая формация. Максимальная подгруппа M группы G называется:

- 1) \mathfrak{f} -нормальной, если $G^{\mathfrak{f}} \subseteq M$;
- 2) \mathfrak{f} -абнормальной, если $MG^{\mathfrak{f}} = G$.

1.1.7. Пример. Пусть \mathfrak{X} — некоторый непустой класс групп. Пусть m -функтор Θ выделяет в каждой группе G множество всех \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп вместе с самой группой G . В дальнейшем такой m -функтор будем называть \mathfrak{X} -абнормальным. Для обозначения обобщенной подгруппы Фраттини группы G , соответствующей \mathfrak{X} -абнормальному m -функтору, будем применять ставшее традиционным обозначение $\Phi_{\Theta}(G) = \Delta^*(G)$. Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп, то $\Delta^{\mathfrak{N}}(G) = \Delta(G)$ — пересечение всех ненормальных максимальных подгрупп группы G . Подгруппа $\Delta(G)$ была впервые введена Гашюцем в работе [90].

Отметим, что если Θ — \mathfrak{X} -абнормальный m -функтор, то дополнительный к нему m -функтор $\bar{\Theta}$ выделяет в группе G саму группу G и множество всех ее \mathfrak{X} -нормальных максимальных подгрупп. В случае, когда \mathfrak{X} — непустая формация, нормальное строение Θ -подгруппы Фраттини, где Θ — \mathfrak{X} -абнормальный m -

функтор, легко описывается. Очевидно, что в этом случае справедливо равенство

$$\Phi_{\bar{\Theta}}(G)/G^{\times} = \Phi(G/G^{\times}).$$

Для классов Шунка эта задача решается в параграфе 2.1.

Наряду с \mathfrak{X} -абнормальным m -функтором широко используется m -функтор, выделяющий в каждой группе G не все ее \mathfrak{X} -абнормальные максимальные подгруппы, а только те, которые не принадлежат классу \mathfrak{X} . Соответствующая такому m -функтору обобщенная подгруппа Фраттини группы G в дальнейшем обозначается через $\bar{\Delta}^{\mathfrak{X}}(G)$.

1.1.8. Пример. Обозначим через $\cdot //$ множество всех m -функторов. На этом множестве определим операции пересечения и объединения m -функторов:

$$(\Theta_1 \cap \Theta_2)(G) = \Theta_1(G) \cap \Theta_2(G),$$

$$(\Theta_1 \cup \Theta_2)(G) = \Theta_1(G) \cup \Theta_2(G)$$

для любых двух m -функторов Θ_1 и Θ_2 и любой группы G . Простая проверка показывает, что $\Theta_1 \cap \Theta_2$ и $\Theta_1 \cup \Theta_2$ — m -функторы.

На множестве $\cdot //$ всех m -функторов естественным образом введем отношение частичного порядка: $\Theta_1 \leq \Theta_2$ тогда и только тогда, когда $\Theta_1(G) \subseteq \Theta_2(G)$ для любой группы G . Тогда $\cdot //$ является решеткой, в которой

$$\Theta_1 \wedge \Theta_2 = \Theta_1 \cap \Theta_2, \quad \Theta_1 \vee \Theta_2 = \Theta_1 \cup \Theta_2.$$

Минимальным элементом этой решетки является m -функтор Θ такой, что $\Theta(G) = \{G\}$ для любой группы G . В качестве максимального элемента ее выступает m -функтор, сопоставляющий каждой группе G саму группу G и все ее максимальные подгруппы, т.е. m -функтор из примера 1.1.1.

Введенные на $\cdot //$ операции пересечения и объединения m -функторов позволяют конструировать новые примеры m -функторов и Θ -подгрупп Фраттини. Например, если Θ_1 — \mathfrak{X} -абнормальный m -функтор, а Θ_2 — m -функтор, индуцированный полугруппой индексов Гашюца $\cdot / = N \setminus P$, то $\Theta_1 \cap \Theta_2$ — m -функтор, выделяющий в группе ее \mathfrak{X} -абнормальные максимальные под-

группы непростого индекса. В частности, $\Phi_{\Theta_1 \cap \Theta_2}(G)$ — пересечение всех \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , имеющих составной индекс.

Нам понадобится следующий простой результат об общих свойствах Θ -подгрупп Фраттини. Далее m -функтор Θ будем называть автоморфно допустимым, если он выдерживает все автоморфизмы групп, т.е. из $M \in \Theta(G)$ всегда следует, что $M^\alpha \in \Theta(G)$ для любой группы G и любого автоморфизма $\alpha \in \text{Aut}G$. m -Функтор Θ назовем регулярным, если выполняются следующие два условия:

- 1) из $N \triangleleft G$ и $M \in \Theta(G)$ следует $MN/N \in \Theta(G/N)$;
- 2) из $M/N \in \Theta(G/N)$ следует $M \in \Theta(G)$.

Пусть Θ — некоторый m -функтор, G — группа и N — ее нормальная подгруппа. Пусть $\Theta(G) = \{M_1, M_2, \dots, M_n, G\}$. Тогда множество

$$\{M_1N, M_2N, \dots, M_nN, G\}$$

будем обозначать через $\Theta(G)N$, а множество

$$\{M_1N/N, M_2N/N, \dots, M_nN/N, G/N\}$$

через $\Theta(G)N/N$.

В таких обозначениях регулярность m -функтора Θ означает, что $\Theta(G/N) = \Theta(G)N/N$ для любой группы G и любой ее нормальной подгруппы N .

1.1.9. Лемма. Пусть Θ — некоторый m -функтор, Θ — дополнительный к нему m -функтор. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\Phi_\Theta(G) \cap \Phi_\Theta(G) = \Phi(G)$;
- 2) подгруппа $\Phi_\Theta(G)$ нормальна в G ;
- 3) если m -функтор Θ автоморфно допустим, то $\Phi_\Theta(G)$ — характеристическая подгруппа в G ;
- 4) если подгруппа N нормальна в G и m -функтор Θ регулярен, то $\Phi_\Theta(G)N/N \subseteq \Phi_\Theta(G/N)$;
- 5) если подгруппа N нормальна в G , $N \subseteq \Phi_\Theta(G)$ и m -функтор Θ регулярен, то $\Phi_\Theta(G/N) = \Phi_\Theta(G)/N$.

В дальнейшем m -функтор Θ будем называть нормальным, если для каждой группы G и любой ее нормальной подгруппы N выполняется условие: для любой максимальной подгруппы

$M \in \Theta(G)$ из $M \cap N \neq N$ следует, что найдется максимальная подгруппа $M_1 \in \Theta(N)$, содержащая $M \cap N$. Для нормальных m -функторов справедлива следующая лемма.

1.1.10. Лемма. Пусть Θ — нормальный автоморфно допустимый m -функтор. Тогда для любой нормальной подгруппы N группы G справедливо включение $\Phi_\Theta(N) \subseteq \Phi_\Theta(G)$.

Доказательство. Обозначим $\Phi_\Theta(N)$ через K . Допустим, что K не содержится в $\Phi_\Theta(G)$. Так как m -функтор Θ автоморфно допустим, то подгруппа K нормальна в G . Из $K \notin \Phi_\Theta(G)$ следует, что найдется некоторая максимальная подгруппа $M \in \Theta(G)$, которая не содержит K . Отсюда $KM = G$. Ввиду тождества Дедекинда имеем $N = K(K \cap M)$. Так как $K \cap M$ — собственная подгруппа из N , то из нормальности m -функтора Θ следует, что найдется максимальная подгруппа $M_1 \in \Theta(N)$, содержащая $K \cap M$. Но тогда

$$N = K(K \cap M) = KM_1 = M_1.$$

Противоречие. Лемма доказана.

Приведем примеры автоморфно допустимых, регулярных, нормальных m -функторов. При этом нам понадобится следующий известный факт (см., например, лемму 1.2 из [59]).

1.1.11. Лемма. Пусть \mathfrak{f} — непустая формация, $K \triangleleft G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $(G/K)^\mathfrak{f} = G^\mathfrak{f}K/K$;
- 2) если $G = HK$, то $H^\mathfrak{f}K = G^\mathfrak{f}K$;
- 3) если $G = HK$ и $K \subseteq G^\mathfrak{f}$, то $H^\mathfrak{f}K = G^\mathfrak{f}$.

1.1.12. Лемма. Пусть \mathfrak{f} — непустая формация. Тогда \mathfrak{f} -абнормальный m -функтор Θ автоморфно допустим и регулярен.

Доказательство. Так как \mathfrak{f} -корадикал любой группы G характеристичен в G , то $G = (MG^\mathfrak{f})^\alpha = M^\alpha G^\mathfrak{f}$ для любого автоморфизма $\alpha \in \text{Aut}G$ и любой \mathfrak{f} -абнормальной максимальной подгруппы M группы G . Отсюда следует, что m -функтор Θ автоморфно допустим.

Пусть $N \triangleleft G$ и $M \in \Theta(G)$. Согласно лемме 1.1.11, справедливо равенство $(G/N)^\mathfrak{f} = G^\mathfrak{f}N/N$. Поэтому

$$(MN/N)(G/N)^\mathfrak{f} = MG^\mathfrak{f}/N = G/N,$$

т.е. $MN/N \in \Theta(G/N)$. Если же $M/N \in G/N$, то из

$$(M/N)(G/N)^f = MG^f/N = G/N$$

следует, что $M \in \Theta(G)$. Таким образом, функтор Θ регулярен. Лемма доказана.

Отметим, что f -абнормальный m -функтор не является нормальным. На это указывает следующий простой пример. Пусть $\mathfrak{f} = \mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп, G — группа Шмидта. Тогда по теореме О.Ю. Шмидта из [65] $\Delta(G) = \Phi(G)$ и $G^{\mathfrak{N}}\Phi(G)/\Phi(G)$ — главный фактор группы G . Так как подгруппа $G^{\mathfrak{N}}\Phi(G)$ нильпотентна, то $\Delta(G^{\mathfrak{N}}\Phi(G)) = G^{\mathfrak{N}}\Phi(G)$. Теперь ввиду леммы 1.1.10 \mathfrak{N} -абнормальный m -функтор не является нормальным.

Пример автоморфно допустимого, регулярного, нормального m -функтора дает m -функтор Θ_π из раздела 1.1.3.

1.1.13. Лемма. Пусть π — некоторое множество простых чисел, Θ_π — m -функтор, составляющий каждой группе G саму группу G и множество всех ее максимальных подгрупп, индексы которых не делятся на числа из π . Тогда m -функтор Θ_π автоморфно допустим, регулярен и нормален.

Доказательство. Автоморфная допустимость m -функтора Θ_π очевидна.

Пусть $N \triangleleft G$ и $M \in \Theta_\pi(G)$. Тогда индекс $|G : M|$ не делится на числа из π . Так как

$$|(G/M) : (MN/N)| = |G : M| / |N : M \cap N|,$$

то индекс $|(G/N) : (MN/N)|$ не делится на числа из π , т.е. $MN/N \in \Theta_\pi(G/N)$. Если же $M/N \in \Theta_\pi(G/N)$, то из

$$|(G/N) : (M/N)| = |G : M|$$

следует, что $M \in \Theta_\pi(G)$. Таким образом, оператор Θ_π регулярен.

Пусть M — такая подгруппа из $\Theta_\pi(G)$, что $M \cap N \neq N$. Так как $|G : M| = |N : M \cap N|$, то индекс $|N : M \cap N|$ не делится на числа из π . Отсюда следует, что для любой максимальной подгруппы $M_1 \in \Theta_\pi(N)$, содержащей $M \cap N$, индекс $|N : M_1|$ не делится на числа из π , т.е. $M_1 \in \Theta_\pi(N)$. Значит, оператор Θ_π нормален. Лемма доказана.

Следствием лемм 1.1.10 и 1.1.13 является тот факт, что для любой группы G и ее нормальной подгруппы N справедливы включения $\Phi_n(N) \subseteq \Phi_n(G)$ и $\Phi_p(N) \subseteq \Phi_p(G)$.

1.1.14. Замечание. m -Функтор $\Theta_{\mathcal{A}}$, индуцированный полугруппой индексов Гашюца \mathcal{A} , является автоморфно допустимым и регулярным, но не является нормальным в общем случае. Например, при $\mathcal{A} = N \setminus P$ в группе $G = [E_{p^2}]GL(2, p)$ для максимальной подгруппы $M \in \Theta_{\mathcal{A}}(G)$, изоморфной $GL(2, p)$ нельзя вложить $M \cap E_{p^2}$ в максимальную подгруппу из $\Theta_{\mathcal{A}}(E_{p^2})$.

Понятно, что в общем случае значения m -функтора Θ на изоморфных группах могут быть различными. Для того чтобы устранить такой недостаток, будем полагать, что m -функтор Θ обладает следующим свойством: $\Theta(G^\alpha) = (\Theta(G))^\alpha$ для любого изоморфизма α любой группы G (под $(\Theta(G))^\alpha$ понимается множество $\{M^\alpha \mid M \in \Theta(G)\}$). Будем говорить далее, что Θ в таком случае выдерживает все изоморфизмы.

Такое незначительное на первый взгляд уточнение определения m -функтора позволяет тесно увязать теорию m -функторов с теорией классов. Напомним, что класс \mathfrak{X} называется гомоморфом, если он эпиморфно замкнут, т.е. из $G \in \mathfrak{X}$ и $N \triangleleft G$ всегда следует $G/N \in \mathfrak{X}$. Класс \mathfrak{X} называется насыщенным, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{X}$ следует $G \in \mathfrak{X}$.

1.1.15. Лемма. Пусть Θ — регулярный m -функтор, который выдерживает все изоморфизмы. Тогда класс $\mathfrak{X} = \{G \mid \Theta(G) = \{G\}\}$ является насыщенным гомоморфом.

Доказательство. Из того, что m -функтор Θ выдерживает все изоморфизмы, следует, что \mathfrak{X} является классом.

Пусть N — нормальная подгруппа группы G . Тогда ввиду регулярности m -функтора Θ имеем $\Theta(G/N) = \Theta(G)N/N$, где

$$\Theta(G)N/N = \{MN/N \mid M \in \Theta(G)\}.$$

Если $G \in \mathfrak{X}$, то $\Theta(G) = \{G\}$. Поэтому

$$\Theta(G/N) = \Theta(G)N/N = \{G/N\},$$

т.е. $G/N \in \mathfrak{X}$. Таким образом, класс \mathfrak{X} является гомоморфом.

Пусть $G/\Phi(G) \in \mathfrak{X}$, т.е.

$$\Theta(G/\Phi(G)) = \{G/\Phi(G)\}.$$

Снова из регулярности m -функтора Θ имеем

$$\Theta(G/\Phi(G)) = \Theta(G)\Phi(G)/\Phi(G).$$

Так как множество $\Theta(G)$ состоит из некоторых максимальных подгрупп и самой группы G , то $\Theta(G)\Phi(G) = \Theta(G)$. Таким образом,

$$\Theta(G)/\Phi(G) = \{G/\Phi(G)\},$$

а значит, $\Theta(G) = \{G\}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{X}$. Лемма доказана.

Группа G называется примитивной, если она обладает максимальной подгруппой с единичным ядром. На языке m -функторов это означает, что найдется хотя бы один m -функтор Θ , описанный в пункте 1.1.2, такой, что $\Phi_{\Theta}(G) = 1$.

Напомним, что классом Шунка называется примитивно замкнутый гомоморф, т.е. гомоморф \mathfrak{X} , который обладает следующим свойством: если все примитивные факторгруппы группы G принадлежат \mathfrak{X} , то $G \in \mathfrak{X}$.

1.1.16. Теорема. Пусть Θ — регулярный m -функтор, который выдерживает все изоморфизмы. Тогда класс $\mathfrak{X} = \{G \mid \Theta(G) = \{G\}\}$ является классом Шунка и для любой группы R максимальные подгруппы из $\Theta(R)$ являются \mathfrak{X} -абнормальными.

Доказательство. Ввиду леммы 1.1.15 класс \mathfrak{X} является гомоморфом.

Покажем, что он примитивно замкнут. Для этого применим индукцию по порядку группы G . Пусть G — группа наименьшего порядка, которая не принадлежит классу \mathfrak{X} , но все ее примитивные факторгруппы лежат в \mathfrak{X} . Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G . Ввиду предположения индукции $G/N \in \mathfrak{X}$. Это означает, что $\Theta(G/N) = \{G/N\}$. Так как m -функтор Θ регулярен, то $\Theta(G/N) = \Theta(G)N/N$.

Пусть

$$\Theta(G) = \{M_1, M_2, \dots, M_n, G\},$$

где M_i — максимальная подгруппа группы G , $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$\{M_1N/N, M_2N/N, \dots, M_nN/N, G/N\} = \{G/N\}.$$

Отсюда следует, что $M_iN = G$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и всех минимальных нормальных подгрупп группы G . Если $\text{Core}_G(M_i) = 1$

хотя бы для одного $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, то группа G примитивна, а значит, по условию она принадлежит классу \mathfrak{X} . Противоречие. Значит, $\text{Core}_G(M_i) \neq 1$. Взяв N из $\text{Core}_G(M_i)$, из равенства $M_i N = G$ получим, что $M_i = G$. Противоречие. Значит, $\Theta(G) = \{G\}$ и $G \in \mathfrak{X}$. Итак, \mathfrak{X} – класс Шунка.

Покажем теперь, что $\Theta \subseteq \Theta_1$, где Θ_1 – \mathfrak{X} -абнормальный m -функтор для класса $\mathfrak{X} = \{G \mid \Theta(G) = \{G\}\}$.

Для этого достаточно проверить, что для любой группы G множество

$$\Theta(G) = \{M_1, M_2, \dots, M_n, G\}$$

содержится в множестве всех \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , объединенном с множеством $\{G\}$.

Пусть $M_i \in \Theta(G)$. Допустим, что максимальная подгруппа M_i \mathfrak{X} -нормальна в G . Тогда $G/\text{Core}_G(M_i) \in \mathfrak{X}$, т.е.

$$\Theta(G/\text{Core}_G(M_i)) = \{G/\text{Core}_G(M_i)\}.$$

Так как m -функтор Θ регулярен, то

$$\Theta(G)\text{Core}_G(M_i)/\text{Core}_G(M_i) = \Theta(G/\text{Core}_G(M_i)).$$

Отсюда, в частности, следует, что $M_i = G$. Противоречие. Значит, максимальная подгруппа M_i \mathfrak{X} -абнормальна для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Теорема доказана.

Приведем пример регулярных, выдерживающих все изоморфизмы m -функторов Θ , для которых $\Theta \subset \Theta_1$, где Θ_1 – \mathfrak{X} -абнормальный m -функтор для $\mathfrak{X} = \{G \mid \Theta(G) = \{G\}\}$.

1.1.17. Пример. Рассмотрим m -функтор Θ , который каждой группе G ставит в соответствие саму группу G и множество всех ее максимальных подгрупп M , удовлетворяющих одному из следующих условий:

- 1) M не покрывает абелев главный фактор группы G ;
- 2) если M не покрывает неабелев главный фактор группы G , то $|G : M|$ не делится на 2.

Предположим, что Θ выдерживает все изоморфизмы. Простая проверка показывает, что функтор Θ регулярен и класс $\mathfrak{X} = \{G \mid \Theta(G) = \{G\}\}$ единичен.

Возьмем теперь в простой неабелевой группе P максимальную подгруппу M , индекс которой делится на 2. Подгруппа M будет, очевидно, \mathfrak{X} -абнормальной, но не лежит в $\Theta(P)$, так как $\Theta(P)$ содержит лишь максимальные подгруппы, индекс которых не делится на 2.

1.1.18. Пример. Пусть \mathfrak{N} – формация всех нильпотентных групп, а Θ – такой m -функтор, что $\Theta(G) = \{G\}$, если $G \in \mathfrak{N}$, и

$$\Theta(G) = \{G, M_1, M_2, \dots, M_n\},$$

где M_i – максимальные подгруппы G , не покрывающие главные факторы вида $G^{\mathfrak{N}}/K$, если $G \notin \mathfrak{N}$. Тогда m -функтор Θ регулярен (ввиду леммы 1.1.11) и выдерживает все изоморфизмы. Очевидно, $\{G \mid \Theta(G) = \{G\}\} = \mathfrak{N}$.

Пусть R – группа Шмидта с единичной подгруппой Фраттини. Согласно теореме О.Ю. Шмидта [65], группа G представима в виде $R = [P]Q$, где P – минимальная нормальная подгруппа группы G , $|P| = p^\alpha$, $|Q| = q$. По лемме 18.8 из [61] существует точный и неприводимый $F_q[R]$ -модуль V , где F_q – поле из q элементов. Тогда в группе $G = [V]R$ максимальные подгруппы, не содержащие V , будут, очевидно, \mathfrak{N} -абнормальными. Ввиду построения m -функтора Θ они не принадлежат $\Theta(G)$.

1.1.19. Теорема. Пусть Θ – регулярный m -функтор, выдерживающий все изоморфизмы, Θ_1 – \mathfrak{X} -абнормальный m -функтор, где \mathfrak{X} – класс Шунка из теоремы 1.1.16. Тогда и только тогда $\Theta = \Theta_1$ в классе разрешимых групп, когда $\Phi_\Theta(G) = \Delta^*(G)$ для любой разрешимой группы G .

Доказательство. Пусть $\Phi_\Theta(G) = \Delta^*(G)$ для любой разрешимой группы G . Согласно теореме 1.1.16, для любой группы R справедливо включение $\Theta(R) \subseteq \Theta_1(R)$.

Пусть G – разрешимая группа наименьшего порядка, обладающая \mathfrak{X} -абнормальными максимальными подгруппами, которые не лежат в $\Theta(G)$. Если M – одна из таких подгрупп, то ее ядро в G единично. Действительно, если $\text{Core}_G(M_i) \neq 1$, то ввиду регулярности m -функтора Θ и выбора группы G получаем, что $M \in \Theta(G)$. Противоречие. Значит, группа G примитивна. На основании теоремы 15.6 из [81, стр.54] она обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N такой, что

$MN = G$, $M \cap N = 1$. Очевидно, $N \notin \Delta^*(G)$. Допустим, что $N \notin \Phi_\Theta(G)$. Тогда найдется максимальная подгруппа $H \in \Theta(G)$, которая не содержит N . Ввиду теоремы 15.6 из [81, стр.54] подгруппы H и M сопряжены. Значит, $H \notin \Theta(G)$. Противоречие. Итак, $N \subseteq \Phi_\Theta(G)$. Отсюда следует, что $\Phi_\Theta(G) \neq \Delta^*(G)$. Снова пришли к противоречию. Значит, $\Theta(G) = \Theta_1(G)$ для любой разрешимой группы G .

Если $\Theta_1 = \Theta$ в классе разрешимых групп, то, очевидно, $\Phi_\Theta(G) = \Delta^*(G)$ для любой разрешимой группы G . Теорема доказана.

1.1.20. Замечание. В классе всех групп из равенства $\Theta = \Theta_1$ всегда следует равенство $\Phi_\Theta(G) = \Delta^*(G)$ для любой группы G . Обратное утверждение неверно. На это указывает, в частности, пример m -функтора Θ из пункта 1.1.17.

1.2. Классы Шунка, индуцированные m -функторами

Пусть Θ — некоторый регулярный, выдерживающий все изоморфизмы m -функтор. По теореме 1.1.16 класс $\mathfrak{X} = \{G \mid \Theta(G) = \{G\}\}$ является классом Шунка. В дальнейшем его будем называть классом Шунка, индуцированным m -функтором Θ .

Пусть \mathfrak{f} — непустая формация. Ввиду леммы 1.1.12 \mathfrak{f} -абнормальный m -функтор Θ (т.е. m -функтор, сопоставляющий каждой группе G саму группу G и все ее \mathfrak{f} -абнормальные максимальные подгруппы) регулярен и выдерживает все изоморфизмы. Поэтому он индуцирует класс Шунка

$$\mathfrak{X} = \{G \mid \Delta^{\mathfrak{f}}(G) = G\}.$$

В этом случае мы будем говорить, что формация \mathfrak{f} индуцирует класс Шунка \mathfrak{X} .

1.2.1. Лемма. Пусть \mathfrak{f} — непустая формация, \mathfrak{X} — класс Шунка, индуцированный формацией \mathfrak{f} . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{X}$;

2) для любой группы G множества \mathcal{f} -абнормальных и \mathcal{X} -абнормальных максимальных подгрупп совпадают;

3) $\Delta^{\mathcal{f}}(G) = \Delta^{\mathcal{X}}(G)$ для любой группы G .

Доказательство. 1. Пусть $G \in \mathcal{f}$. Тогда G не содержит \mathcal{f} -абнормальных максимальных подгрупп, т.е. $\Delta^{\mathcal{f}}(G) = G$. Значит, $G \in \mathcal{X}$.

2. Пусть Θ — \mathcal{f} -абнормальный m -функтор, Θ_1 — \mathcal{X} -абнормальный m -функтор. Покажем, что $\Theta = \Theta_1$. По теореме 1.1.16 справедливо включение $\Theta(G) \subseteq \Theta_1(G)$ для любой группы G .

Пусть G — группа наименьшего порядка, обладающая \mathcal{X} -абнормальными подгруппами, которые не являются \mathcal{f} -абнормальными. Если M — одна из таких подгрупп, то ее ядро в G единично. Действительно, допустим, что $D = \text{Core}_G(M) \neq 1$. Тогда ввиду выбора группы G подгруппа M/D группы G/D будет \mathcal{f} -абнормальной, т.е.

$$(M/D)(G/N)^{\mathcal{f}} = G/N.$$

Согласно лемме 1.1.11, $MG^{\mathcal{f}} = G$, т.е. M — \mathcal{f} -абнормальная максимальная подгруппа группы G . Противоречие.

Итак, $\text{Core}_G(M) = 1$. Так как подгруппа M является \mathcal{f} -нормальной, то

$$G/\text{Core}_G(M) \cong G \in \mathcal{f}.$$

Ввиду утверждения 1) имеем, что $G \in \mathcal{X}$, а значит, подгруппа M \mathcal{X} -нормальна. Снова пришли к противоречию. Значит, $\Theta(G) = \Theta_1(G)$ для любой группы G .

Утверждение 3) является прямым следствием утверждения 2). Лемма доказана.

Из леммы 1.2.1 следует, в частности, что вопрос для формаций о строении подгруппы, равной пересечению \mathcal{f} -абнормальных максимальных подгрупп, сводится к соответствующему вопросу для классов Шунка.

1.2.2. Лемма. Пусть \mathcal{f} — непустая формация, \mathcal{X} — класс Шунка, индуцированный формацией \mathcal{f} . Тогда \mathcal{X} — наименьший класс Шунка, содержащий \mathcal{f} .

Доказательство. Из леммы 1.2.1 имеем, что $\mathcal{f} \subseteq \mathcal{X}$. Допустим, что найдется класс Шунка \mathcal{X}_1 такой, что $\mathcal{f} \subseteq \mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}$. Пусть G —

группа наименьшего порядка из $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}_1$. Тогда в G найдется минимальная нормальная подгруппа N такая, что $G/N \in \mathfrak{X}_1$. Так как класс Шунка насыщен (т.е. замкнут относительно фраттини-расширений), то $N \notin \Phi(G)$. Поэтому в G найдется такая \mathfrak{X}_1 -абнормальная максимальная подгруппа M , что $MN = G$. Если M \mathfrak{f} -абнормальна, то ввиду утверждения 2) леммы 1.2.1 M будет \mathfrak{X} -абнормальной, что противоречит условию $G \in \mathfrak{X}$. Значит, подгруппа M \mathfrak{f} -нормальна. По определению \mathfrak{f} -нормальной подгруппы имеем $G/\text{Core}_G(M) \in \mathfrak{f}$. Так как $\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{X}_1$, то $G/\text{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}_1$. Это означает, что подгруппа M \mathfrak{X}_1 -нормальна в G . Противоречие. Лемма доказана.

Напомним, что если \mathfrak{X} — класс групп, то через $E_{\mathfrak{X}}$ обозначается класс всех групп G , обладающих нормальной подгруппой N такой, что $G/N \in \mathfrak{X}$ и $N \subseteq \Phi(G)$.

1.2.3. Теорема. Пусть \mathfrak{f} — непустая формация, \mathfrak{X} — класс Шунка, индуцированный формацией \mathfrak{f} . Тогда $\mathfrak{X} = E_{\mathfrak{X}}\mathfrak{f}$.

Доказательство. Ввиду леммы 1.2.2 \mathfrak{X} — наименьший класс Шунка, содержащий формацию \mathfrak{f} . Отсюда на основании теоремы Ферстера из [85] имеем, что $\mathfrak{X} = E_{\mathfrak{X}}\mathfrak{f}$.

Теорема доказана.

1.2.4. Следствие. Локальная формация \mathfrak{f} совпадает с классом Шунка, индуцированным ей.

В связи с леммами 1.2.1 и 1.2.2 возникает следующий вопрос. Будет ли для любой группы G справедливо равенство $\Delta^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta^{\mathfrak{L}}(G)$, где $\mathfrak{L} = \text{lform}\mathfrak{f}$ — наименьшая локальная формация, содержащая \mathfrak{f} ? Следующий пример дает отрицательный ответ на этот вопрос.

1.2.5. Пример. Пусть A — простая неабелева группа, $\mathfrak{f} = \text{form} A$ — наименьшая формация, содержащая A . Очевидно, что $\mathfrak{L} = \text{lform}\mathfrak{f} = \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{f}$, где $\pi = \pi(A)$, \mathfrak{N}_{π} — формация всех нильпотентных π -групп. Пусть V — точный и неприводимый $F_p[A]$ -модуль, $G = [V]A$. Так как $G \in \mathfrak{L}$, то $\Delta^{\mathfrak{L}}(G) = G$. Так как все неединичные группы из \mathfrak{f} есть конечные прямые произведения групп, изоморфных A , то $G^{\mathfrak{f}} = V$. Поэтому все \mathfrak{f} -абнормальные максимальные подгруппы группы G дополняют V , и значит, $\Delta^{\mathfrak{f}}(G) = 1$. Таким образом, $\Delta^{\mathfrak{f}}(G) \neq \Delta^{\mathfrak{L}}(G)$.

Пусть \mathcal{R}_{reg} — множество всех регулярных, выдерживающих все изоморфизмы m -функторов. Простая проверка показывает, что \mathcal{R}_{reg} — подрешетка решетки \mathcal{R} всех m -функторов (решетка \mathcal{R} введена в примере 1.1.8).

Пусть \mathcal{K} — множество всех классов Шунка, на котором введем отношения частичного порядка следующим образом: $\mathfrak{X}_1 \leq \mathfrak{X}_2$ тогда и только тогда, когда класс Шунка \mathfrak{X}_1 содержится в классе Шунка \mathfrak{X}_2 . Для любых двух классов Шунка \mathfrak{X}_1 и \mathfrak{X}_2 положим $\mathfrak{X}_1 \wedge \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_1 \vee \mathfrak{X}_2$ — наименьший класс Шунка, содержащий множество $\mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2$.

1.2.6. Теорема. Отображение, сопоставляющее каждому m -функтору $\Theta \in \mathcal{R}_{\text{reg}}$ класс Шунка, индуцированный m -функтором Θ , задает антиэпиморфизм решетки \mathcal{R}_{reg} на решетку \mathcal{K} всех классов Шунка.

Доказательству теоремы предположим следующую лемму.

1.2.7. Лемма. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка. Если Θ — \mathfrak{X} -абнормальный m -функтор, то $\Theta \in \mathcal{R}_{\text{reg}}$.

Доказательство. Пусть $N \triangleleft G$, M — максимальная подгруппа из $\Theta(G)$, $D = \text{Core}_G(M)$. Тогда либо $N \subseteq M$, либо $MN = G$. Если $MN = G$, то $MN/N \in \Theta(G/N)$. Если $N \subseteq M$, то $N \subseteq D$. Так как $G/D \notin \mathfrak{X}$, то

$$G/N/\text{Core}_{G/N}(M/N) = G/N/D/N \simeq G/D \notin \mathfrak{X},$$

т.е. $M/N \in \Theta(G/N)$.

Пусть теперь $M/N \in \Theta(G/N)$ и $M/N \neq G/N$. Тогда

$$G/N/\text{Core}_{G/N}(M/N) \notin \mathfrak{X}.$$

Отсюда следует, что $G/\text{Core}_G(M) \notin \mathfrak{X}$, т.е. $M \in \Theta(G)$. Итак, m -функтор Θ регулярен.

Тот факт, что Θ выдерживает все изоморфизмы, следует из того, что \mathfrak{X} — класс групп. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.2.6. Пусть f — отображение, сопоставляющее каждому m -функтору $\Theta \in \mathcal{R}_{\text{reg}}$ класс Шунка, индуцированный m -функтором Θ .

Пусть Θ_1 и Θ_2 — произвольные m -функторы из \mathcal{R}_{reg} ,

$$\mathfrak{X}_1 = \{G \mid \Theta_1(G) = \{G\}\}, \quad \mathfrak{X}_2 = \{G \mid \Theta_2(G) = \{G\}\}.$$

Тогда

$$f(\Theta_1 \wedge \Theta_2) = f(\Theta_1 \cap \Theta_2) = \{G \mid (\Theta_1 \cap \Theta_2)(G) = \{G\}\} = \{G \mid \Theta_1(G) \cap \Theta_2(G) = \{G\}\}.$$

Отсюда, в частности, следует, $\mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2 \subseteq f(\Theta_1 \wedge \Theta_2)$, а значит, $\mathfrak{X}_1 \vee \mathfrak{X}_2 \subseteq f(\Theta_1 \wedge \Theta_2)$.

Пусть G — группа наименьшего порядка из $f(\Theta_1 \wedge \Theta_2) \setminus (\mathfrak{X}_1 \vee \mathfrak{X}_2)$. Так как $G \in f(\Theta_1 \wedge \Theta_2)$, то в G нет максимальных подгрупп, которые являются одновременно \mathfrak{X}_1 -абнормальными и \mathfrak{X}_2 -абнормальными.

Так как $G \notin \mathfrak{X}_1 \vee \mathfrak{X}_2$, то в G найдется максимальная подгруппа M , которая $(\mathfrak{X}_1 \vee \mathfrak{X}_2)$ -абнормальна. Если M \mathfrak{X}_1 -нормальна в G , то

$$G/\text{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_1 \vee \mathfrak{X}_2.$$

Противоречие. Если M \mathfrak{X}_2 -нормальна в G , то

$$G/\text{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}_2 \subseteq \mathfrak{X}_1 \vee \mathfrak{X}_2.$$

Снова пришли к противоречию. Значит, $f(\Theta_1 \wedge \Theta_2) = \mathfrak{X}_1 \vee \mathfrak{X}_2$. Так как

$$\begin{aligned} f(\Theta_1 \vee \Theta_2) &= \{G \mid (\Theta_1 \cup \Theta_2)(G) = \{G\}\} = \{G \mid \Theta_1(G) \cup \Theta_2(G) = \{G\}\} = \\ &= \{G \mid \Theta_1(G) = \{G\}, \Theta_2(G) = \{G\}\}, \end{aligned}$$

то $f(\Theta_1 \vee \Theta_2) = \mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$.

Таким образом, f — антигомоморфизм решеток \mathcal{H}_{reg} и \mathcal{H} . Покажем, что f отображает \mathcal{H}_{reg} на \mathcal{H} . Пусть \mathfrak{X} — произвольный класс Шунка, Θ — m -функтор, выделяющий в каждой группе G саму группу G и все ее \mathfrak{X} -абнормальные максимальные подгруппы. Ввиду леммы 1.2.7 m -функтор Θ регулярен и выдерживает все изоморфизмы. При этом, очевидно, $f(\Theta) = \mathfrak{X}$. Значит, $f(\mathcal{H}_{\text{reg}}) = \mathcal{H}$. Теорема доказана.

1.2.8. Следствие. Решетка всех классов Шунка конечных групп дистрибутивна.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3$ — некоторые классы Шунка. Пусть Θ_i — \mathfrak{X}_i -абнормальный m -функтор, $i = 1, 2, 3$. Как показано в теореме 1.2.6, $f(\Theta_i) = \mathfrak{X}_i$ для всех $i = 1, 2, 3$. Так как для любой группы G справедливо равенство $(\Theta_1(G) \cap \Theta_2(G)) \cup \Theta_3(G) =$

$= (\Theta_1(G) \cup \Theta_2(G)) \cap (\Theta_2(G) \cup \Theta_3(G))$, то $(\Theta_1 \wedge \Theta_2) \vee \Theta_3 = (\Theta_1 \vee \Theta_3) \wedge (\Theta_2 \vee \Theta_3)$.

Отсюда, согласно теореме 1.2.6, имеем

$$\begin{aligned} (\mathfrak{X}_1 \vee \mathfrak{X}_2) \wedge \mathfrak{X}_3 &= (f(\Theta_1) \vee f(\Theta_2)) \wedge f(\Theta_3) = f(\Theta_1 \wedge \Theta_2) \wedge f(\Theta_3) = \\ &= f((\Theta_1 \wedge \Theta_2) \vee \Theta_3) = f((\Theta_1 \vee \Theta_3) \wedge (\Theta_2 \vee \Theta_3)) = f(\Theta_1 \vee \Theta_3) \vee f(\Theta_2 \vee \Theta_3) = \\ &= (f(\Theta_1) \wedge f(\Theta_3)) \vee (f(\Theta_2) \wedge f(\Theta_3)) = (\mathfrak{X}_1 \wedge \mathfrak{X}_3) \vee (\mathfrak{X}_2 \wedge \mathfrak{X}_3). \end{aligned}$$

Таким образом, решетка \mathcal{L} дистрибутивна.

1.2.9. Следствие. Решетка всех классов Шунка конечных групп модулярна.

Следуя [81], для произвольного множества групп \mathfrak{X} обозначим через $Q\mathfrak{X}$ класс всех гомоморфных образов групп из \mathfrak{X} , а через $P\mathfrak{X}$ — класс всех групп, примитивные гомоморфные образы которых принадлежат \mathfrak{X} .

Ввиду следствия 2.8 из [81, стр.286] справедлива следующая лемма.

1.2.10. Лемма. Для любого класса \mathfrak{X} класс $PQ\mathfrak{X}$ является наименьшим классом Шунка, содержащим \mathfrak{X} .

1.2.11. Теорема. Пусть \mathcal{M} — некоторый подкласс Шунка класса Шунка \mathfrak{X} , порожденного группой G . Тогда \mathcal{M} порождается классом (N_1, N_2, \dots, N_n) , где N_1, N_2, \dots, N_n — все примитивные гомоморфные образы группы G , принадлежащие классу \mathcal{M} .

Доказательство. Так как для всех $i = 1, 2, \dots, n$ группы N_i входят в \mathcal{M} , то наименьший класс Шунка, содержащий группы N_1, N_2, \dots, N_n , содержится в \mathcal{M} .

Пусть R — произвольная группа из \mathcal{M} . Так как $\mathcal{M} \subseteq \mathfrak{X}$, то по лемме 1.2.10 все примитивные гомоморфные образы группы R принадлежат $Q(G)$, т.е. являются гомоморфными образами группы G . Так как \mathcal{M} — класс Шунка, то все примитивные гомоморфные образы группы R принадлежат \mathcal{M} . Поэтому любая примитивная факторгруппа группы R изоморфна некоторой из групп N_1, N_2, \dots, N_n . Отсюда следует, что R принадлежит классу Шунка, порожденному группами N_1, N_2, \dots, N_n . Так как группа R выбрана в \mathcal{M} произвольным образом, то \mathcal{M} входит в класс Шунка, порожденный группами N_1, N_2, \dots, N_n . Теорема доказана.

1.2.12. Следствие. Пусть N_1, N_2, \dots, N_n — все примитивные гомоморфные образы группы G . Тогда мощность множества всех

подклассов Шунка класса Шунка \mathfrak{X} , порожденного группой G , не превосходит 2^n .

Доказательство. Согласно теореме 1.2.11, любой подкласс Шунка класса \mathfrak{X} порождается некоторым подмножеством множества $\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$. Поэтому мощность множества всех подклассов Шунка класса \mathfrak{X} не превосходит мощности множества всех подмножеств множества $\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$, т.е. не превосходит 2^n .

1.2.13. Следствие. Решетка подклассов Шунка класса Шунка, порожденного группой G , конечна для любой группы G .

1.3. Дополнения и комментарии

Анализ многих результатов теории групп [78,89,90], связанных с изучением свойств максимальных подгрупп и их пересечений, показывает, что во многих случаях изучаемые системы максимальных подгрупп обладают следующими свойствами:

1) если некоторая максимальная подгруппа M группы G принадлежит рассматриваемой системе, то ей принадлежат и все подгруппы, сопряженные с M ;

2) свойства выделяемых максимальных подгрупп сохраняются при всех гомоморфизмах групп.

Аксиоматизация этих свойств привела к понятиям регулярного m -функтора и Θ -подгруппы Фраттини, которые изучаются в параграфе 1.1. Здесь приводятся наиболее интересные примеры регулярных m -функторов, устанавливаются способы конструирования новых m -функторов как объединения и пересечения заданных. Наряду с регулярными m -функторами выделяются также нормальные m -функторы. Появление их связано с аксиоматизацией того свойства подгруппы Фраттини группы G , что $\Phi(N) \subseteq \Phi(G)$ для всех $N \triangleleft G$, с одной стороны, и работой Дескинса [78] по изучению свойств подгруппы $\Phi_p(G)$, с другой.

Рассматриваемый функциональный подход позволяет тесно увязать задачу изучения свойств Θ -подгруппы Фраттини $\Phi_\Theta(G)$ с теорией классов. Действительно, для любого регулярного m -функтора Θ класс

$$\mathfrak{X} = \{G \mid \Phi_\Theta(G) = G\}$$

является классом Шунка и любая максимальная Θ -подгруппа группы R является \mathfrak{X} -абнормальной в G (теорема 1.1.16). С

другой стороны, каждому классу Шунка \mathfrak{X} соответствует регулярный m -функтор Θ , выделяющий в каждой группе систему ее \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп (лемма 1.2.7). Эти результаты интересны в следующих отношениях.

1. Они позволяют строить новые примеры классов Шунка по заданным m -функторам, и наоборот, выделять регулярные m -функторы, соответствующие классам Шунка.

2. Они подчеркивают важность изучения пересечения \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп именно для классов Шунка \mathfrak{X} , а не только для формаций [61] или локальных формаций [26,27,58,63].

3. Они дают возможность редуцировать задачу изучения строения подгруппы $\Phi_{\Theta}(G)$, где Θ — регулярный m -функтор, к соответствующей задаче для подгруппы $\Delta^*(G)$. Действительно, согласно теореме 1.1.16, для любой группы G справедливо включение

$$\Delta^*(G) \subseteq \Phi_{\Theta}(G), \quad (*)$$

где $\Delta^*(G)$ — пересечение всех \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп группы G ; \mathfrak{X} — класс Шунка $\{H \mid \Phi_{\Theta}(H) = H\}$.

Ввиду этого изучение строения подгруппы $\Phi_{\Theta}(G)$ разбивается на два этапа:

- а) изучение строения подгруппы $\Delta^*(G)$;
- в) изучение строения факторгруппы $\Phi_{\Theta}(G)/\Delta^*(G)$.

Отметим, что очень часто вместо включения (*) имеет место равенство $\Delta^*(G) = \Phi_{\Theta}(G)$. В частности, это будет в случае, когда Θ — регулярный m -функтор, выделяющий в группе G все ее \mathfrak{f} -абнормальные максимальные подгруппы, где \mathfrak{f} — непустая формация (лемма 1.2.1).

Функциональный подход, предложенный в параграфе 1.1, позволяет исследовать свойства решеток классов групп. Как показано в примере 1.1.8, введение на множестве \mathcal{L} всех m -функторов отношения частичного порядка делает \mathcal{L} полной решеткой, содержащей в качестве подрешетки решетку \mathcal{L}_{reg} всех регулярных m -функторов. В свою очередь (теорема 1.2.6) решетка \mathcal{L}_{reg} тесно связана с решеткой \mathcal{L} всех классов Шунка. Следствием этого является тот факт, что решетка классов Шунка конечных групп является дистрибутивной. Отметим, что решетка

многообразий групп не является дистрибутивной [98]. Модулярными, но не дистрибутивными являются также решетки всех формаций и всех локальных формаций [51,61], решетка p -локальных формаций [69].

Из параграфа 1.2 можно сделать вывод о том, что решетка подклассов Шунка класса Шунка, порожденного конечной группой, является конечной. Отметим, что вопрос о конечности решетки подформаций формации $\text{form } G$, где G — конечная группа, является весьма сложным и известен в теории групп как проблема Гашюца [81] (см. также проблему 9.59 из [18]).

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРНИЦЫ

Глава 2

Θ-ПОДГРУППЫ ФРАТТИНИ

В настоящей главе изучается строение Θ -подгруппы Фраттини $\Phi_{\Theta}(G)$ группы G для наиболее интересных m -функторов Θ . Как отмечалось в параграфе 1.3, первым шагом на этом пути является исследование структуры подгруппы $\Delta^{\mathfrak{X}}(G)$ для класса Шунка \mathfrak{X} . Такая задача решается в параграфе 2.1 для тех классов Шунка, которые обладают свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Отметим, что множество классов Шунка с таким условием достаточно широко. Ему принадлежат, в частности, все разрешимые классы Шунка, все локальные формации, все классы Шунка, порожденные формациями. Исследования связи \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп и \mathfrak{X} -центральных главных факторов позволили здесь изучить также структуру подгруппы $\Phi_{\Theta}(G)$, где Θ — m -функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все ее \mathfrak{X} -нормальные максимальные подгруппы.

В параграфе 2.2 исследуется нормальное строение Θ -подгруппы Фраттини в случае, когда Θ — m -функтор, выделяющий в группе не все \mathfrak{X} -абнормальные максимальные подгруппы, а лишь те, которые не входят в класс \mathfrak{X} .

Пересечения \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп с ограничениями на индексы изучаются в параграфе 2.3.

Понятие \mathfrak{f} -достижимой подгруппы, введенное Кегелем в работе [102], позволило систематизировать многие закономерности, связанные с нормальными и субнормальными подгруппами, а также их обобщениями. В параграфе 2.4 идея \mathfrak{f} -достижимой подгруппы используется для объединения результатов работ [27, 59, 68, 74], связанных с поведением нормальных и обобщенно субнормальных \mathfrak{f} -подгрупп во фраттининовых и обобщенно фраттининовых расширениях конечных групп.

2.1. \mathfrak{X} -анормальность и \mathfrak{X} -центральность для классов Шунка

В настоящем параграфе для класса Шунка \mathfrak{X} исследуется связь \mathfrak{X} -анормальных максимальных подгрупп группы с ее главными \mathfrak{X} -центральными факторами. Следуя работе [61], введем следующие определения.

2.1.1. Определение. Пусть H/K — нормальный фактор группы G , M — некоторая ее подгруппа. Будем говорить, что M покрывает фактор H/K , если $H \subseteq KM$. Если при этом $K = 1$, то будем говорить, что M покрывает нормальную подгруппу H .

2.1.2. Определение. Пусть \mathfrak{X} — произвольный класс Шунка. Нормальный фактор H/K группы G называется \mathfrak{X} -центральным, если

$$[H/K](G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{X}.$$

Если же

$$[H/K](G/C_G(H/K)) \notin \mathfrak{X},$$

то фактор H/K называется \mathfrak{X} -эксцентральным.

2.1.3. Определение. Пусть $D = [M]A$, $R = [N]B$. Пары (M, A) и (N, B) называются эквивалентными, если существуют такие изоморфизмы $\alpha: M \rightarrow N$ и $\beta: A \rightarrow B$, что $(m^a)^\alpha = (m^\alpha)^{\beta}$ для всех $m \in M$ и всех $a \in A$.

В дальнейшем нам понадобится результат Бэра из [66] о строении примитивных групп. Его мы приведем в виде леммы.

2.1.4. Лемма. Пусть G — примитивная группа, M — ее максимальная подгруппа с единичным ядром. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

- 1) G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , которая самоцентризуема (в частности, абелева) и дополняема в G подгруппой M ;
- 2) G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , которая неабелева и добавляема в G подгруппой M ;
- 3) G имеет в точности две минимальные нормальные подгруппы N и N^* , каждая из которых дополняема в G подгруппой M ;

$$C_G(N) = N^*, C_G(N^*) = N \text{ и } N \cong N^* \cong NN^* \cap M;$$

если V — собственная подгруппа G и $VN = VN^* = G$, то $V \cap N^* = V \cap N = I$.

Следуя [81], далее через \mathcal{P} будем обозначать класс всех примитивных конечных групп, а через \mathcal{P}_i — класс тех примитивных групп, которые удовлетворяют утверждению 1) леммы 2.1.4 ($i = 1, 2, 3$). Тогда $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$.

2.1.5. Определение. Пусть \mathcal{X} — некоторый класс групп. Тогда класс $\ell(\mathcal{X})$, состоящий из всех тех групп G , которые не принадлежат \mathcal{X} , но $G/N \in \mathcal{X}$ для всех $1 \neq N \triangleleft G$, называется Q -границей класса \mathcal{X} .

Простая проверка показывает, что непустой класс \mathcal{X} является классом Шунка тогда и только тогда, когда $\ell(\mathcal{X}) \in \mathcal{P}$. Далее нас будут интересовать те классы Шунка \mathcal{X} , для которых выполняется условие $\ell(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, т.е. такие классы \mathcal{X} , которые содержат все примитивные группы G из \mathcal{P}_3 , если $G/N \in \mathcal{X}$ для всех $1 \neq N \triangleleft G$. Следующая лемма показывает, что множество таких классов Шунка достаточно широко.

2.1.6. Лемма. Каждый из следующих классов Шунка \mathcal{X} обладает свойством $\ell(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$:

- 1) \mathcal{X} — разрешимый класс Шунка;
- 2) \mathcal{X} — наименьший класс Шунка, содержащий формацию \mathcal{f} ;
- 3) \mathcal{X} — локальная формация.

Доказательство. 1. Допустим, что существует группа G , принадлежащая $\ell(\mathcal{X}) \cap \mathcal{P}_3$. Тогда, согласно лемме 2.1.4, в G найдутся две неабелевы минимальные нормальные подгруппы N и N^* такие, что $G/N \in \mathcal{X}$ и $G/N^* \in \mathcal{X}$. Так как класс \mathcal{X} разрешим, то группа G разрешима. Пришли к противоречию с тем, что $G \in \mathcal{P}_3$.

2. Если \mathcal{X} — наименьший класс Шунка, содержащий формацию \mathcal{f} , то по теореме Ферстера из [85] $\mathcal{X} = E_{\mathcal{d}}\mathcal{f}$. Допустим, что найдется группа $G \in \ell(\mathcal{X}) \cap \mathcal{P}_3$. Ввиду леммы 2.1.4 в группе G существуют две неабелевы минимальные нормальные подгруппы N и N^* такие, что $G/N \in \mathcal{X}$ и $G/N^* \in \mathcal{X}$. Тогда

$$G/N/\Phi(G/N) \in \mathcal{f} \text{ и } G/N^*/\Phi(G/N^*) \in \mathcal{f}.$$

Пусть

$$\Phi(G/N) = K/N \text{ и } \Phi(G/N^*) = K^*/N^*.$$

Тогда $G/K \in \mathcal{F}$ и $G/K^* \in \mathcal{F}$. Допустим, что $K \cap K^* \neq 1$. Так как $G \in \mathcal{P}_3$, то либо $N \subseteq K \cap K^*$, либо $N^* \subseteq K \cap K^*$. Пусть для определенности $N \subseteq K \cap K^*$. Тогда $N \subseteq K^*$, а значит, $NN^*/N^* \subseteq K^*/N^*$. Так как группа NN^*/N^* неабелева, а группа K^*/N^* нильпотентна, то приходим к противоречию. Значит, $K \cap K^* = 1$. Так как класс \mathcal{F} является формацией, то из $G/K \in \mathcal{F}$, $G/K^* \in \mathcal{F}$ и $K \cap K^* = 1$ следует $G \in \mathcal{F}$. Но тогда $G \in \mathcal{X}$. Пришли к противоречию с тем, что $G \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Утверждение 3) прямо следует из утверждения 2), так как локальная формация является классом Шунка. Лемма доказана.

2.1.7. Теорема. Пусть \mathcal{X} — класс Шунка, обладающий свойством $\mathcal{L}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Пусть H/K — главный фактор группы G , M — максимальная подгруппа группы G , не покрывающая H/K . Тогда и только тогда M \mathcal{X} -нормальна в G , когда фактор H/K \mathcal{X} -централен в G .

Доказательство. Так как M не покрывает главный фактор H/K группы G , то $M \supseteq K$, $MH = G$. Ввиду леммы 8.1 из [59] главные факторы H/K и HL/L , где $L = \text{Core}_G(M)$, G -изоморфны. Поэтому

$$C = C_G(H/K) = C_G(HL/L) \supseteq KL = L.$$

Пусть M — \mathcal{X} -нормальная максимальная подгруппа группы G . Тогда $G/L \in \mathcal{F}$. Если $L \neq 1$, то для G/L теорема верна по индукции. Это означает, что G -главный фактор HL/L группы G/L , не покрываемый \mathcal{X} -нормальной максимальной подгруппой M/L группы G/L , является \mathcal{X} -центральным в G/L , т.е.

$$[HL/L](G/L/C_{G/L}(HL/L)) \in \mathcal{F}.$$

Так как пары

$$(HL/L, G/C_G(HL/L)) \text{ и } (HL/L, G/L/C_{G/L}(HL/L))$$

эквивалентны, то, согласно лемме 3.27 из [61], группы

$$[HL/L](G/L/C_{G/L}(HL/L)) \text{ и } [HL/L](G/C_G(HL/L))$$

изоморфны. Следовательно,

$$[HL/L](G/C_G(HL/L)) \in \mathcal{X}.$$

Ввиду лемм 3.27 и 3.28 из [61] $[H/K](G/C) \in \mathfrak{X}$. Значит, фактор H/K \mathfrak{X} -централен в G .

Пусть теперь $L = 1$. Тогда $G \in \mathfrak{X}$, $K = 1$. Возможны два случая: $C = 1$ или $C \neq 1$.

Пусть сначала $C = 1$. Тогда H — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , причем H — неабелева группа. Рассмотрим подгруппу H_1G_1 из $G \times G$, где

$$H_1 = \{(h, 1) \mid h \in H\}, \quad G_1 = \{(g, g) \mid g \in G\}.$$

Очевидно, $H_1G_1 = [H_1]G_1$. Более того, согласно лемме 3.27 из [61], $[H_1]G_1 \cong [H]G$. Группа H_1G_1 содержит, по крайней мере, две минимальные нормальные подгруппы: H_1 , $H_2 = \{(1, h) \mid h \in H\}$. Очевидно, $H_1 \cap G_1 = H_2 \cap G_1 = 1$.

Пусть S — некоторая минимальная нормальная подгруппа группы H_1G_1 . Допустим, что $S \cap G_1 \neq 1$. Так как $S \cap G_1 \triangleleft G_1$ и G_1 содержит единственную минимальную нормальную подгруппу $K_1 = \{(h, h) \mid h \in H\}$, то $K_1 \subseteq S \cap G_1$. Так как $C_{H_1G_1}(S)$ содержит хотя бы одну из подгрупп H_1 , H_2 , то $C_{H_1G_1}(K_1)$ также содержит одну из этих подгрупп. Так как каждая из подгрупп H_1 , H_2 пересекается с G_1 по единице, то $N_{H_1G_1}(K_1) = H_1G_1$, т.е. $K_1 \triangleleft H_1G_1$. Так как подгруппа K_1 неабелева, то простая проверка показывает, что подгруппа K_1 не является нормальной в H_1G_1 . Пришли к противоречию. Значит, $S \cap G_1 = 1$. Заключим G_1 в максимальную подгруппу T группы H_1G_1 . Тогда $T \cap H_1 \triangleleft T$ и $C_{H_1G_1}(T \cap H_1) \cong H_2$. Значит,

$$N_{H_1G_1}(T \cap H_1) \cong \langle T, H_2 \rangle = H_1G_1.$$

Так как H_1 — минимальная нормальная подгруппа группы H_1G_1 , то $T \cap H_1 = 1$. Поэтому $G_1 = T$ — максимальная подгруппа группы H_1G_1 . Отсюда, в частности, следует, что для любой минимальной нормальной подгруппы S группы H_1G_1 факторгруппа H_1G_1/S принадлежит \mathfrak{X} .

Если группа H_1G_1 не является примитивной, то из того, что \mathfrak{X} — класс Шунка и все примитивные гомоморфные образы группы H_1G_1 принадлежат \mathfrak{X} , следует, что $H_1G_1 \in \mathfrak{X}$. Значит, $[H]G \in \mathfrak{X}$. Поэтому фактор H/K группы G \mathfrak{X} -централен в G .

Если группа H_1G_1 примитивна, то $H_1G_1 \in \mathcal{P}_3$. Так как для любой нормальной подгруппы $N \neq 1$ группы H_1G_1 факторгруппа H_1G_1/N принадлежит \mathfrak{X} , то ввиду условия $\mathcal{L}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ имеем $H_1G_1 \in \mathfrak{X}$. Отсюда следует, что фактор H/K группы G \mathfrak{X} -централен в G .

Пусть теперь $C \neq 1$. Так как группа G примитивна, то по лемме 2.1.4 C — минимальная нормальная подгруппа группы G и в G существует максимальная подгруппа M , которая дополняет H и C в группе G . Так как $M \simeq G/C$, то пары (H, M) и $(H, G/C)$ эквивалентны. Значит, $[H]M \simeq [H](G/C)$. Так как $[H]M = G$ и $G \in \mathfrak{X}$, то $[H](G/C) \in \mathfrak{X}$, т.е. фактор H/K \mathfrak{X} -централен в G .

Итак, если подгруппа M \mathfrak{X} -нормальна в G , то главный фактор H/K \mathfrak{X} -централен в G .

Предположим теперь, что фактор H/K \mathfrak{X} -централен в G , но подгруппа M \mathfrak{X} -абнормальна в G . Рассмотрим группу G/L . В ней максимальная подгруппа M/L \mathfrak{X} -абнормальна. Кроме того, M/L не покрывает \mathfrak{X} -центральный главный фактор HL/L группы G/L . Если $L \neq 1$, то для G/L теорема верна по индукции, и мы приходим к противоречию. Пусть $L = 1$.

Допустим сначала, что $C = 1$. Тогда ввиду \mathfrak{f} -центральности H в G имеем $[H]G \in \mathfrak{X}$. Отсюда

$$G/L \simeq G \simeq [H](G/H) \in \mathfrak{X}.$$

Пришли к противоречию с тем, что M — \mathfrak{X} -абнормальная подгруппа группы G .

Пусть теперь $C \neq 1$. Так как $L = 1$, то C не входит в M , а значит, $G = CM = HM$. Отсюда следует, что $C \cap M$ — нормальная подгруппа группы G , а значит, $C \cap M = 1$. Из максимальности M следует, что C — минимальная нормальная подгруппа группы G . Так как подгруппа H \mathfrak{X} -центральна в G , то

$$[H](G/C_G(H)) = [H](G/C) \in \mathfrak{X}.$$

Отметим, что $M \cap H = 1$. Поэтому $M \simeq G/C$. Так как пары $(H, G/C)$ и (H, M) эквивалентны, то, согласно лемме 3.27 из [61], имеем

$$G = [H]M \simeq [H](G/C) \in \mathfrak{X}.$$

Значит, M — \mathfrak{X} -нормальная максимальная подгруппа группы G . Снова пришли к противоречию. Теорема доказана.

2.1.8. Следствие. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, обладающий свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Максимальная подгруппа M группы G \mathfrak{X} -абнормальна (\mathfrak{X} -нормальна) тогда и только тогда, когда M не покрывает хотя бы один \mathfrak{X} -эксцентральный (\mathfrak{X} -центральный) главный фактор группы G .

Из теоремы 2.1.7 и леммы 2.1.6 вытекают следующие результаты.

2.1.9. Следствие. Пусть \mathfrak{X} — разрешимый класс Шунка. Максимальная подгруппа M группы G \mathfrak{X} -абнормальна (\mathfrak{X} -нормальна) тогда и только тогда, когда M не покрывает хотя бы один \mathfrak{X} -эксцентральный (\mathfrak{X} -центральный) главный фактор группы G .

2.1.10. Следствие [59]. Пусть \mathfrak{f} — локальная формация. Максимальная подгруппа M группы G \mathfrak{f} -абнормальна (\mathfrak{f} -нормальна) тогда и только тогда, когда M не покрывает хотя бы один \mathfrak{f} -эксцентральный (\mathfrak{f} -центральный) главный фактор группы G .

2.1.11. Следствие [61]. Пусть \mathfrak{f} — непустая формация. Максимальная подгруппа M группы G \mathfrak{f} -абнормальна (\mathfrak{f} -нормальна) тогда и только тогда, когда M не покрывает хотя бы один \mathfrak{f} -эксцентральный (\mathfrak{f} -центральный) главный фактор группы G .

Доказательство. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, индуцированный формацией \mathfrak{f} . Согласно лемме 1.2.1, множества \mathfrak{f} -нормальных и \mathfrak{X} -нормальных максимальных подгрупп любой группы совпадают.

Пусть M — \mathfrak{f} -нормальная максимальная подгруппа группы G , не покрывающая главный фактор H/K . Покажем, что H/K — \mathfrak{f} -центральный главный фактор группы G . Ввиду индуктивных соображений можно ограничиться рассмотрением случая, когда G — примитивная группа, а M — ее максимальная подгруппа с единичным ядром. Тогда $K = 1$. Ввиду теоремы 2.1.7 H — \mathfrak{X} -центральный главный фактор группы G , т.е. $[H](G/C_G(H)) \in \mathfrak{X}$. Если $G \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_3$, то $[H](G/C_G(H)) \cong G$. Значит, $G \in \mathfrak{X}$. По теореме Ферстера из [85] $\mathfrak{X} = E_{\mathfrak{f}}$. Так как $\Phi(G) = 1$, то из $G \in \mathfrak{X}$ следует $G \in \mathfrak{f}$. Поэтому $[H](G/C_G(H)) \in \mathfrak{f}$ и фактор H \mathfrak{f} -централен в G .

Пусть теперь $G \in \mathcal{P}_2$. Тогда $[H]G$ — примитивная группа из \mathcal{P}_3 . Поэтому $\Phi([H]G) = 1$. Теперь снова из $\mathfrak{X} = E_{\mathfrak{G}}\mathfrak{f}$ и $[H]G \in \mathfrak{X}$ следует $[H]G \in \mathfrak{f}$, т.е. H — \mathfrak{f} -центральный главный фактор группы G .

Пусть теперь максимальная подгруппа M группы G не покрывает \mathfrak{f} -центральный главный фактор H/K группы G . Допустим, что она является \mathfrak{f} -абнормальной. Тогда M — \mathfrak{X} -абнормальная максимальная подгруппа группы G . На основании леммы 2.1.6 и следствия 2.1.8 фактор H/K \mathfrak{X} -эксцентрален в G , т.е.

$$[H/K](G/C_G(H/K)) \notin \mathfrak{X}.$$

Но тогда

$$[H/K](G/C_G(H/K)) \notin \mathfrak{f}.$$

Пришли к противоречию с \mathfrak{f} -центральностью главного фактора H/K .

2.1.12. Определение. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, H — нормальная подгруппа группы G . Подгруппа H называется \mathfrak{X} -гиперцентральной в G , если каждый G -главный фактор подгруппы H \mathfrak{X} -централен в G . Единичная подгруппа считается \mathfrak{X} -гиперцентральной. Произведение всех \mathfrak{X} -гиперцентральных нормальных подгрупп группы G называется \mathfrak{X} -гиперцентром G и обозначается $Z_{\mathfrak{X}}^{\infty}(G)$.

2.1.13. Лемма. Если \mathfrak{X} — класс Шунка, то $Z_{\mathfrak{X}}^{\infty}(G)$ — \mathfrak{X} -гиперцентральный нормальный фактор группы G .

Доказательство. Пусть N и K — \mathfrak{X} -гиперцентральные нормальные подгруппы группы G . Если $N \cap K \neq 1$, то ввиду индуктивных рассуждений все G -главные факторы группы $NK/N \cap K$ \mathfrak{X} -центральны в $G/N \cap K$, а значит, они будут \mathfrak{X} -центральными и в группе G . Любой G -главный фактор группы $N \cap K$ \mathfrak{X} -централен в G по условию. Следовательно, NK обладает G -главным рядом, все факторы которого \mathfrak{X} -центральны в G . Теперь на основании теоремы Жордана—Гельдера и леммы 3.27 из [61] получаем, что все G -главные факторы группы NK \mathfrak{X} -центральны в G , т.е. NK — \mathfrak{X} -гиперцентральный нормальный фактор группы G .

Если $N \cap K = 1$, то, согласно лемме 1.3 из [59], любой G -главный фактор группы NK либо G -изоморфен некоторому G -главному фактору группы N , либо G -изоморфен некоторому G -главному фактору из K . Так как подгруппы N и K \mathfrak{X} -гиперцентральны в G , то на основании леммы 3.27 из [61] все G -главные факторы группы NK \mathfrak{X} -центральны в G . Лемма доказана.

2.1.14. Лемма. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, обладающий свойством $f(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Если M — \mathfrak{X} -абнормальная максимальная подгруппа группы G , то $Z_{\mathfrak{X}}^{\infty}(G) \subseteq M$.

Доказательство. Предположим, что в G существуют \mathfrak{X} -гиперцентральные нормальные подгруппы, не входящие в M . Выберем среди них подгруппу H , имеющую наименьший порядок. Пусть H/K — главный фактор группы G . Тогда $K \subseteq M$, $MH = G$, т.е. M не покрывает H/K . Так как $H \subseteq Z_{\mathfrak{X}}^{\infty}(G)$, то главный фактор H/K \mathfrak{X} -централен в G . Ввиду теоремы 2.1.7 подгруппа M \mathfrak{X} -нормальна в G . Пришли к противоречию. Значит, каждая \mathfrak{X} -абнормальная максимальная подгруппа группы G содержит $Z_{\mathfrak{X}}^{\infty}(G)$. Лемма доказана.

2.1.15. Определение. Пусть \mathfrak{X} — некоторый класс групп, N — нормальная подгруппа группы G . Подгруппа N называется \mathfrak{X} -корадикальной подгруппой группы G , если $G/N \in \mathfrak{X}$ и всегда из $G/K \in \mathfrak{X}$, где $K \subseteq N$, следует $K = N$. Множество всех \mathfrak{X} -корадикальных подгрупп группы G называется \mathfrak{X} -корадикалом группы G и обозначается через G^* .

Отметим, что гомоморф \mathfrak{X} является формацией тогда и только тогда, когда для любой группы G определенный выше \mathfrak{X} -корадикал является одноэлементным множеством. Таким образом, для класса Шунка \mathfrak{X} , не являющегося формацией, множество G^* не обязательно одноэлементно.

Пусть $G^* = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$ — \mathfrak{X} -корадикал группы G , N — нормальная подгруппа группы G . Тогда через G^*N обозначим множество

$$\{N_1N, N_2N, \dots, N_tN\},$$

а через G^*N/N — множество

$$\{N_1N/N, N_2N/N, \dots, N_tN/N\}.$$

2.1.16. Лемма. Пусть \mathfrak{X} — гомоморф, N — нормальная подгруппа группы G . Пусть $G^* = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$,

$$(G/N)^* = \{K_1/N, K_2/N, \dots, K_s/N\}.$$

Тогда $t \geq s$ и для любой группы $K_i/N \in (G/N)^*$ найдется группа $N_j \in G^*$ такая, что $N_jN/N = K_i/N$.

Доказательство. Так как

$$G/N/K_i/N \simeq G/K_i \in \mathfrak{X}$$

для всех $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, то для любой подгруппы K_i найдется подгруппа $N_j \in G^*$ такая, что $N_j \subseteq K_i$. Так как $G/N_j \in \mathfrak{X}$ и \mathfrak{X} — гомоморф, то $G/N_jN \in \mathfrak{X}$. Теперь ввиду изоморфизма

$$G/N/N_jN/N \simeq G/N_jN$$

имеем $N_jN = K_i$. Лемма доказана.

Следующий пример показывает, что не всегда для гомоморфа \mathfrak{X} и группы G выполняется равенство $(G/N)^* = G^*N/N$.

2.1.17. Пример. Пусть \mathfrak{X} — такой класс Шунка, для которого $\ell(\mathfrak{X}) \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset$. Пусть $G \in \ell(\mathfrak{X}) \cap \mathcal{P}_3$, N_1, N_2 — минимальные нормальные подгруппы группы G . Тогда

$$G^* = \{N_1, N_2\}, \quad (G/N_1)^* = \{1\}.$$

2.1.18. Теорема. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, обладающий свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Если M — максимальная подгруппа группы G , то либо M содержит все \mathfrak{X} -корадикальные подгруппы группы G , либо M не покрывает каждую из них.

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы. Пусть $G^* = \{A, B, \dots, C\}$, N — минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в A . Возможны два случая: либо $N \subseteq M$, либо M не содержит N .

1. Пусть $N \subseteq M$ и M не содержит A . На основании леммы 2.1.16 среди подгрупп $A/N, BN/N, \dots, CN/N$ содержатся все \mathfrak{X} -корадикальные подгруппы группы G/N . Так как M/N не содержит $A/N \in (G/N)^*$, то по индукции M/N не содержит любую из \mathfrak{X} -корадикальных подгрупп группы G/N . Если же, например,

BN/N не является \mathfrak{X} -корадикальной подгруппой, то ввиду леммы 2.1.16 $G/N \in \mathfrak{X}$. Отсюда следует, что $N = A$ и $A \subseteq M$. Противоречие. Значит,

$$(G/N)^* = \{A/N, BN/N, \dots, CN/N\}$$

и M не содержит каждую \mathfrak{X} -корадикальную подгруппы группы G .

2. Пусть теперь M не содержит A и не содержит любую минимальную нормальную подгруппу N группы G . Тогда $G = MN$. Допустим, что M содержит некоторую \mathfrak{X} -корадикальную подгруппу группы G , например, подгруппу B . Тогда $B \subseteq \text{Core}_G(M)$ и $G/B \in \mathfrak{X}$. Пусть B/R — G -главный фактор группы G . Тогда из определения \mathfrak{X} -корадикальной подгруппы следует, что

$$G/R \notin \mathfrak{X}, \quad B/R \in (G/R)^*.$$

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $A \cap B = 1$. Так как $G/R \notin \mathfrak{X}$, а $G/AR \in \mathfrak{X}$, то существует \mathfrak{X} -корадикальная подгруппа L/R в G/R такая, что $1 \neq L/R \subseteq AR/R$. Возьмем N в $L \cap A$. Тогда

$$G/R = (M/R)(NR/R) = (M/R)(L/R).$$

Если $R \neq 1$, то приходим к противоречию с выбором группы G , так как $|G/R| < |G|$ и G/R содержит \mathfrak{X} -корадикальную подгруппу B/R , но не содержит \mathfrak{X} -корадикальную подгруппу L/R . Значит, $R = 1$, B — минимальная нормальная подгруппа группы G .

Пусть A/D — главный фактор группы G . Так как M не содержит A , то M не покрывает фактор A/D . Поэтому $M \supseteq K$ и $\text{Core}_G(M) \cap A = D$. Так как M не содержит минимальных нормальных подгрупп группы G , содержащихся в A , то $D = 1$. Значит, $A = N$ — минимальная нормальная подгруппа группы G .

Так как $G \notin \mathfrak{X}$, то существует нормальная подгруппа K в G такая, что $G/K \in \ell(\mathfrak{X})$. Так как $G/K \notin \mathfrak{X}$, то $A \cap K = 1$ и $B \cap K = 1$. Поэтому AK/K и BK/K — минимальные нормальные подгруппы группы G . Так как $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, то $AK/K = BK/K$, а значит, $A \times K = B \times K$. Поэтому

$$C_G(A) \supseteq \langle K, B \rangle = AK, \quad C_G(B) \supseteq \langle K, A \rangle,$$

т.е. A и B — абелевы группы. Следовательно, $G = [A]M$ и $M \in \mathfrak{X}$. Согласно [81] (лемма 3.14 на стр. 295), M является \mathfrak{X} -проектором группы G . Поэтому из $G/B \in \mathfrak{X}$ следует, что $MB = G$. Противоречие. Теорема доказана.

2.1.19. Следствие. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, обладающий свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Пусть M — максимальная подгруппа группы $G \notin \mathfrak{X}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) подгруппа M \mathfrak{X} -нормальна тогда и только тогда, когда она содержит все \mathfrak{X} -корадикальные подгруппы группы G ;

2) подгруппа M \mathfrak{X} -абнормальна тогда и только тогда, когда она не содержит ни одну из \mathfrak{X} -корадикальных подгрупп группы G .

2.1.20. Следствие. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, обладающий свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Пусть $G^x = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$ — \mathfrak{X} -корадикал группы G . Тогда $N_j N_i / N_i \in \Phi(G/N_i)$ для всех $i, j \in \{1, 2, \dots, t\}$. В частности, $N_1 N_2 \dots N_t / N_i \in \Phi(G/N_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$.

Следствие 2.1.20 указывает на строение нормальной подгруппы группы G , равной пересечению всех \mathfrak{X} -нормальных максимальных подгрупп группы G , если \mathfrak{X} — класс Шунка, обладающий свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$.

2.1.21. Следствие. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, обладающий свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Пусть Θ — m -функтор, выделяющий в каждой группе G саму группу G и множество всех ее \mathfrak{X} -нормальных максимальных подгрупп. Если A — некоторая \mathfrak{X} -корадикальная подгруппа группы G , то

$$\Phi_{\Theta}(G)/A = \Phi(G/A).$$

2.1.22. Следствие. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, обладающий свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Пусть Θ — m -функтор, выделяющий в каждой группе G саму группу G и множество всех ее \mathfrak{X} -нормальных максимальных подгрупп. Если $G^x = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$, то

$$\Phi_{\Theta}(G)/N_1 N_2 \dots N_t = \Phi(G/N_1 N_2 \dots N_t).$$

2.1.23. Лемма. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, обладающий свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Если N — нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в $\Phi(G)$, то

$$G^*N/N = (G/N)^*.$$

Доказательство. Пусть

$$G^* = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}, (G/N)^* = \{K_1/N, K_2/N, \dots, K_s/N\}.$$

На основании леммы 2.1.16 для любого $i = 1, 2, \dots, s$ существует номер $j \in \{1, 2, \dots, t\}$ такой, что $K_i/N = N_jN/N$. Допустим, что для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, t\}$ подгруппа N_kN/N не принадлежит $(G/N)^*$. Так как

$$G/N/N_kN/N \in \mathfrak{X},$$

то найдется подгруппа $S/N \in (G/N)^*$ такая, что $S/N \subseteq N_kN/N$. Ввиду леммы 2.1.16 найдется подгруппа $N_i \in G^*$ такая, что $N_iN/N = S/N$. Таким образом, $N_iN \subseteq N_kN$.

Пусть $N_iN \subset N_kN$. Тогда ввиду изоморфизма

$$N_kN/N_iN \cong N_k/N_k \cap N_iN$$

имеем, что $N_k/N_k \cap N_iN$ — неединичная группа. Так как $\mathfrak{X} = E_\Phi \mathfrak{X}$, то

$$N_k/N_k \cap N_iN \notin \Phi(G/N_k \cap N_iN).$$

Следовательно, найдется максимальная подгруппа M группы G , которая не покрывает главный фактор R/S , где

$$N_k \cap N_iN \subseteq S \subseteq R \subseteq N_k.$$

Отсюда имеем, что $MN_k = MR = G$ и

$$\text{Core}_G(H) \supseteq S \supseteq N_k \cap N_iN.$$

Так как $N_k \in G^*$, то, согласно теореме 2.1.18, подгруппа M является \mathfrak{X} -абнормальной и не покрывает подгруппу $N_i \in G^*$. На основании тождества Дедекинда

$$SN \supseteq (N_k \cap N_iN)N = N_kN \cap N_iN = N_iN.$$

Так как $N \subseteq \Phi(G)$, то $N \subseteq \text{Core}_G(M)$. Значит,

$$N_iN \subseteq SN \subseteq \text{Core}_G(M)$$

и $N_i \subseteq M$. Пришли к противоречию с тем, что M не покрывает N_i . Значит,

$$N_i N / N = S / N = N_k N / N \in (G / N)^{\mathfrak{X}}.$$

Лемма доказана.

2.1.24. Лемма. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, обладающий свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, K — некоторая нормальная подгруппа группы G . Пусть каждая максимальная подгруппа группы G , не содержащая K , является \mathfrak{X} -нормальной. Если $G^{\mathfrak{X}} = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$, то $K \cap N_1 N_2 \dots N_t \subseteq \Phi(G)$, в частности, $K \cap N_i \subseteq \Phi(G)$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$.

Доказательство. Пусть Θ — m -функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все ее \mathfrak{X} -нормальные максимальные подгруппы. Тогда ввиду леммы 1.1.9

$$K \cap \Phi_{\Theta}(G) \subseteq \Delta^{\mathfrak{X}}(G) \cap \Phi_{\Theta}(G) = \Phi(G).$$

На основании теоремы 2.1.18 $N_1 N_2 \dots N_t \subseteq \Phi_{\Theta}(G)$. Теперь имеем

$$K \cap N_1 N_2 \dots N_t \subseteq K \cap \Phi_{\Theta}(G) \subseteq \Phi(G).$$

Лемма доказана.

2.1.25. Теорема. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, обладающий свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, Θ — m -функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все ее \mathfrak{X} -нормальные максимальные подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $Z_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{X}}(G / \Phi(G)) \subseteq \Delta^{\mathfrak{X}}(G) / \Phi(G)$;

2) если $Z_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{X}}(G / \Phi(G)) = Z / \Phi(G)$, то все G -главные факторы группы $\Delta^{\mathfrak{X}}(G) / Z$ либо фраттиниевы, либо \mathfrak{X} -центральны в G ;

3) $\Delta^{\mathfrak{X}}(G) \Phi_{\Theta}(G) / \Phi(G) = \Delta^{\mathfrak{X}}(G) / \Phi(G) \times \Phi_{\Theta}(G) / \Phi(G)$;

4) если $G^{\mathfrak{X}} = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$,

то

$$\Delta^{\mathfrak{X}}(G) N_1 N_2 \dots N_t / \Phi(G) = \Delta^{\mathfrak{X}}(G) / \Phi(G) \times N_1 N_2 \dots N_t \Phi(G) / \Phi(G).$$

Доказательство. Утверждение 1) теоремы прямо следует из леммы 2.1.14.

2) Пусть R/S — G -главный фактор группы $\Delta^*(G)/Z$, где

$$Z/\Phi(G) = Z_{\mathfrak{X}}^*(G/\Phi(G)).$$

Допустим, что $R/S \not\subseteq \Phi(G/S)$. Тогда в группе G найдется максимальная подгруппа M такая, что $RM = G$ и $S \subseteq \text{Core}_G(M)$. Так как M не содержит $\Delta^*(G)$, то подгруппа M \mathfrak{X} -нормальна в G . Согласно теореме 2.1.7, главный фактор R/S \mathfrak{X} -централен в G .

3) По лемме 1.1.9

$$\Phi_{\Theta}(G/\Phi(G)) = \Phi_{\Theta}(G)/\Phi(G) \text{ и } \Delta^*(G/\Phi(G)) = \Delta^*(G)/\Phi(G).$$

Поэтому из-за индуктивных рассуждений можем полагать, что $\Phi(G) = 1$. Тогда на основании леммы 2.1.24 имеем

$$\Delta^*(G) \cap \Phi_{\Theta}(G) \subseteq \Phi(G) = 1, \text{ т.е.}$$

$$\Delta^*(G)\Phi_{\Theta}(G) = \Delta^*(G) \times \Phi_{\Theta}(G).$$

Утверждение 4) прямо следует из леммы 2.1.23 и следствия 2.1.22. Теорема доказана.

2.1.26. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — непустая формация, Θ — m -функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все ее \mathfrak{f} -нормальные максимальные подгруппы. Тогда для любой группы G справедливы утверждения:

$$1) \Delta^{\mathfrak{f}}(G)/\Phi(G) = Z_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{f}}(G/\Phi(G));$$

$$2) \Phi_{\Theta}(G)/G^{\mathfrak{f}} = \Phi(G/G^{\mathfrak{f}});$$

$$3) \Delta^{\mathfrak{f}}(G)\Phi_{\Theta}(G)/\Phi(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G)/\Phi(G) \times \Phi_{\Theta}(G)/\Phi(G).$$

Доказательство. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, индуцированный формацией \mathfrak{f} . На основании леммы 2.1.6 $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Пусть Θ_1 — \mathfrak{X} -абнормальный m -функтор. Согласно лемме 1.2.1, $\Phi_{\Theta}(G) = \Phi_{\Theta_1}(G)$, $\Delta^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta^*(G)$. Если R/S — G -главный фактор группы

$$\Delta^{\mathfrak{f}}(G/\Phi(G))/Z_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{f}}(G/\Phi(G)),$$

то он ввиду теоремы 2.1.25 G -изоморфен фактору

$$R\Phi_{\Theta}(G/\Phi(G))/S\Phi_{\Theta}(G/\Phi_{\Theta}(G)).$$

Так как

$$G/\Phi(G)/S\Phi_{\Theta}(G/\Phi(G)) \in \mathfrak{f},$$

то по теореме Барнса и Кегеля из [70] имеем, что фактор

$$R\Phi_{\Theta}(G/\Phi(G))/S\Phi_{\Theta}(G/\Phi(G))$$

является \mathfrak{f} -центральным. На основании леммы 3.28 из [61] фактор R/S \mathfrak{f} -централен в $G/\Phi(G)$. Значит,

$$\Delta^{\mathfrak{f}}(G)/\Phi(G) = Z_{\infty}^{\mathfrak{f}}(G/\Phi(G)).$$

Остальные утверждения прямо следуют из теоремы 2.1.24.

2.1.27. Следствие. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, порожденный формацией \mathfrak{f} . Тогда для любой группы G справедливо равенство

$$\Delta^{\mathfrak{X}}(G)/\Phi(G) = Z_{\infty}^{\mathfrak{f}}(G/\Phi(G)).$$

2.1.28. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — локальная формация. Пусть Θ — m -функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все ее \mathfrak{f} -нормальные максимальные подгруппы. Тогда для любой группы G справедливы утверждения:

- 1) $\Delta^{\mathfrak{f}}(G)/\Phi(G) = Z_{\infty}^{\mathfrak{f}}(G/\Phi(G));$
- 2) $\Phi_{\Theta}(G)/G^{\mathfrak{f}} = \Phi(G/G^{\mathfrak{f}});$
- 3) $\Delta^{\mathfrak{f}}(G)\Phi_{\Theta}(G)/\Phi(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G)/\Phi(G) \times \Phi_{\Theta}(G)/\Phi(G).$

2.1.29. Теорема. Пусть \mathfrak{X} — нормально наследственный класс Шунка, обладающий свойством $\mathfrak{b}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Пусть в любой группе $R \in \mathfrak{X}$, где \mathfrak{X} — класс всех нильпотентных групп, все \mathfrak{X} -проекторы сопряжены. Тогда $\Delta^{\mathfrak{X}}(G) = A \times B$, где $A \in \mathfrak{X}$, $B \subseteq \Phi(G)$, $\pi(\mathfrak{X}) \cap \pi(B) = \emptyset$.

Доказательству теоремы предположим некоторые определения и предварительные результаты.

2.1.30. Определение. Пусть \mathfrak{X} — непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется \mathfrak{X} -проектором, если $HN/N \in \mathfrak{X}$.

\mathfrak{X} -максимальная подгруппа группы G/N для любой нормальной подгруппы N группы G .

Отметим, что если \mathfrak{X} — класс Шунка, то в любой конечной группе существуют \mathfrak{X} -проекторы (см. [82]).

2.1.31. Лемма. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка. Если N — нильпотентная нормальная подгруппа группы G и H — \mathfrak{X} -максимальная подгруппа группа G такая, что $HN = G$, то H является \mathfrak{X} -проектором группы G .

Доказательство леммы 2.1.31 можно найти в работе [81] на стр. 295.

Обозначим через $\pi(\mathfrak{X})$ — множество всех простых чисел, делящих порядки групп из класса \mathfrak{X} .

2.1.32. Лемма. Пусть \mathfrak{X} — нормально наследственный класс Шунка, $\pi = \pi(\mathfrak{X})$. Тогда $\mathfrak{X}_\pi \subseteq \mathfrak{X}$.

Доказательство. Так как класс \mathfrak{X} замкнут относительно взятия гомоморфных образов и нормальных подгрупп, то из $G \in \mathfrak{X}$ следует, что все композиционные факторы группы G принадлежат \mathfrak{X} .

Пусть $p \in \pi(G)$, $G \in \mathfrak{X}$. Если в G имеется композиционный фактор H порядка p , то $H \in \mathfrak{X}$. Значит, все композиционные факторы группы G , порядки которых делятся на p , являются неабелевыми. Пусть H один из таких факторов и N — фраттини-ев $F_p[H]$ -модуль. Так как $NH \in \mathfrak{X}$, то из $\mathfrak{X} = E_\Phi \mathfrak{X}$ имеем $N \in \mathfrak{X}$.

Итак, для всех $p \in \pi(\mathfrak{X})$ циклическая группа Z_p порядка p принадлежит \mathfrak{X} . Пусть $G \in \mathfrak{X}_\pi$. Так как $\text{Core}_G(M) = M$ и $|G/M|$ — простое число для любой максимальной подгруппы группы G , то все примитивные гомоморфные образы группы G принадлежат \mathfrak{X} . Следовательно, $G \in \mathfrak{X}$. Лемма доказана.

Доказательство следующей леммы см. в [59].

2.1.33. Лемма. Пусть H и K — подгруппы группы G , причем $H \subseteq K$. Если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены с помощью элемента из K , то $N_G(H)K = G$.

Доказательство теоремы 2.1.29. Пусть Θ — m -функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все ее \mathfrak{X} -нормальные максимальные подгруппы. Тогда, согласно теореме 2.1.25, имеем

$$\Delta^*(G)\Phi_\Theta(G)/\Phi(G) = \Delta^*(G)/\Phi(G) \times \Phi_\Theta(G)/\Phi(G).$$

На основании следствия 2.1.22 $\Phi_\omega(G) \cong N_1 N_2 \dots N_t$, где $\{N_1, N_2, \dots, N_t\} = G^*$.

Значит, $G/\Phi_\omega(G) \in \mathfrak{X}$. Так как класс \mathfrak{X} нормально наследствен, то

$$\Delta^*(G)\Phi_\omega(G)/\Phi_\omega(G) \in \mathfrak{X}.$$

Ввиду изоморфизма

$$\Delta^*(G)\Phi_\omega(G)/\Phi_\omega(G) \cong \Delta^*(G)/\Delta^*(G) \cap \Phi_\omega(G)$$

имеем, что $\Delta^*(G)/\Phi(G) \in \mathfrak{X}$.

Пусть $\omega = \pi(\mathfrak{X})$. Так как $\Delta^*(G)/\Phi(G)$ является ω -группой, то по лемме 4.4 из [59] подгруппа $\Delta^*(G)$ представлена в виде $\Delta^*(G) = A \times B$, где A — холловская ω -подгруппа группы $\Delta^*(G)$ и $B \subseteq \Phi(G)$.

Покажем, что $A \in \mathfrak{X}$. Применим для этого индукцию по порядку группы G . Тогда можем считать, что $B = 1$, $\Phi(G) \neq 1$ и если N — минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в $\Phi(G)$, то $A/N \in \mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{X} = E_\omega \mathfrak{X}$, то $\Phi(A) = 1$. Значит, $N \not\subseteq \Phi(A)$. Пусть H — добавление к N в группе A . Так как

$$H/H \cap N \cong HN/N = A/N \in \mathfrak{X}$$

и $H \cap N \subseteq \Phi(H)$, то $H \in \mathfrak{X}$. Пусть R — \mathfrak{X} -максимальная подгруппа группы A , содержащая H . Ввиду леммы 2.1.31 подгруппа R является \mathfrak{X} -проектором группы A . По условию теоремы все \mathfrak{X} -проекторы группы A сопряжены. Поэтому на основании леммы 2.1.33 имеем $N_G(R)A = G$. Так как $A = RN$, то

$$N_G(R)A = N_G(R)RN = N_G(R)N = G.$$

Поэтому из $N \subseteq \Phi(G)$ имеем, что R — нормальная подгруппа группы G . Так как N является ω -группой, то, согласно лемме 2.1.32, $N \in \mathfrak{X}$. Теперь из

$$A/R = NR/R \cong N/N \cap R \in \mathfrak{X}$$

и того, что R — \mathfrak{X} -проектор группы A , имеем $A = R$, т.е. $A \in \mathfrak{X}$. Теорема доказана.

Из результатов Шмида [109] и Э.Ф.Шмигирева [64] в любой группе с разрешимым \mathfrak{f} -корадикалом существует единственный класс сопряженных \mathfrak{f} -проекторов, если \mathfrak{f} — локальная формация.

2.1.34. Следствие [58]. Пусть \mathfrak{f} — нормально наследственная локальная формация. Тогда $\Delta^{\mathfrak{f}}(G) = A \times B$, где

$$A \in \mathfrak{f}, B \subseteq \Phi(G), \pi(B) \cap \pi(\mathfrak{f}) = \emptyset.$$

На основании теоремы Шунка из [110] для любого класса Шунка \mathfrak{X} в любой разрешимой группе существует единственный класс сопряженных \mathfrak{X} -проекторов.

2.1.35. Следствие. Пусть \mathfrak{X} — нормально наследственный разрешимый класс Шунка. Тогда для любой группы G справедливо равенство $\Delta^{\mathfrak{X}}(G) = A \times B$, где

$$A \in \mathfrak{X}, B \subseteq \Phi(G), \pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset.$$

2.1.36. Следствие. Пусть \mathfrak{X} — нормально наследственный класс Шунка, обладающий свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Пусть в любой группе $R \in \mathfrak{X}$ все \mathfrak{X} -проекторы сопряжены. Тогда $Z_{\mathfrak{X}}^*(G) \in \mathfrak{X}$ для любой группы G .

2.2. Пересечение \mathfrak{X} -абнормальных максимальных подгрупп, не принадлежащих \mathfrak{X}

В настоящем параграфе для класса Шунка \mathfrak{X} , обладающего свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, изучаются свойства Θ -подгруппы Фраттини в случае, когда Θ — m -функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все ее \mathfrak{X} -абнормальные максимальные подгруппы, не принадлежащие \mathfrak{X} . В дальнейшем Θ -подгруппу $\Phi_{\Theta}(G)$ группы G , соответствующую указанному m -функтору Θ , будем обозначать $\overline{\Delta}^{\mathfrak{X}}(G)$.

2.2.1. Лемма. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, обладающий свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Пусть группа G не принадлежит классу \mathfrak{X} и каждая \mathfrak{X} -абнормальная максимальная подгруппа группы G принадлежит \mathfrak{X} . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $N/N \cap \Phi(G)$ — \mathfrak{X} -эксцентральный главный фактор группы G для любой \mathfrak{X} -корадикальной подгруппы N группы G ;

2) $\pi(N) = \pi(N/N \cap \Phi(G))$ для любой \mathfrak{X} -корадикальной подгруппы N группы G .

Доказательство. Пусть $N \in G^*$. Так как $\mathfrak{X} = E_{\Phi}\mathfrak{X}$ и $G \notin \mathfrak{X}$, то $N \neq 1$ и $N \not\subseteq \Phi(G)$. Пусть N/N — главный фактор группы G . Предположим, что N не содержится в $\Phi(G)$. Тогда для некоторой максимальной подгруппы M группы G имеем $NM = G$. В частности, $NM = G$. Ввиду следствия 2.1.19 подгруппа M \mathfrak{X} -абнормальна. Значит, по условию леммы подгруппа M принадлежит классу \mathfrak{X} . Поэтому

$$G/N = MN/N \simeq M/M \cap N \in \mathfrak{X},$$

откуда следует, что $N \subseteq N$, что невозможно. Поэтому $N \subseteq \Phi(G)$. Так как по условию $\mathfrak{X} = E_{\Phi}\mathfrak{X}$ фактор N/N является нефраттиниевым, то он не покрывается некоторой максимальной подгруппой M . Ввиду следствия 2.1.19 подгруппа M \mathfrak{X} -абнормальна. Но тогда на основании теоремы 2.1.7 главный фактор $N/N \cap \Phi(G)$ является \mathfrak{X} -эксцентральным.

Допустим, что

$$\pi(N/N \cap \Phi(G)) \subset \pi(N).$$

Тогда найдется хотя бы одно простое число

$$p \in \pi(N) \setminus \pi(N/N \cap \Phi(G)).$$

В этом случае факторгруппа $N/N \cap \Phi(G)$ является p -разложимой. Согласно лемме 4.4 из [59], p -разложимой является и сама подгруппа N , т.е. $N = P \times Q$, где P — силовская p -подгруппа N . Ввиду выбора числа p подгруппа P содержится в $\Phi(G)$. Но тогда Q не содержится в $\Phi(G)$. Значит, в G найдется такая максимальная подгруппа R , что $RQ = G$. Так как $RN = G$, то на основании следствия 2.1.19 подгруппа R является \mathfrak{X} -абнормальной и по условию леммы $R \in \mathfrak{X}$. Поэтому

$$G/Q \simeq R/R \cap Q \in \mathfrak{X},$$

откуда $N \subseteq Q$, что невозможно. Лемма доказана.

Аналогичным образом доказывается следующая лемма.

2.2.2. Лемма. Пусть \mathfrak{f} — непустая формация $G^{\mathfrak{f}} \not\subseteq \Phi(G)$ и каждая \mathfrak{f} -абнормальная максимальная подгруппа группы G принадлежит \mathfrak{f} . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $G^{\mathfrak{f}}/G^{\mathfrak{f}} \cap \Phi(G)$ — \mathfrak{f} -эксцентральный главный фактор группы G ;

2) $\pi(G^{\mathfrak{f}}) = \pi(G^{\mathfrak{f}}/G^{\mathfrak{f}} \cap \Phi(G))$.

2.2.3. Теорема. Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, обладающий свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq P_1 \cup P_2$. Пусть группа G не принадлежит классу \mathfrak{X} . Тогда выполняется одно из следующих двух утверждений:

1) всякая \mathfrak{X} -абнормальная максимальная подгруппа группы G принадлежит \mathfrak{X} и $N/N \cap \Phi(G)$ — \mathfrak{X} -эксцентральный главный фактор группы G для любой \mathfrak{X} -корадикальной подгруппы N группы G ;

2) G обладает \mathfrak{X} -абнормальными максимальными подгруппами, не принадлежащими \mathfrak{X} , причем $\bar{\Delta}^{\mathfrak{X}}(G) = \Delta^{\mathfrak{X}}(G)$.

Доказательство. Утверждение 1) теоремы прямо следует из леммы 2.2.1.

Пусть группа G обладает \mathfrak{X} -абнормальными максимальными подгруппами, не принадлежащими \mathfrak{X} . Очевидно,

$$\Phi(G) \subseteq \Delta^{\mathfrak{X}}(G) \subseteq \bar{\Delta}^{\mathfrak{X}}(G).$$

Если $\bar{\Delta}^{\mathfrak{X}}(G) \subseteq \Phi(G)$, то утверждение 2) верно. Пусть $\bar{\Delta}^{\mathfrak{X}}(G)$ не входит в $\Phi(G)$. Тогда найдется максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = \bar{\Delta}^{\mathfrak{X}}(G)M$. Если $M \in \mathfrak{X}$, то $G/\bar{\Delta}^{\mathfrak{X}}(G) \in \mathfrak{X}$. Тогда найдется \mathfrak{X} -корадикальная подгруппа $T \in G^*$ такая, что $T \subseteq \bar{\Delta}^{\mathfrak{X}}(G)$. Если S — \mathfrak{X} -абнормальная максимальная подгруппа группы G , не принадлежащая \mathfrak{X} , то $T \subseteq \bar{\Delta}^{\mathfrak{X}}(G) \subseteq S$, что невозможно ввиду следствия 2.1.19. Значит, $M \notin \mathfrak{X}$. Отсюда следует, что M — \mathfrak{X} -нормальная максимальная подгруппа группы G .

Итак, любая максимальная подгруппа, не содержащая $\bar{\Delta}^{\mathfrak{X}}(G)$, является \mathfrak{X} -нормальной, откуда следует, что $\bar{\Delta}^{\mathfrak{X}}(G) \subseteq \Delta^{\mathfrak{X}}(G)$. Следовательно, $\bar{\Delta}^{\mathfrak{X}}(G) = \Delta^{\mathfrak{X}}(G)$. Теорема доказана.

2.2.4. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — непустая формация и \mathfrak{f} -корадикал $G^{\mathfrak{f}}$ группы G не входит в $\Phi(G)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

1) всякая \mathfrak{f} -абнормальная максимальная подгруппа группы G принадлежит \mathfrak{f} и $G^{\mathfrak{f}}/G^{\mathfrak{f}} \cap \Phi(G)$ — \mathfrak{f} -эксцентральный главный фактор группы G ;

2) G обладает \mathfrak{f} -абнормальными максимальными подгруппами, не принадлежащими \mathfrak{f} , причем $\bar{\Delta}^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G)$.

Доказательство. Утверждение 1) прямо следует из леммы 2.2.2.

Пусть \mathfrak{X} — класс Шунка, индуцированный формацией \mathfrak{f} . Тогда ввиду леммы 1.2.1 для любой группы G множества ее \mathfrak{X} -абнормальных и \mathfrak{f} -абнормальных максимальных подгрупп совпадают. Отсюда, в частности, следует, что

$$\Delta^{\mathfrak{X}}(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G) \text{ и } \bar{\Delta}^{\mathfrak{X}}(G) = \bar{\Delta}^{\mathfrak{f}}(G).$$

Теперь остается применить теорему 2.2.3.

2.2.5. Замечание. Любая абнормальная подгруппа группы G содержится в некоторой ненормальной максимальной подгруппе группы G . Действительно, допустим, что подгруппа H абнормальна в G и содержится в нормальной максимальной подгруппе M группы G . Тогда из абнормальности H в G всегда из $g \in G$ следует, что $g \in \langle H, H^g \rangle$. С другой стороны, для элемента $g \notin M$ имеем

$$g \in \langle H, H^g \rangle \langle M, M^g \rangle = M.$$

Противоречие.

Роуз в работе [107] показал, что если все абнормальные подгруппы группы G нильпотентны, то группа G разрешима. Поэтому, если в группе G все ненормальные максимальные подгруппы нильпотентны, то группа разрешима.

Отметим еще, что максимальная подгруппа группы \mathfrak{N} -абнормальна (\mathfrak{N} — класс всех нильпотентных групп) тогда и только тогда, когда она не является нормальной в G . Поэтому из теоремы 2.2.3 с учетом замечания 2.2.5 имеем следствие.

2.2.6. Следствие. В ненильпотентной группе G выполняется одно из следующих утверждений:

1) нильпотентный корадикал G^* группы G примарен, $G^*/G^* \cap \Phi(G)$ — эксцентральный главный фактор группы G ;

2) пересечение всех нильпотентных ненормальных максимальных подгрупп группы G нильпотентно и совпадает с пересечением всех ненормальных максимальных в G подгрупп.

В случае, когда \mathfrak{f} — локальная нормально наследственная формация, теорема 2.2.3 может быть значительно уточнена. Обозначим через $\Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G)$ пересечение всех \mathfrak{f} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , обладающих некоторым свойством α , сохраняющимся при действии всех автоморфизмов группы G . Если же в группе G указанные максимальные подгруппы отсутствуют, то полагаем $\Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G) = G$. На языке m -функторов это означает, что $\Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G) = \Phi_\Theta(G)$, где Θ — m -функтор, выделяющий в каждой группе G саму группу и все ее \mathfrak{f} -абнормальные максимальные подгруппы, обладающие свойством α . Отметим, что Θ мы можем рассматривать как пересечение \mathfrak{f} -абнормального m -функтора и функтора, выделяющего в каждой группе саму группу и все ее максимальные подгруппы, обладающие свойством α .

2.2.7. Лемма. Пусть группа G не принадлежит локальной формации \mathfrak{f} . Если всякая \mathfrak{f} -абнормальная максимальная подгруппа группы G , не обладающая свойством α , принадлежит \mathfrak{f} , то выполняется одно из следующих условий:

$$1) \Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G) = G \text{ и } \pi(G^\mathfrak{f}) = \pi(G^\mathfrak{f}/G^\mathfrak{f} \cap \Phi(G)),$$

где $G^\mathfrak{f}/G^\mathfrak{f} \cap \Phi(G)$ — \mathfrak{f} -эксцентральный главный фактор группы G ;

$$2) \Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G) \neq G, \bar{\Delta}^{\mathfrak{f}}(G) = G, \Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G)$$

$$\text{и } \pi(G^\mathfrak{f}) = \pi(G^\mathfrak{f}/G^\mathfrak{f} \cap \Phi(G)),$$

где $G^\mathfrak{f}/G^\mathfrak{f} \cap \Phi(G)$ — \mathfrak{f} -эксцентральный главный фактор группы G ;

$$3) \Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G) \neq G, \bar{\Delta}^{\mathfrak{f}}(G) \neq G \text{ и } \Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G) = \bar{\Delta}^{\mathfrak{f}}(G).$$

Доказательство. Пусть в группе G все максимальные подгруппы \mathfrak{f} -нормальны. Так как \mathfrak{f} — насыщенная формация и $G^\mathfrak{f} \subseteq \Phi(G)$, то $G \in \mathfrak{f}$, что противоречит условию леммы.

Значит, в группе G существуют \mathfrak{f} -абнормальные максимальные подгруппы. Если каждая \mathfrak{f} -абнормальная максимальная подгруппа группы G не обладает свойством α , т.е. $\Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G) = G$, то по условию леммы она принадлежит формации \mathfrak{f} . Ввиду леммы 2.2.1 в этом случае получаем, что

$$\pi(G^{\mathfrak{f}}) = \pi(G^{\mathfrak{f}}/G^{\mathfrak{f}} \cap \Phi(G)),$$

где $G^{\mathfrak{f}}/G^{\mathfrak{f}} \cap \Phi(G)$ — \mathfrak{f} -эксцентральный главный фактор группы G . Таким образом, при $\Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G) = G$ лемма верна.

Поэтому можно предположить, что в группе G существуют \mathfrak{f} -абнормальные максимальные подгруппы, обладающие свойством α , т.е. $\Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G) \neq G$. Покажем, что $\Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G)$. Если $\Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G) = \Phi(G)$, то $\Delta^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G)$, так как

$$\Phi(G) \subseteq \Delta^{\mathfrak{f}}(G) \subseteq \Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G).$$

Пусть подгруппа $\Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G)$ не совпадает с $\Phi(G)$. Тогда в группе G найдется такая максимальная подгруппа M , что $G = M\Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G)$. Если M — \mathfrak{f} -абнормальная максимальная в группе G подгруппа, то она не обладает свойством α , так как $\Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G)$ не содержится в M . Тогда по условию $M \in \mathfrak{f}$ и $G/\Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f}$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{f}} \subseteq \Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G)$, а значит, $G^{\mathfrak{f}}$ содержится в некоторых \mathfrak{f} -абнормальных максимальных подгруппах, что невозможно. Таким образом, подгруппа M является \mathfrak{f} -нормальной максимальной подгруппой группы G . Следовательно, $\Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G)$ содержится в любой \mathfrak{f} -абнормальной максимальной подгруппе группы G , т.е. $\Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G) \subseteq \Delta^{\mathfrak{f}}(G)$. Но $\Delta^{\mathfrak{f}}(G) \subseteq \Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G)$. Следовательно, $\Delta_\alpha^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G)$.

Если все \mathfrak{f} -абнормальные максимальные подгруппы группы G , обладающие свойством α , принадлежат формации \mathfrak{f} , то в группе G все \mathfrak{f} -абнормальные максимальные подгруппы принадлежат \mathfrak{f} . По лемме 2.2.1 в этом случае получаем, что

$$\pi(G^{\mathfrak{f}}) = \pi(G^{\mathfrak{f}}/G^{\mathfrak{f}} \cap \Phi(G))$$

и $G^f/G^f \cap \Phi(G)$ — f -эксцентральный главный фактор группы G .

Поэтому можем считать, что в группе G существуют f -абнормальные максимальные подгруппы, обладающие свойством α , которые не принадлежат формации f . На основании следствия 2.2.4 тогда имеем, что $\Delta^f(G) = \bar{\Delta}^f(G)$. Так как $\Delta^f(G) = \Delta_\alpha^f(G)$, то тем самым лемма доказана.

2.2.8. Следствие. Пусть группа G не принадлежит локальной нормально наследственной формации f , содержащей все нильпотентные группы. Если каждая f -абнормальная максимальная подгруппа группы G , не обладающая свойством α , принадлежит f , то выполняется одно из следующих утверждений:

$$1) \Delta_\alpha^f(G) = G \text{ и } \pi(G^f) = \pi(G^f/G^f \cap \Phi(G)),$$

где $G^f/G^f \cap \Phi(G)$ — f -эксцентральный главный фактор группы G ;

$$2) \Delta_\alpha^f(G) \neq G, \bar{\Delta}^f(G) = G, \Delta_\alpha^f(G) = \bar{\Delta}^f(G) \in f \\ \text{и } \pi(G^f) = \pi(G^f/G^f \cap \Phi(G)),$$

где $G^f/G^f \cap \Phi(G)$ — f -эксцентральный главный фактор группы G ;

$$3) \Delta_\alpha^f(G) \neq G, \bar{\Delta}^f(G) \neq G \\ \text{и } \Delta_\alpha^f(G) = \Delta^f(G) = \bar{\Delta}^f(G) \in f.$$

Пусть \mathcal{X} — некоторый класс групп и Θ — \mathcal{X} -абнормальный m -функтор. Пусть Θ_2 — m -функтор, индуцированный полугруппой индексов Гашюца $\cdot/\cdot = N \setminus P$. Пусть Θ_3 — m -функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все ее максимальные подгруппы, которые не принадлежат классу \mathcal{X} . Тогда $\Theta_1 \cap \Theta_2 \cap \Theta_3$ — m -функтор, выделяющий в группе саму группу и все ее \mathcal{X} -абнормальные максимальные подгруппы составного индекса, не принадлежащие \mathcal{X} . Обобщенную подгруппу Фраттини $\Phi_{\Theta_1 \cap \Theta_2 \cap \Theta_3}(G)$ группы G будем в дальнейшем обозначать через $\bar{\Delta}_f^f(G)$.

Если Θ_4 — дополнительный к Θ_2 m -функтор, то $\Theta_1 \cap \Theta_4$ — m -функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все ее f -абнормальные максимальные подгруппы простого индекса. Далее подгруппу $\Phi_{\Theta_1 \cap \Theta_4}(G)$ будем обозначать через $\Delta_p^f(G)$.

2.2.9. Теорема. Пусть группа G не принадлежит локальной нормально наследственной формации \mathfrak{f} , содержащей все нильпотентные группы. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

1) каждая \mathfrak{f} -абнормальная максимальная подгруппа группы G имеет простой индекс и $\Delta_p^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f}$;

2) каждая \mathfrak{f} -абнормальная максимальная подгруппа составного индекса принадлежит формации \mathfrak{f} , причем либо

$$\pi(G^{\mathfrak{f}}) = \pi(G^{\mathfrak{f}}/G^{\mathfrak{f}} \cap \Phi(G)),$$

где $G^{\mathfrak{f}}/G^{\mathfrak{f}} \cap \Phi(G)$ — \mathfrak{f} -эксцентральный главный фактор группы G , и любая \mathfrak{f} -абнормальная максимальная подгруппа группы G содержится в \mathfrak{f} , либо

$$\Delta_p^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f};$$

3) в группе G не существует максимальных подгрупп, принадлежащих формации \mathfrak{f} , и $\Delta^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f}$;

4) $\overline{\Delta}_2^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f}$.

Доказательство. Если в группе G все максимальные подгруппы \mathfrak{f} -нормальные, то \mathfrak{f} -корадикал $G^{\mathfrak{f}}$ группы G содержится в $\Phi(G)$. Так как \mathfrak{f} — локальная формация, то $G \in \mathfrak{f}$, что противоречит условию теоремы.

Значит, в группе G существуют \mathfrak{f} -абнормальные максимальные подгруппы. Если в группе все \mathfrak{f} -абнормальные максимальные подгруппы имеют простой индекс, то $\Delta^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta_p^{\mathfrak{f}}(G)$. Ввиду следствия 2.1.34 имеем, что $\Delta_p^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f}$.

Поэтому в группе G найдется хотя бы одна \mathfrak{f} -абнормальная максимальная подгруппа составного индекса.

Предположим, что все \mathfrak{f} -абнормальные максимальные подгруппы составного индекса принадлежат \mathfrak{f} . Пусть α есть свойство быть подгруппой простого индекса. Тогда имеем, что в группе G всякая \mathfrak{f} -абнормальная максимальная подгруппа, не обладающая свойством α , принадлежит формации \mathfrak{f} . Используя следствие 2.2.8, получаем второе утверждение теоремы.

Следовательно, в группе G существуют \mathfrak{f} -абнормальные максимальные подгруппы составного индекса, не принадлежащие \mathfrak{f} . Возможны два случая: либо $\bar{\Delta}_2^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f}$, либо $\bar{\Delta}_2^{\mathfrak{f}}(G) \notin \mathfrak{f}$.

Пусть $\bar{\Delta}_2^{\mathfrak{f}}(G)$ не содержится в \mathfrak{f} . Покажем, что в группе G не существует максимальных подгрупп, принадлежащих формации \mathfrak{f} . Пусть H — максимальная подгруппа, принадлежащая \mathfrak{f} . Если $\bar{\Delta}_2^{\mathfrak{f}}(G) \subseteq H$, то $\bar{\Delta}_2^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f}$, так как \mathfrak{f} — формация, замкнутая относительно взятия нормальных подгрупп. Пришли к противоречию с тем, что $\bar{\Delta}_2^{\mathfrak{f}}(G)$ не содержится в \mathfrak{f} . Значит, подгруппа $\bar{\Delta}_2^{\mathfrak{f}}(G)$ не содержится в H . Так как $H \in \mathfrak{f}$, то $G/\bar{\Delta}_2^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f}$. Отсюда всякая максимальная подгруппа группы G , содержащая $\bar{\Delta}_2^{\mathfrak{f}}(G)$, является \mathfrak{f} -нормальной. Получили противоречие с тем, что подгруппа $\bar{\Delta}_2^{\mathfrak{f}}(G)$ содержится в \mathfrak{f} -абнормальных максимальных подгруппах составного индекса. Следовательно, в группе не существует максимальных подгрупп, принадлежащих формации \mathfrak{f} . Значит,

$$\Delta^{\mathfrak{f}}(G) \cong \bar{\Delta}^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f}.$$

Теорема доказана.

2.2.10. Следствие. В любой несверхразрешимой группе выполняется одно из условий:

- 1) всякая максимальная подгруппа составного индекса сверхразрешима;
- 2) пересечение несверхразрешимых максимальных подгрупп составного индекса сверхразрешимо.

Доказательство. Положим в теореме, что \mathfrak{f} — формация сверхразрешимых групп. Тогда замечаем, что всякая \mathfrak{f} -нормальная максимальная подгруппа имеет в группе простой индекс, а всякая \mathfrak{f} -абнормальная — как простой, так и составной. По утверждению 1) теоремы получаем, что в группе G все максимальные подгруппы имеют простой индекс. Следовательно, G — сверхразрешимая группа [99], что противоречит условию.

По утверждению 2) теоремы имеем, что всякая максимальная подгруппа составного индекса сверхразрешима, так как всякая

максимальная подгруппа составного индекса является \mathfrak{f} -абнормальной.

Используя утверждение 4) теоремы, получаем сверхразрешимость пересечения Δ максимальных подгрупп составного индекса, не принадлежащих формации \mathfrak{f} .

Так как $\Delta \neq \Phi(G)$, то в группе G существует максимальная подгруппа M такая, что $G = M\Delta$. По утверждению 3) теоремы подгруппа M не принадлежит формации \mathfrak{f} . Если она \mathfrak{f} -нормальна, то имеет в группе G простой индекс. Если же она \mathfrak{f} -абнормальна, то, так как подгруппа Δ не принадлежит M , подгруппа M имеет в G простой индекс. Следовательно, всякая максимальная подгруппа группы G , не содержащая Δ , имеет простой индекс. Следовательно, подгруппа Δ сверхразрешима [57].

Следствие доказано.

2.2.11. Следствие. В любой несверхразрешимой группе выполняется одно из следующих условий:

1) всякая максимальная подгруппа составного индекса нильпотентна, причем либо группа разрешима, либо пересечение ненормальных максимальных подгрупп простого индекса совпадает как с пересечением ненормальных ненильпотентных максимальных подгрупп, так и с пересечением ненормальных максимальных подгрупп;

2) всякая максимальная подгруппа ненильпотентна;

3) пересечение ненильпотентных максимальных подгрупп составного индекса нильпотентно.

Доказательство. Пусть \mathfrak{f} — формация нильпотентных групп. Тогда множество \mathfrak{f} -абнормальных максимальных подгрупп в группе совпадает с множеством ненормальных максимальных подгрупп. В этом случае учитываем, что если в группе G все максимальные подгруппы имеют простой индекс, то G — сверхразрешимая группа [99] и группа G разрешима, если в ней всякая ненормальная максимальная подгруппа нильпотентна [107]. С помощью теоремы 2.2.9 получаем утверждение следствия.

2.3. Пересечение \mathcal{f} -абнормальных максимальных подгрупп заданных индексов

Пусть \mathcal{f} — некоторый непустой класс, Θ_1 — \mathcal{f} -абнормальный m -функтор. Пусть $\Theta_2 = \Theta_\pi$ — m -функтор, сопоставляющий каждой группе саму группу и все ее максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на числа из π . В данном параграфе исследуется строение обобщенной подгруппы Фраттини $\Phi_{\Theta_1 \cap \Theta_2}(G)$ группы G . В дальнейшем эту подгруппу будем обозначать через $\Delta_\pi^{\mathcal{f}}(G)$, а подгруппу $\Phi_{\Theta_2}(G)$ — через $\Phi_\pi(G)$.

Напомним, что группа G обладает свойством C_π , если в группе существует, по крайней мере, одна холловская π -подгруппа и любые две такие подгруппы сопряжены.

2.3.1. Лемма. Если в группе G подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π , то

$$\Phi_\pi(G)/O_\pi(G) = \Phi(G/O_\pi(G)).$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что $O_\pi(G) \subseteq \Phi_\pi(G)$. Обозначим через K холловскую π -подгруппу из $\Phi_\pi(G)$. Так как $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π то по обобщенной лемме Фраттини $G = \Phi_\pi(G)N_G(K)$. Предположим, что $N_G(K)$ — собственная подгруппа группы G . Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $\Phi_\pi(G) \not\subseteq M$ и $N_G(K) \subseteq M$. Ясно, что

$$|G : N_G(K)| = |\Phi_\pi(G) : \Phi_\pi(G) \cap N_G(K)|$$

не делится на числа из π . Следовательно, $\Phi_\pi(G) \subseteq M$. Получили противоречие. Итак, K — нормальная подгруппа группы G . Отсюда следует, что $|\Phi_\pi(G)/O_\pi(G)|$ — π' -число. Очевидно, что

$$\Phi(G/O_\pi(G)) \subseteq \Phi_\pi(G)/O_\pi(G).$$

Если

$$\Phi(G/O_\pi(G)) \subset \Phi_\pi(G)/O_\pi(G),$$

то в G найдется максимальная подгруппа H такая, что $O_\pi(G) \subseteq H$ и $H\Phi_\pi(G) = G$. Следовательно,

$$|G : H| = |\Phi_\pi(G) : \Phi_\pi(G) \cap H|$$

не делится на числа из π . Отсюда получаем, что $\Phi_\pi(G) \subseteq H$, а это противоречит предположению. Значит,

$$\Phi(G/O_\pi(G)) = \Phi_\pi(G)/O_\pi(G).$$

Лемма доказана.

Согласно теореме Силова, из леммы 2.3.1 вытекает известный результат [78]

$$\Phi_p(G)/O_p(G) = \Phi(G/O_p(G))$$

для любой группы G .

Следующая лемма является частным случаем леммы 1.1.9.

2.3.2. Лемма. Пусть N — нормальная подгруппа группы G . Если $N \subseteq \Phi_\pi(G)$, то

$$\Phi_\pi(G)/N = \Phi_\pi(G/N).$$

Если $N \subseteq \Delta_\pi^f(G)$, то

$$\Delta_\pi^f(G)/N = \Delta_\pi^f(G/N).$$

2.3.3. Теорема. Пусть f — непустая формация. Если в группе G подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π , то

$$\Delta_\pi^f(G)/O_\pi(G) = \Delta^f(G/O_\pi(G)).$$

Доказательство. Пусть $O_\pi(G) \neq 1$. Так как

$$\Phi_\pi(G)/O_\pi(G) = \Phi(G/O_\pi(G)),$$

то теорема для факторгруппы $G/O_\pi(G)$ верна по индукции. Следовательно,

$$\Delta_\pi^f(G/O_\pi(G))/O_\pi(G/O_\pi(G)) = \Delta^f(G/O_\pi(G)/O_\pi(G/O_\pi(G))).$$

Так как $O_\pi(G/O_\pi(G)) = 1$ и

$$\Delta_\pi^f(G/O_\pi(G)) = \Delta_\pi^f(G)/O_\pi(G),$$

то

$$\Delta_\pi^f(G)/O_\pi(G) = \Delta^f(G/O_\pi(G)).$$

Пусть теперь $O_\pi(G) = 1$. Тогда по лемме 2.3.1 $\Phi_\pi(G) = \Phi(G)$.
Значит,

$$\Delta_\pi^f(G) \cap G^f \subseteq \Phi_\pi(G) = \Phi(G).$$

Пусть K/N — главный фактор группы G , причем

$$\Phi(G) \subseteq N \subseteq K \subseteq \Delta_\pi^f(G).$$

Так как

$$K \cap G^f \subseteq \Delta_\pi^f \cap G^f \subseteq \Phi(G),$$

то

$$N = N(K \cap G^f) = K \cap NG^f.$$

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$KG^f/NG^f \simeq K/K \cap NG^f = K/N(K \cap G^f) = K/N.$$

Но $G/NG^f \in \mathcal{F}$, поэтому, согласно лемме 3.32 из [61], главный фактор KG^f/NG^f является \mathcal{F} -центральным в G . Следовательно, ввиду лемм 3.27 и 3.28 из [61] главный фактор K/N также является \mathcal{F} -центральным в G . Таким образом, $\Delta_\pi^f(G)/\Phi(G)$ — \mathcal{F} -гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Поэтому

$$\Delta_\pi^f(G)/\Phi(G) \subseteq Z_\infty^{\mathcal{F}}(G/\Phi(G)).$$

С другой стороны, на основании леммы 2.1.14

$$Z_\infty^{\mathcal{F}}(G/\Phi(G)) \subseteq (G)/\Phi(G).$$

Значит,

$$\Delta_\pi^f(G)/\Phi(G) = Z_\infty^{\mathcal{F}}(G/\Phi(G)).$$

Ввиду следствия 2.1.26

$$Z_\infty^{\mathcal{F}}(G/\Phi(G)) = \Delta^{\mathcal{F}}(G)/\Phi(G).$$

Следовательно,

$$\Delta_\pi^f(G)/\Phi(G) = \Delta^{\mathcal{F}}(G)/\Phi(G),$$

т.е. $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G)$. Теорема доказана.

Из данного результата с помощью следствия 2.1.34 можно получить следующее следствие.

2.3.4. Следствие. Если \mathfrak{f} — локальная нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, а подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} , то $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{f}}(G)/O_{\pi}(G) \in \mathfrak{f}$.

Если $\pi = \{p\}$, где p — простое число, то подгруппу $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{f}}(G)$ будем обозначать через $\Delta_p^{\mathfrak{f}}(G)$. Таким образом, $\Delta_p^{\mathfrak{f}}(G)$ — пересечение всех тех \mathfrak{f} -абнормальных максимальных подгрупп конечной группы G , индексы которых не делятся на данное простое число p (если каждая максимальная подгруппа из G либо \mathfrak{f} -нормальна, либо \mathfrak{f} -абнормальна и имеет индекс в G , делящийся на p , то полагаем $\Delta_p^{\mathfrak{f}}(G) = G$).

Ввиду теоремы Силова и теоремы 2.3.3 справедливы следующие утверждения.

2.3.5. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — непустая формация. Тогда

$$\Delta_p^{\mathfrak{f}}(G)/O_p(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G/O_p(G))$$

для любой группы G .

2.3.6. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — локальная нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы. Тогда $\Delta_p^{\mathfrak{f}}(G)/O_p(G) \in \mathfrak{f}$ для любой группы G .

2.3.7. Теорема. Пусть p и q — различные простые числа. Тогда для любой формации \mathfrak{f} и любой группы G справедливо равенство

$$\Delta_p^{\mathfrak{f}}(G) \cap \Delta_q^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G).$$

Доказательство. Очевидно,

$$\Delta^{\mathfrak{f}}(G) \subseteq \Delta_p^{\mathfrak{f}}(G) \cap \Delta_q^{\mathfrak{f}}(G).$$

Пусть

$$\Delta^{\mathfrak{f}}(G) \subset K = \Delta_p^{\mathfrak{f}}(G) \cap \Delta_q^{\mathfrak{f}}(G).$$

Тогда в G найдется \mathfrak{f} -абнормальная максимальная подгруппа M такая, что $G = MK$. Если $|G : M|$ не делится на $t \in \{p, q\}$, то

$\Delta^f(G) \subseteq M$. Следовательно, $KM = M$, что невозможно. Значит, индекс M в G делится одновременно на p и q .

Пусть $O_p(G) = 1$. Тогда ввиду следствия 2.3.5 имеем равенство $\Delta_p^f(G) = \Delta^f(G)$. Поэтому $K \subseteq M$, что противоречит определению подгруппы K . Значит, $O_p(G) \neq 1$. Если $O_p(G)M = G$, то $|G : M|$ делится на p . Противоречие. Поэтому $O_p(G) \subseteq M$. На основании следствия 2.3.5 имеем

$$\Delta_p^f(G)/O_p(G) = \Delta^f(G/O_p(G)) \subseteq M/O_p(G).$$

Отсюда следует, что $\Delta_p^f(G) \subseteq M$. Снова пришли к противоречию. Таким образом, остается заключить, что

$$\Delta^f(G) = \Delta_p^f(G) \cap \Delta_q^f(G).$$

Теорема доказана.

Обозначим далее через $\bar{\Delta}_\pi^f(G)$ пересечение всех f -абнормальных максимальных подгрупп группы G , не принадлежащих формации f , индекс каждой из которых не делится на простые числа из π . В случае отсутствия в группе G указанных максимальных подгрупп полагаем эти пересечения равными самой группе G .

Следующая лемма доказывается непосредственной проверкой.

2.3.8. Лемма. Пусть f — непустая формация, N — нормальная подгруппа группы G . Если $N \subseteq \bar{\Delta}_\pi^f(G)$ и $\bar{\Delta}_\pi^f(G/N) \neq G/N$, то

$$\bar{\Delta}_\pi^f(G)/N = \bar{\Delta}_\pi^f(G/N).$$

2.3.9. Теорема. Пусть f — непустая формация и $\bar{\Delta}_\pi^f(G) \neq G$. Если $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_{π} то

$$\bar{\Delta}_\pi^f(G)/O_\pi(G) = \Delta^f(G/O_\pi(G)).$$

Доказательство. Вначале покажем, что

$$K = \bar{\Delta}_\pi^f(G) \cap G^f \subseteq \Phi_\pi(G).$$

Пусть $K \not\subseteq \Phi_\pi(G)$. Тогда в G найдется такая максимальная подгруппа M , индекс которой не делится на простое число из π и $G = KM$. Ясно, что M не является \mathfrak{f} -нормальной максимальной подгруппой. Если $M \notin \mathfrak{f}$, то $K \subseteq \overline{\Delta}_\pi^\mathfrak{f}(G) \subseteq M$, что невозможно. Следовательно, $M \in \mathfrak{f}$. Отсюда

$$G/K = MK/K \simeq M/M \cap K \in \mathfrak{f},$$

а это значит, что $G^\mathfrak{f} \subseteq K \subseteq \overline{\Delta}_\pi^\mathfrak{f}(G)$. Это противоречит существованию в группе G \mathfrak{f} -абнормальной максимальной подгруппы, индекс которой не делится на простые числа из π . Итак, $K \subseteq \Phi_\pi(G)$.

Пусть $O_\pi(G) \neq 1$. Тогда ввиду того что

$$\Phi_\pi(G)/O_\pi(G) = \Phi(G/O_\pi(G)),$$

получаем справедливость теоремы для группы $G/O_\pi(G)$ по индукции. Следовательно,

$$\overline{\Delta}_\pi^\mathfrak{f}(G/O_\pi(G))/O_\pi(G/O_\pi(G)) = \overline{\Delta}^\mathfrak{f}(G/O_\pi(G)/O_\pi(G/O_\pi(G))).$$

Так как $O_\pi(G/O_\pi(G)) = 1$, то

$$\overline{\Delta}_\pi^\mathfrak{f}(G/O_\pi(G)) = \overline{\Delta}^\mathfrak{f}(G/O_\pi(G)).$$

По лемме 2.3.8 получаем, что

$$\overline{\Delta}_\pi^\mathfrak{f}(G/O_\pi(G)) = \overline{\Delta}_\pi^\mathfrak{f}(G)/O_\pi(G).$$

Итак,

$$\overline{\Delta}_\pi^\mathfrak{f}(G)/O_\pi(G) = \overline{\Delta}^\mathfrak{f}(G/O_\pi(G)).$$

Пусть теперь $O_\pi(G) = 1$. Тогда

$$\overline{\Delta}_\pi^\mathfrak{f}(G) \cap G^\mathfrak{f} \subseteq \Phi_\pi(G) = \Phi(G).$$

Пусть K/N — главный фактор группы G , причем

$$\Phi(G) \subseteq N \subseteq K \subseteq \overline{\Delta}_\pi^\mathfrak{f}(G).$$

Так как

$$K \cap G^f \subseteq \bar{\Delta}_\pi^f(G) \cap G^f \subseteq \Phi(G),$$

то

$$N = N(K \cap G^f) = K \cap NG^f.$$

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$KG^f/NG^f \simeq K/K \cap NG^f = K/N(K \cap G^f) = K/N.$$

Так как $G/NG^f \in \mathcal{F}$, то, согласно лемме 3.32 из [61], главный фактор KG^f/NG^f является \mathcal{F} -центральным в G . Следовательно, ввиду лемм 3.27 и 3.28 из [61] главный фактор K/N также является \mathcal{F} -центральным в G . Таким образом, $\bar{\Delta}_\pi^f(G)/\Phi(G)$ — \mathcal{F} -гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Поэтому

$$\bar{\Delta}_\pi^f(G)/\Phi(G) \subseteq Z_{\infty}^f(G/\Phi(G)).$$

С другой стороны, на основании леммы 2.1.14

$$Z_{\infty}^f(G/\Phi(G)) \subseteq \bar{\Delta}_\pi^f(G)/\Phi(G).$$

Значит,

$$\bar{\Delta}_\pi^f(G)/\Phi(G) = Z_{\infty}^f(G/\Phi(G)).$$

Ввиду следствия 2.1.26

$$Z_{\infty}^f(G/\Phi(G)) = \bar{\Delta}^f(G)/\Phi(G).$$

Следовательно,

$$\bar{\Delta}_\pi^f(G)/\Phi(G) = \bar{\Delta}^f(G)/\Phi(G),$$

т.е. $\bar{\Delta}_\pi^f(G) = \bar{\Delta}^f(G)$. Теорема доказана.

2.3.10. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — локальная нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, и $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{f}}(G) \neq G$. Если подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π , то

$$\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{f}}(G)/O_\pi(G) \in \mathfrak{f}.$$

Так как в любой группе G подгруппа $\Phi_p(G)$ обладает свойством C_p , то при $\pi = \{p\}$ имеем следующий результат.

2.3.11. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — непустая формация и $\overline{\Delta}_p^{\mathfrak{f}}(G) \neq G$. Тогда

$$\overline{\Delta}_p^{\mathfrak{f}}(G)/O_p(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G/O_p(G))$$

для любой группы G .

2.3.12. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — локальная нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, и $\overline{\Delta}_p^{\mathfrak{f}}(G) \neq G$. Тогда

$$\overline{\Delta}_p^{\mathfrak{f}}(G)/O_p(G) \in \mathfrak{f}.$$

2.3.13. Следствие. Если в группе G существует ненормальная ненильпотентная максимальная подгруппа, индекс которой не делится на простое число p , то пересечение $\overline{\Delta}_p(G)$ всех таких подгрупп имеет следующее строение:

$$\overline{\Delta}_p(G) = [P]K,$$

где $(|P|, |K|) = 1$; P — p -группа; K — нильпотентная подгруппа.

В теоремах 2.3.3 и 2.3.9 используется тот факт, что подгруппа $\Phi(G)$ обладает свойством C_π . Следующий подход позволяет развить теоремы 2.3.3 и 2.3.9, отбросив указанное выше требование. В основе этого подхода лежат следующие понятия:

$\delta_\pi^{\mathfrak{f}}(G)$ — пересечение всех \mathfrak{f} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , содержащих $O_\pi(G)$;

$\overline{\delta}_\pi^{\mathfrak{f}}(G)$ — пересечение всех \mathfrak{f} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , содержащих $O_\pi(G)$ и не принадлежащих \mathfrak{f} ;

$\varphi_\pi(G)$ — пересечение всех максимальных подгрупп группы G , содержащих $O_\pi(G)$. В случае отсутствия максимальных подгрупп с нужными свойствами считаем, что пересечение равно G .

Установим простейшие свойства введенных в рассмотрение подгрупп.

2.3.14. Лемма. Пусть N — нормальная подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

$$\text{если } N \subseteq \varphi_\pi(G), \text{ то } \varphi_\pi(G)/N = \varphi_\pi(G/N);$$

$$\text{если } N \subseteq \varphi_\pi(G), \text{ то } \delta_\pi^f(G)/N = \delta_\pi^f(G/N);$$

$$\text{если } N \subseteq \varphi_\pi(G) \text{ и } \bar{\delta}_\pi^f(G)/N \neq G/N, \text{ то } \bar{\delta}_\pi^f(G)/N = \bar{\delta}_\pi^f(G/N).$$

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

2.3.15. Лемма. Пусть G — группа. Тогда $\varphi_\pi(G) \subseteq \Phi_\pi(G)$, $\varphi_\pi(G)$ — π -замкнутая подгруппа,

$$\varphi_\pi(G)/O_\pi(G) = \Phi(G/O_\pi(G));$$

если $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π , то $\Phi_\pi(G) = \varphi_\pi(G)$.

Доказательство. Так как всякая максимальная подгруппа π' -индекса в G содержит $O_\pi(G)$, то $\varphi_\pi(G) \subseteq \Phi_\pi(G)$.

Покажем, что подгруппа $\varphi_\pi(G)$ π -замкнута. Пусть $O_\pi(G)$ — неединичная подгруппа, N — минимальная нормальная подгруппа группы G , $N \subseteq O_\pi(G)$. По лемме 2.3.14 имеем

$$\varphi_\pi(G)/N = \varphi_\pi(G/N).$$

Для G/N утверждение теоремы верно по индукции.

Следовательно, группа $\varphi_\pi(G/N)$ — π -замкнута. Так как N — π -группа, то из π -замкнутости $\varphi_\pi(G)/N$ следует, что $\varphi_\pi(G)$ — π -замкнутая подгруппа.

Пусть теперь $O_\pi(G) = 1$. По определению подгруппы $\varphi_\pi(G)$ имеем в этом случае $\varphi_\pi(G) = \Phi(G)$, причем $\varphi_\pi(G)$ обладает единичной π -холловской подгруппой. Очевидно, $\varphi_\pi(G)$ — π -замкнутая группа, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что

$$\varphi_\pi(G)/O_\pi(G) = \Phi(G/O_\pi(G)).$$

Пусть M — максимальная подгруппа группы G и $O_\pi(G) \subseteq M$. Очевидно, $M/O_\pi(G)$ — максимальная подгруппа группы $G/O_\pi(G)$. Следовательно,

$$\Phi(G/O_\pi(G)) \subseteq \varphi_\pi(G)/O_\pi(G) = \varphi_\pi(G/O_\pi(G)).$$

С другой стороны, так как $O_\pi(G/O_\pi(G)) = 1$, то по определению

$$\varphi_\pi(G/O_\pi(G)) = \Phi(G/O_\pi(G)),$$

что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π . По лемме 2.3.1 имеем

$$\Phi_\pi(G)/O_\pi(G) = \Phi(G/O_\pi(G)) = \varphi_\pi(G)/O_\pi(G)$$

по ранее доказанному. Следовательно, $\Phi_\pi(G) = \varphi_\pi(G)$. Лемма доказана.

2.3.16. Теорема. Пусть \mathfrak{f} — локальная формация, G — группа. Тогда

$$\delta_\pi^{\mathfrak{f}}(G)/O_\pi(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G/O_\pi(G)).$$

Доказательство. Пусть M — максимальная подгруппа группы G , $O_\pi(G) \subseteq M$ и M \mathfrak{f} -абнормальна в G . Так как

$$(G/O_\pi(G))^{\mathfrak{f}} = G^{\mathfrak{f}}O_\pi(G)/O_\pi(G),$$

то $M/O_\pi(G)$ — максимальная \mathfrak{f} -абнормальная в $G/O_\pi(G)$ подгруппа. Таким образом,

$$\Delta^{\mathfrak{f}}(G/O_\pi(G)) \subseteq \delta_\pi^{\mathfrak{f}}(G/O_\pi(G)) = \delta_\pi^{\mathfrak{f}}(G)/O_\pi(G).$$

Обратно, если подгруппа $M/O_\pi(G)$ максимальна в $G/O_\pi(G)$ и \mathfrak{f} -абнормальна, то подгруппа M максимальна и \mathfrak{f} -абнормальна в G и содержит $O_\pi(G)$. Следовательно,

$$\delta_\pi^{\mathfrak{f}}(G/O_\pi(G)) = \delta_\pi^{\mathfrak{f}}(G)/O_\pi(G) \subseteq \Delta^{\mathfrak{f}}(G/O_\pi(G)).$$

Отсюда имеем

$$\delta_\pi^{\mathfrak{f}}(G)/O_\pi(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G/O_\pi(G)),$$

что и требовалось. Теорема доказана.

2.3.17. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — локальная формация, G — группа. Тогда если $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π , то $\delta_\pi^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{f}}(G)$.

Доказательство. По теоремам 2.3.3 и 2.3.16 имеем

$$\delta_\pi^{\mathfrak{f}}(G)/O_\pi(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G/O_\pi(G)) = \Delta_\pi^{\mathfrak{f}}(G)/O_\pi(G).$$

Следовательно, $\delta_\pi^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{f}}(G)$.

2.3.18. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — локальная формация, G — группа. Тогда

$$\delta_p^{\mathfrak{f}}(G) \cap \delta_q^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G)$$

для любых $p \neq q$.

Справедливость утверждения следует из справедливости теоремы Силова для $\Phi_p(G)$ и $\Phi_q(G)$, а также из следствия 2.3.17.

2.3.19. Теорема. Пусть \mathfrak{f} — локальная формация, G — конечная группа и $\bar{\delta}_\pi^{\mathfrak{f}}(G) \neq G$. Тогда

$$\bar{\delta}_\pi^{\mathfrak{f}}(G)/O_\pi(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G/O_\pi(G)).$$

Доказательство. Покажем, что

$$K = \delta_\pi^{\mathfrak{f}}(G) \cap G^{\mathfrak{f}} \subseteq \varphi_\pi(G).$$

Предположим противное. Тогда в G существует \mathfrak{f} -абнормальная максимальная подгруппа M такая, что $O_\pi(G) \subseteq M$ и $M \in \mathfrak{f}$, так как $M \bar{\delta}_\pi^{\mathfrak{f}}(G) = G$. Тогда

$$G/K = MK/K \simeq M/M \cap K \in \mathfrak{f}.$$

Следовательно, $G^{\mathfrak{f}} \subseteq K \subseteq \bar{\delta}_\pi^{\mathfrak{f}}(G)$, что противоречит существованию в G \mathfrak{f} -абнормальной максимальной подгруппы и определению $\bar{\delta}_\pi^{\mathfrak{f}}(G)$. Следовательно, $K \subseteq \varphi_\pi(G)$.

Пусть $O_\pi(G)$ — неединичная подгруппа. Ввиду того что

$$\varphi_\pi(G)/O_\pi(G) = \Phi(G/O_\pi(G)),$$

по индукции имеем

$$\overline{\delta}_\pi^{\mathfrak{f}}(G/O_\pi(G))/O_\pi(G/O_\pi(G)) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G/O_\pi(G))/O_\pi(G/O_\pi(G)).$$

Так как $O_\pi(G/O_\pi(G)) = 1$, то

$$\overline{\delta}_\pi^{\mathfrak{f}}(G/O_\pi(G)) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G/O_\pi(G)).$$

Из леммы 2.3.14

$$\overline{\delta}_\pi^{\mathfrak{f}}(G)/O_\pi(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G/O_\pi(G)).$$

Пусть теперь $O_\pi(G) = 1$. По определению подгруппы $\overline{\delta}_\pi^{\mathfrak{f}}(G)$ имеем $\overline{\delta}_\pi^{\mathfrak{f}}(G) = \overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{f}}(G)$, по определению подгруппы $\varphi_\pi(G)$:

$$\varphi_\pi(G) = \Phi_\pi(G) = \Phi(G).$$

Тогда из теоремы 2.3.9 получаем $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G)$. Следовательно, $\overline{\delta}_\pi^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G)$, что и требовалось. Теорема доказана.

2.3.20. Теорема. Пусть \mathfrak{f} — нормально наследственная локальная формация, G — группа, π — некоторое множество простых чисел. Тогда $\delta_\pi^{\mathfrak{f}}(G) = AB$, где $A/O_\pi(G) \in \mathfrak{f}$; $B \subseteq \varphi_\pi(G)$; $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{f}) \subseteq \pi$.

Доказательство. Рассмотрим факторгруппу $G/O_\pi(G)$.

По теореме 2.3.16

$$\delta_\pi^{\mathfrak{f}}(G)/O_\pi(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G/O_\pi(G)),$$

по лемме 2.3.15

$$\varphi_\pi(G)/O_\pi(G) = \Phi(G/O_\pi(G)).$$

Применяя к группе $\Delta^{\mathfrak{f}}(G/O_\pi(G))$ следствие 2.1.34, получаем

$$\Delta^{\mathfrak{f}}(G/O_\pi(G)) = (A/O_\pi(G))(B/O_\pi(G)),$$

где

$$A/O_\pi(G) \in \mathfrak{f}, \quad B/O_\pi(G) \subseteq \Phi(G/O_\pi(G));$$

$$\pi(B/O_\pi(G)) \cap \pi(\mathfrak{f}) = \emptyset.$$

Следовательно, $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{f}) \subseteq \pi$. Так как $\Phi(G/O_\pi(G)) = \varphi_\pi(G)/O_\pi(G)$, то $B \subseteq \varphi_\pi(G)$. Ввиду следствия 2.1.34 имеем, что $A \cap B = O_\pi(G)$, $A/O_\pi(G) \in \mathfrak{f}$. Так как $\delta_\pi^{\mathfrak{f}}(G)/O_\pi(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G/O_\pi(G))$, то $\delta_\pi^{\mathfrak{f}}(G) = AB$, что и требовалось доказать.

2.4. Подгруппы обобщенно фраттиниевых расширений групп

В настоящем параграфе исследуется поведение обобщенно субнормальных подгрупп в обобщенно фраттиниевых расширениях конечных групп.

Пусть \mathfrak{X} — непустой класс групп. Следуя [59,81], введем обозначения: $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \{p \mid p \in \mathbf{P} \text{ и } Z_p \in \mathfrak{X}\}$, $\pi(\mathfrak{X}) = \{p \mid p \in \mathbf{P} \text{ и } p \text{ делит } |G|, G \in \mathfrak{X}\}$.

Следующий результат хорошо известен в теории формаций конечных групп. Мы приведем его в обобщенном виде.

2.4.1. Теорема. Пусть \mathfrak{X} — непустой класс Шунка. Пусть в любой группе $R \in \mathfrak{X}$, где \mathfrak{N} — класс всех нильпотентных групп, все \mathfrak{X} -проекторы сопряжены. Пусть N — нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{X}$. Если $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{X})$, то подгруппа N представима в виде прямого произведения $N = A \times B$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $A \in \mathfrak{X}$;
- 2) $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{X}) = \emptyset$;
- 3) $B \subseteq \Phi(G)$.

Доказательство. Пусть $\pi = \pi(\mathfrak{X})$. Так как $N/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{X}$, то группа $N/N \cap \Phi(G)$ является π -группой. Согласно лемме 4.4 из [59], подгруппа представима в виде $N = A \times B$, где A — холловская π -подгруппа N ; $B \subseteq \Phi(G)$.

Покажем, что $A \in \mathfrak{X}$. Применим для этого индукцию по порядку группы G . Не ограничивая общности рассуждений, можем полагать, что $B = 1$, $\Phi(G) \neq 1$, и если K — минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в $\Phi(G)$, то $A/K \in \mathfrak{X}$. Так как класс Шунка замкнут относительно фраттиниевых расширений, то $\Phi(A) = 1$. Значит, $K \subseteq \Phi(A)$. Пусть H — добавление к K в A . Так как $H/H \cap K \simeq HK/K = A/K \in \mathfrak{X}$ и $H \cap K \subseteq \Phi(H)$, то $H \in \mathfrak{X}$.

Пусть F — \mathfrak{X} -максимальная подгруппа группы A , содержащая H . Ввиду леммы 2.1.31 подгруппа F является \mathfrak{X} -проектором группы A .

Так как $A \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$, то по условию теоремы все \mathfrak{X} -проекторы группы A сопряжены. Поэтому на основании леммы 2.1.33 имеем $N_G(F)A = G$. Так как $A = FK$, то

$$N_G(F)A = N_G(F)FK = N_G(F)K = G.$$

Поэтому из $K \subseteq \Phi(G)$ имеем, что F — нормальная подгруппа группы G . Так как K является π -группой, то на основании условия $\pi(\mathfrak{X}) = \text{Char}(\mathfrak{X})$ заключаем, что $K \in \mathfrak{X}$.

Теперь из того, что

$$A/F = KF/F \simeq K/K \cap F \in \mathfrak{X}$$

и F — \mathfrak{X} -проектор группы A , имеем $A = F$, т.е. $A \in \mathfrak{X}$. Теорема доказана.

Пусть \mathfrak{X} — локальная формация. Тогда выполняется условие $\pi(\mathfrak{X}) = \text{Char}(\mathfrak{X})$ (см., например, лемму 4.2 из [59]). Кроме того, из результатов Шмида [109] и Э.Ф. Шмигирева [64] в любой группе с разрешимым \mathfrak{X} -корадикалом существует единственный класс сопряженных \mathfrak{X} -проекторов. Поэтому теорема 2.4.1 включает в себя известный результат Л.А. Шеметкова [61].

2.4.2. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — некоторая локальная формация, N — нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{f}$. Тогда подгруппа N представима в виде прямого произведения $N = A \times B$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $A \in \mathfrak{f}$;
- 2) $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{f}) = \emptyset$;
- 3) $B \subseteq \Phi(G)$.

Согласно теореме Шунка [110], для любого класса Шунка \mathfrak{X} в любой разрешимой группе существует единственный класс сопряженных \mathfrak{X} -проекторов. Поэтому имеем

2.4.3. Следствие. Пусть \mathfrak{X} — разрешимый класс Шунка, N — нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{X}$. Если $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{X})$, то подгруппа N представима в виде прямого произведения $N = A \times B$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $A \in \mathfrak{X}$;
- 2) $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{X}) = \emptyset$;
- 3) $B \subseteq \Phi(G)$.

Ввиду леммы 2.1.32 любой нормально наследственный класс Шунка \mathfrak{X} обладает свойствами $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{X})$. Поэтому справедлив следующий результат.

2.4.4. Следствие. Пусть \mathfrak{X} — нормально наследственный разрешимый класс Шунка, N — нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{X}$. Тогда подгруппа N представима в виде прямого произведения $N = A \times B$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $A \in \mathfrak{X}$;
- 2) $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{X}) = \emptyset$;
- 3) $B \subseteq \Phi(G)$.

Пусть Θ — некоторый m -функтор, \mathfrak{X} — непустой класс групп, N — нормальная подгруппа группы G . В связи с теоремой 2.4.1 возникает вопрос: при каких Θ из $N/N \cap \Phi_{\Theta}(G) \in \mathfrak{X}$ следует, что подгруппа N факторизуема в виде $N = A \times B$, где $A \in \mathfrak{X}$, $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{X}) = \emptyset$ и $B \subseteq \Phi(G)$.

Отметим, что теорема 2.4.1 исследует указанную ситуацию в случае, когда Θ — m -функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все ее максимальные подгруппы. Такой m -функтор, очевидно, совпадает с \mathfrak{f} -абнормальным m -функтором, если \mathfrak{f} — единичный класс групп. При этом

$$\Phi_{\Theta}(G) = \Delta^{\mathfrak{f}}(G) = \Phi(G).$$

В связи с этим указанная выше задача интересна прежде всего в случае, когда Θ — \mathfrak{f} -абнормальный m -функтор. Следующий результат решает эту задачу в случае, когда \mathfrak{f} — локальная нормально наследственная формация.

2.4.5. Теорема. Пусть \mathfrak{f} — нормально наследственная локальная формация, N — нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f}$. Тогда подгруппа N представима в виде прямого произведения $N = A \times B$, множители которого удовлетворяют условиям:

- 1) $A \in \mathfrak{f}$;
- 2) $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{f}) = \emptyset$;

3) $B \subseteq \Phi(G)$.

Доказательство. В результате индуктивных рассуждений можно считать, что $\pi(N) \subseteq \pi(\mathfrak{f})$ и $B = 1$. Поэтому необходимо доказать, что $N = A \in \mathfrak{f}$.

Пусть $K = N \cap \Delta^{\mathfrak{f}}(G)$. Каждая максимальная подгруппа, не содержащая K , является \mathfrak{f} -нормальной. Следовательно, ввиду леммы 8.3 из [59] имеем

$$K/K \cap \Phi(G) \subseteq Z_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{f}}(G/K \cap \Phi(G)).$$

Если $K \cap \Phi(G) \neq 1$, то по индукции $N/K \cap \Phi(G) \in \mathfrak{f}$, а значит, согласно следствию 2.4.2, $N \in \mathfrak{f}$.

Пусть $K \cap \Phi(G) = 1$. Тогда подгруппа K \mathfrak{f} -гиперцентральна в группе G . Докажем, что K \mathfrak{f} -гиперцентральна и в подгруппе H . Пусть L/S — G -главный pd -фактор группы K . Тогда $G/C \in f(p)$, где $C = C_G(L/S)$; f — максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{f} . Так как по теореме 4.7 из [59] формация $f(p)$ является нормально наследственной, то

$$NC/C \cong N/C_N(L/S) \in f(p).$$

Следовательно, подгруппа N f -стабилизирует G -главный ряд группы K . Это означает, что $K \subseteq Z_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{f}}(N)$. Отсюда и из $N/K \in \mathfrak{f}$ вытекает, что $N \in \mathfrak{f}$. Теорема доказана.

2.4.6. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — нормально наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Пусть N — нормальная подгруппа группы G . Если $N/N \cap \Delta^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f}$, то $N \in \mathfrak{f}$.

2.4.7. Замечание. Условие нормальной наследственности локальной формации \mathfrak{f} в теореме 2.4.5 является существенным и его отбросить нельзя. Действительно, если формация \mathfrak{f} не является нормально наследственной, то в ней найдется такая группа G , у которой некоторая нормальная подгруппа N не входит в \mathfrak{f} . Так как $G \in \mathfrak{f}$, то $\Delta^{\mathfrak{f}}(G) = G$. Поэтому

$$N/N \cap \Delta^{\mathfrak{f}}(G) = N/N \in \mathfrak{f}.$$

Но отсюда не следует, что $N \in \mathfrak{f}$.

В случае, когда локальная формация \mathcal{f} является наследственной (т.е. из $G \in \mathcal{f}$ следует, что любая подгруппа группы G входит в \mathcal{f}), в теореме 2.4.5 нормальную подгруппу N можно заменить \mathcal{f} -достижимой подгруппой.

2.4.8. Определение. Пусть \mathcal{f} — непустая формация. Подгруппа N конечной группы G называется \mathcal{f} -достижимой, если имеется такая цепь подгрупп

$$N = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \dots \subseteq N_n = G,$$

что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа N_{i-1} нормальна в N_i ; 2) \mathcal{f} -корадикал подгруппы N_i содержится в N_{i-1} .

Понятие \mathcal{f} -достижимой подгруппы, введенное О. Кегелем в работе [102], позволило систематизировать многие закономерности, связанные с нормальными и субнормальными подгруппами, а также их обобщениями. В настоящем параграфе идея \mathcal{f} -достижимой подгруппы используется для объединения результатов, связанных с поведением нормальных и обобщенно субнормальных \mathcal{f} -подгрупп во фраттиниевых расширениях конечных групп.

В работе [68] испанских математиков Баллестера—Болинше и Перец—Рамош следствие 2.4.2 получило развитие в следующих двух направлениях.

✓ **2.4.9. Лемма [68].** Пусть \mathcal{f} — локальная формация, $\pi = \pi(\mathcal{f})$. Если субнормальная подгруппа N группы G содержит $O_\pi(\Phi(G))$ и $N/O_\pi(\Phi(G)) \in \mathcal{f}$, то $N \in \mathcal{f}$.

Другой результат работы [68] устанавливает, что аналогичным свойством при некоторых ограничениях на группу и формацию обладают \mathcal{f} -субнормальные подгруппы.

✓ **2.4.10. Лемма [68].** Пусть \mathcal{f} — наследственная локальная формация, N — \mathcal{f} -субнормальная подгруппа разрешимой группы G . Если в G существует нормальная подгруппа M такая, что $M \subseteq N \cap \Phi(G)$ и $N/M \in \mathcal{f}$, то $N \in \mathcal{f}$.

Напомним, что подгруппа N конечной группы G называется \mathcal{f} -субнормальной, если либо $N = G$, либо существует такая максимальная цепь подгрупп

$$N = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \dots \subseteq N_n = G,$$

что \mathfrak{f} -корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1} для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Ясно, что каждая субнормальная и каждая \mathfrak{f} -субнормальная подгруппы являются \mathfrak{f} -достижимыми. Поэтому в связи с леммами 2.4.9 и 2.4.10 возникает задача исследования свойств тех \mathfrak{f} -достижимых подгрупп H группы G , для которых $H/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{f}$. Эта задача и решается в настоящем параграфе. Центральное место здесь занимает следующая теорема.

2.4.11. Теорема. Пусть \mathfrak{f} — наследственная локальная формация, H — \mathfrak{f} -достижимая подгруппа группы G и $H/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{f}$. Тогда H представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $H_1 \in \mathfrak{f}$;
- 2) $\pi(H_1) \cap \pi(\mathfrak{f}) = \emptyset$;
- 3) $H_2 \subseteq \Phi(G)$.

При доказательстве леммы 2.4.10 в работе [68] используется свойство p -скованности конечных разрешимых групп. Понятно, что в нашем случае при рассмотрении произвольных конечных групп мы вынуждены искать другие пути доказательства. Они связаны с использованием результатов работы [11] о \mathfrak{f} -достижимых подгруппах и основаны на исследовании поведения цоколя группы по отношению к максимальным \mathfrak{f} -достижимым \mathfrak{f} -подгруппам.

Зафиксируем следующие обозначения: \mathfrak{G}_π — класс всех π -групп (π — некоторое множество простых чисел); \mathfrak{R}_p — класс всех p -групп; \mathfrak{H} — класс всех сверхразрешимых групп.

Приведем некоторые сведения о \mathfrak{f} -достижимых подгруппах. Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой.

2.4.12. Лемма. Пусть \mathfrak{f} — непустая наследственная формация, H, K и N — подгруппы группы G , причем подгруппа N нормальна в G . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если H — \mathfrak{f} -достижимая подгруппа группы G , то $H \cap K$ — \mathfrak{f} -достижимая подгруппа группы K , а HN/N — \mathfrak{f} -достижимая подгруппа группы G/N ;

2) если $H \supseteq N$, то подгруппа H \mathfrak{f} -достижима в G тогда и только тогда, когда подгруппа H/N \mathfrak{f} -достижима в G/N ;

3) если H — \mathfrak{f} -достижимая подгруппа группы G , то $H^{\mathfrak{f}}$ — субнормальная подгруппа G .

✓ **2.4.13. Лемма** [1]. Пусть \mathfrak{f} — непустая наследственная формация. Тогда нормализатор любой \mathfrak{f} -достижимой подгруппы группы G содержит всякую минимальную нормальную подгруппу группы G , совпадающую со своим \mathfrak{f} -корадикалом.

✓ **2.4.14. Лемма** [102]. Если H — \mathfrak{C}_π -достижимая подгруппа группы G , то $H \subseteq O_\pi(G)$.

Нам потребуется информация о строении подгруппы $\tilde{F}(G)$, где

$$\tilde{F}(G)/\Phi(G) = \text{Soc}(G/\Phi(G))$$

— произведение всех минимальных нормальных подгрупп группы $G/\Phi(G)$.

✓ **2.4.15. Лемма** [108]. $C_G(\tilde{F}(G)) \subseteq F(G)$ для любой группы G .

Следующая лемма показывает, что в следствии 2.4.2 условие нормальности подгруппы N может быть ослаблено до субнормальности.

† **2.4.16. Лемма.** Пусть \mathfrak{f} — локальная формация, H — субнормальная подгруппа группы G и $H/H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{f}$. Тогда $H = H_1 \times H_2$, причем:

- 1) $H_1 \in \mathfrak{f}$;
- 2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{f}) = \emptyset$;
- 3) $H_2 \subseteq \Phi(G)$.

Доказательство. Пусть $D = H \cap \Phi(G)$, $\pi = \pi(\mathfrak{f})$. Согласно лемме 2.4.9, подгруппа H представима в виде $H = H_1 \times H_2$, где H_1 — холловская π -подгруппа группы H . Тогда $H_2 \subseteq \Phi(G)$ и $H/D \cong H_1/D_1$, где $D_1 = H_1 \cap \Phi(G)$. Пусть f — некоторый локальный экран формации \mathfrak{f} . Так как $H_1/D_1 \in \mathfrak{f}$, то

$$(H_1/D_1)/O_{pp}(H_1/D_1) \in \mathfrak{f}(p)$$

для любого $p \in \pi(H_1/D_1)$. На основании леммы 2.4.9

$$O_{pp}(H_1/D_1) = O_{pp}(H_1)/D_1.$$

Поэтому $H_1/O_{pp}(H_1) \in \mathfrak{f}(p)$ для всех p из $\pi(H_1)$. По лемме 4.5 из [59] подгруппа H_1 принадлежит \mathfrak{f} . Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.4.11. Так как подгруппа H \mathcal{F} -достижима в G , то она, очевидно, \mathcal{G}_π -достижима в G , где $\pi = \pi(\mathcal{F})$. Ввиду леммы 2.4.12 подгруппа $H\Phi(G)/\Phi(G)$ \mathcal{G}_π -достижима в группе $G/\Phi(G)$. Значит, на основании леммы 2.4.14 имеем

$$H\Phi(G)/\Phi(G) \subseteq O_\pi(G/\Phi(G)).$$

Пусть

$$O_\pi(G/\Phi(G)) = K/\Phi(G).$$

По лемме 2.4.16 подгруппа K представима в виде $K = K_1 \times K_2$, где K_1 — π -группа, $\pi(K_2) \cap \pi = \emptyset$, $K_2 \subseteq \Phi(G)$. Пусть H_1 — холловская π -подгруппа группы H , H_2 — холловская π' -подгруппа группы H . Очевидно, $H_1 \subseteq K_1$, $H_2 \subseteq K_2$. Поэтому $H = H_1 \times H_2$, причем H_1 — π -группа, $\pi(H_2) \cap \pi = \emptyset$ и $H_2 \subseteq \Phi(G)$.

Покажем, что $H_1 \in \mathcal{F}$. Предположим, что это не верно и группа G является контрпримером минимального порядка. Тогда в G найдется \mathcal{F} -достижимая подгруппа T такая, что из $T/T \cap \Phi(G) \in \mathcal{F}$ следует равенство $T = T_1 \times T_2$, где T_1 — π -группа, $\pi(T_2) \cap \pi = \emptyset$, $T_2 \subseteq \Phi(G)$, но подгруппа T_1 не принадлежит формации \mathcal{F} . Среди всех таких подгрупп выберем подгруппу H , имеющую в G наименьший индекс. Очевидно, что $H_1 \neq 1$. Поэтому $O_\pi(G) \neq 1$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G . Так как

$$H\Phi(G)N/\Phi(G)N \simeq H\Phi(G)/H\Phi(G) \cap \Phi(G)N,$$

то $H\Phi(G)N/\Phi(G)N \in \mathcal{F}$. С другой стороны, $H\Phi(G)N/\Phi(G)N \simeq HN/HN \cap \Phi(G)N$. Поэтому $HN/HN \cap \Phi(G)N \in \mathcal{F}$.

Так как $\Phi(G)N/N \subseteq \Phi(G/N)$, то $(HN/N)/(HN/N) \cap \Phi(G/N) \in \mathcal{F}$.

Кроме того, на основании леммы 2.4.12 подгруппа HN/N \mathcal{F} -достижима в группе G/N . Теперь ввиду выбора группы G имеем $H_1N/N \in \mathcal{F}$. Если L — минимальная нормальная подгруппа группы G , отличная от N , то аналогичным образом показывается, что $H_1L \in \mathcal{F}$. Отсюда следует, что

$$H_1/L \cap N \simeq H_1 \in \mathcal{F}.$$

Пришли к противоречию.

Итак, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Из $N \subseteq \Phi(G) \cap O_\pi(G)$ следует, что N — абелева p -группа для некоторого $p \in \pi(f)$. Кроме того, $H_2 = 1$, $H = H_1$ и $NN/N \in \mathcal{F}$. Если N не содержится в H , то $|G : NN| < |G : H|$. Кроме того, $NN/NN \cap \Phi(G) \in \mathcal{F}$. Значит, ввиду выбора подгруппы H имеем, что $NN \in \mathcal{F}$. Так как формация \mathcal{F} является наследственной, то $H \in \mathcal{F}$. Снова пришли к противоречию. Значит, в дальнейшем полагаем, что $N \subseteq H$.

Предположим, что H — собственная подгруппа группы $NO_p(G)$. Ввиду леммы 2.4.12 подгруппа H \mathcal{F} -достижима в группе $NO_p(G)$. Поэтому существует такая цепь

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = NO_p(G),$$

что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i ; 2) $(H_i)^f \subseteq H_{i-1}$.

Пусть $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, f — максимальный внутренний локальный экран формации \mathcal{F} . Если подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i , то, очевидно, $(H_{i-1})^{f(p)}$ — нормальная подгруппа группы H_i . По теореме 4.7 из [59] формация $f(p)$ является наследственной. Поэтому $(H_{i-1})^{f(p)} \subseteq (H_i)^{f(p)}$. Значит, подгруппа $(H_{i-1})^{f(p)}$ нормальна в группе $(H_i)^{f(p)}$.

Пусть теперь $(H_i)^f \subseteq H_{i-1}$. Так как $H_i = H_{i-1}(O_p(G) \cap H_i)$, то

$$H_i/(H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i) \simeq H_{i-1}/(H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_{i-1}).$$

Поэтому

$$(H_i)^{f(p)} \subseteq (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i).$$

Так как $(H_{i-1})^{f(p)} \subseteq (H_i)^{f(p)}$, то

$$(H_i)^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i) = (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i). \quad (*)$$

Согласно лемме 4.5 из [59], для любого $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ имеем

$$(H_j)^{f(p)}/(H_j)^f \subseteq O_{p'}((H_j)/(H_j)^f).$$

Так как экран f является внутренним максимальным, то на основании теоремы 3.3 из [59] $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$. Отсюда следует, что

$$(H_j)^{f(p)}/(H_j)^f \subseteq O_p \cdot (H_j/(H_j)^f).$$

Так как $H_j O_j(G)/O_p(G) \in \mathfrak{F}$, то $(H_j)^f \subseteq H_j \cap O_p(G)$. Таким образом,

$$(H_j)^{f(p)} = ((H_j)^{f(p)})_p \cdot (H_j)^f,$$

где $((H_j)^{f(p)})_p$ — холловская p' -подгруппа группы $(H_j)^{f(p)}$. Теперь из равенства (*) следует, что холловская p' -подгруппа $((H_{i-1})^{f(p)})_p$ группы $(H_{i-1})^{f(p)}$ является холловской p' -подгруппой группы $(H_i)^{f(p)}$. Значит,

$$(H_i)^{f(p)} = ((H_{i-1})^{f(p)})_p \cdot (H_i)^f.$$

Так как $(H_i)^f \subseteq H_{i-1}$, то $(H_i)^{f(p)} \subseteq H_{i-1}$. Итак,

$$(H_{i-1})^{f(p)} \subseteq (H_i)^{f(p)} \subseteq H_i.$$

Отсюда следует, что подгруппа $(H_{i-1})^{f(p)}$ нормальна в группе $(H_i)^{f(p)}$.

Итак, подгруппа $H^{f(p)}$ субнормальна в группе $HO_p(G)$. Тогда подгруппа $(H/N)^{f(p)} = H^{f(p)}N/N$ является субнормальной подгруппой группы $(H/N)O_p(G/N)$. Так как $H/N \in \mathfrak{F}$, то

$$(H/N)^{f(p)} \subseteq O_p \cdot (H/N).$$

Из субнормальности $(H/N)^{f(p)}$ в $HO_p(G)/N$ следует, что

$$(H/N)^{f(p)} \subseteq O_p \cdot (HO_p(G)/N).$$

Значит,

$$(H/N)^{f(p)} O_p(G/N) \subseteq O_{p'}(HO_p(G)/N).$$

Так как

$$HO_p(G)/H^{f(p)} O_p(G) \simeq H/N \cap H^{f(p)} O_p(G) \in f(p),$$

то

$$(HO_p(G)/N)/O_{p'}(HO_p(G)/N) \in f(p).$$

На основании теоремы 4.1 из [59], это означает, что все главные факторы группы $HO_p(G)/N$, содержащиеся в $O_p(G)/N$, являются

\mathfrak{f} -центрными. Поэтому из $\text{НО}_p(G)/O_p(G) \in \mathfrak{f}$ следует, что $\text{НО}_p(G)/N \in \mathfrak{f}$.

Очевидно, подгруппа $\text{НО}_p(G)$ \mathfrak{f} -достижима в группе G . Так как

$$|G : \text{НО}_p(G)| < |G : N|,$$

то ввиду выбора подгруппы N имеем, что $\text{НО}_p(G) \in \mathfrak{f}$. Из наследственности формации \mathfrak{f} следует, что $N \in \mathfrak{f}$. Пришли к противоречию.

Итак, $O_p(G) \subseteq N$. Пусть φ — естественный гомоморфизм группы G на группу $G/\Phi(G)$. Отметим, что так как N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , то $\Phi(G) \subseteq O_p(G)$. Пусть $S = \varphi^{-1}(O_p(G^\varphi))$ — полный прообраз подгруппы $O_p(G^\varphi)$. На основании следствия 2.4.2 подгруппа S представима в виде $S = S_1 \times \Phi(G)$, где S_1 — холловская p' -подгруппа группы S . Теперь из того, что $\text{Soc}(G) = N$, имеем $O_p(G^\varphi) = 1$. Таким образом, все абелевы минимальные нормальные подгруппы группы G^φ являются p -группами.

Пусть K — неабелева минимальная нормальная подгруппа группы G^φ . Предположим, что K не принадлежит \mathfrak{f} . Тогда $K^\mathfrak{f} = K$. Так как подгруппа N^φ \mathfrak{f} -достижима в G^φ , то по лемме 2.4.13 $K \subseteq N_{G^\varphi}(N)$. Значит, $K \cap N^\varphi$ — нормальная подгруппа группы K и поэтому $(K \cap N^\varphi)^\mathfrak{f} = K \cap N^\varphi$. Так как \mathfrak{f} — наследственная формация, то $(K \cap N^\varphi)^\mathfrak{f} \subseteq (N^\varphi)^\mathfrak{f}$. Теперь из $N^\varphi \in \mathfrak{f}$ следует, что $K \cap N^\varphi = 1$. Значит, $KN^\varphi = K \times N^\varphi$.

Пусть теперь $K \in \mathfrak{f}$. Предположим, что K не содержится в N^φ . Так как подгруппа N^φ \mathfrak{f} -достижима в $N^\varphi K$, то существует такая цепь

$$N^\varphi = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = N^\varphi K,$$

что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется одно из условий:

1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i ; 2) $(H_i)^\mathfrak{f} \subseteq H_{i-1}$. В частности, либо подгруппа N^φ нормальна в группе H_1 , либо $(H_1)^\mathfrak{f} \subseteq N^\varphi$.

Пусть $(H_1)^\mathfrak{f} \subseteq N^\varphi$. Так как $N^\varphi K/K \in \mathfrak{f}$, то $(N^\varphi K)^\mathfrak{f} \subseteq K$. Из наследственности формации \mathfrak{f} имеем $(H_1)^\mathfrak{f} \subseteq K$. Так как подгруппа H_1 \mathfrak{f} -достижима в $N^\varphi K$, то ввиду леммы 2.4.12 $(H_1)^\mathfrak{f}$ — субнормальная подгруппа группы $N^\varphi K$. Очевидно, подгруппа K представима в

виде $K = K_1 \times \dots \times K_n$, где K_i — изоморфные простые группы. Так как подгруппа K неабелева, то $(H_1)^f$ — произведение некоторых подгрупп K_i для i из $\{1, 2, \dots, n\}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $(H_1)^f = K_1 \times \dots \times K_m$, где $k < m$. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы H^φ , содержащаяся в $(H_1)^f$. Так как подгруппа L неабелева, то $K = L \times C_K(L)$. Отсюда, в частности, следует, что L — минимальная нормальная подгруппа группы $H^\varphi K$. Так как $L \subseteq H^\varphi$, то

$$H^\varphi K = H^\varphi(LC_K(L)) = H^\varphi C_K(L) = H^\varphi C_{H^\varphi K}(L).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} H^\varphi K / C_{H^\varphi K}(L) &= H^\varphi C_{H^\varphi K}(L) / C_{H^\varphi K}(L) \cong \\ &\cong H^\varphi / H^\varphi \cap C_{H^\varphi K}(L) = H^\varphi / C_{H^\varphi}(L). \end{aligned}$$

Так как $H^\varphi \in \mathcal{F}$, то $H^\varphi / C_{H^\varphi}(L) \in \mathcal{F}(L)$. Но тогда $H^\varphi K / C_{H^\varphi K}(L) \in \mathcal{F}(L)$, т.е. L — \mathcal{F} -центральный главный фактор группы $H^\varphi K$. Так как формация $\mathcal{F}(L)$ наследственна, то L — \mathcal{F} -центральный главный фактор группы H_1 . Отсюда из строения подгруппы $(H_1)^f$ следует, что все H_1 -главные факторы группы $(H_1)^f$ \mathcal{F} -центральны в H_1 . Значит, подгруппа H_1 принадлежит формации \mathcal{F} . Так как подгруппа H_1 \mathcal{F} -достижима в $H_1 K$, а подгруппа $H_1 K = H^\varphi K$ \mathcal{F} -достижима в G^φ , то H_1 — \mathcal{F} -достижимая подгруппа группы G^φ . Пусть $\varphi^{-1}(H_1)$ — полный прообраз подгруппы H_1 . Тогда $\varphi^{-1}(H_1)$ — \mathcal{F} -достижимая подгруппа группы G ,

$$\varphi^{-1}(H_1) / \Phi(G) \in \mathcal{F} \quad \text{и} \quad |G : \varphi^{-1}(H_1)| < |G : H|.$$

Ввиду выбора подгруппы H $\varphi^{-1}(H_1) \in \mathcal{F}$. Так как формация \mathcal{F} наследственна, то $H \in \mathcal{F}$. Пришли к противоречию.

Пусть теперь подгруппа H^φ нормальна в H . Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что H_1 / H^φ — простая группа.

Предположим, что $(H_1)^f \not\subseteq H^\varphi$. Тогда

$$H_1 = H^\varphi(H_1)^f = H^\varphi(K_1 \times \dots \times K_m).$$

Так как

$$H_1 / H^\varphi \cong K_1 \times \dots \times K_m / K_1 \times \dots \times K_m \cap H^\varphi,$$

то из $K \in \mathfrak{f}$ следует, что $(H_1)^{\mathfrak{f}} \subseteq H^{\mathfrak{f}}$. Пришли к противоречию с предположением, что $(H_1)^{\mathfrak{f}}$ не содержится в $H^{\mathfrak{f}}$.

Значит, $(H_1)^{\mathfrak{f}} \subseteq H^{\mathfrak{f}}$. Как показано выше, это приводит к противоречию с выбором подгруппы H .

Итак, если K — минимальная нормальная подгруппа группы $G^{\mathfrak{f}}$, то либо $K = K^{\mathfrak{f}}$ и $[K, H^{\mathfrak{f}}] = 1$, либо $K \in \mathfrak{f}$ и $K \subseteq H^{\mathfrak{f}}$. Если $K = K^{\mathfrak{f}}$, то, очевидно, $O_p(H^{\mathfrak{f}}) \subseteq C_{G^{\mathfrak{f}}}(K)$. Пусть $K \in \mathfrak{f}$. Тогда $K \subseteq H^{\mathfrak{f}}$. Так как все минимальные нормальные подгруппы группы G являются либо p -группами, либо pd -группами, то из $K \subseteq H^{\mathfrak{f}}$ снова получаем $O_p(H^{\mathfrak{f}}) \subseteq C_{G^{\mathfrak{f}}}(K)$. Таким образом,

$$O_p(H^{\mathfrak{f}}) \subseteq C_{G^{\mathfrak{f}}}(\text{Soc}(G^{\mathfrak{f}})).$$

Так как $\Phi(G^{\mathfrak{f}}) = 1$, то $\text{Soc}(G^{\mathfrak{f}}) = \tilde{F}(G^{\mathfrak{f}})$. По лемме 2.4.15

$$O_p(H^{\mathfrak{f}}) \subseteq F(G^{\mathfrak{f}}) = O_p(H^{\mathfrak{f}}).$$

Значит, $O_p(H^{\mathfrak{f}}) = 1$.

Так как $H^{\mathfrak{f}} \in \mathfrak{f}$, то ввиду леммы 4.5 [59] из условия $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ следует, что $H^{\mathfrak{f}}/O_p(H^{\mathfrak{f}}) \in f(p)$. Так как $O_p(H^{\mathfrak{f}}) = 1$, то $H^{\mathfrak{f}} = H/\Phi(G) \in f(p)$. Теперь из $\Phi(G) \subseteq O_p(G)$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ следует, что $H \in f(p)$. Так как экран f является внутренним, то $H^{\mathfrak{f}} \in \mathfrak{f}$. Снова пришли к противоречию. Теорема доказана.

2.4.17. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — наследственная локальная формация, H — \mathfrak{f} -субнормальная подгруппа группы G и $H/H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{f}$. Тогда $H \in \mathfrak{f}$.

Доказательство. Так как подгруппа H \mathfrak{f} -субнормальна в G и $H/H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{f}$, то G является π -группой, где $\pi = \pi(\mathfrak{f})$. Теперь остается только применить доказанную теорему.

2.4.18. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — наследственная локальная формация, H — \mathfrak{f} -достижимая подгруппа группы G и $H/H \cap \Delta^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f}$. Тогда H представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $H_1 \in \mathfrak{f}$;
- 2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{f}) = \emptyset$;
- 3) $H_2 \subseteq \Phi(G)$.

Доказательство. Так как $H/H \cap \Delta^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f}$, то $H\Delta^{\mathfrak{f}}(G)/\Delta^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f}$. Ввиду следствия 2.1.28

$$\Delta^{\mathfrak{f}}(G)/\Phi(G) = Z_{\mathfrak{f}}^{\infty}(G/\Phi(G)).$$

Пусть K/S — G -главный фактор группы $\Delta^{\mathfrak{f}}(G)/\Phi(G)$. Тогда он \mathfrak{f} -централен в G и поэтому $G/C_G(K/S) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(K/S)$ и любого локального экрана f формации \mathfrak{f} . Если f — максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{f} , то, согласно теореме 4.7 из [59], формация $f(p)$ наследственна. Значит,

$$H\Delta^{\mathfrak{f}}(G)/C_{H\Delta^{\mathfrak{f}}(G)}(K/S) \in f(p).$$

Отсюда следует, что все главные факторы группы $H\Delta^{\mathfrak{f}}(G)/\Phi(G)$ \mathfrak{f} -центральны. Поэтому $H\Delta^{\mathfrak{f}}(G)/\Phi(G) \in \mathfrak{f}$. По лемме 2.4.12 $H\Delta^{\mathfrak{f}}(G)$ — \mathfrak{f} -достижимая подгруппа группы G . Тогда на основании доказанной теоремы подгруппа $H\Delta^{\mathfrak{f}}(G)$ представима в виде $H\Delta^{\mathfrak{f}}(G) = T_1 \times T_2$, где

$$T_1 \in \mathfrak{f}, \pi(T_2) \cap \pi(\mathfrak{f}) = \emptyset, T_2 \subseteq \Phi(G).$$

Так как формация \mathfrak{f} наследственна, то и подгруппа H представима в виде $H = H_1 \times H_2$, где

$$H_1 \in \mathfrak{f}, \pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{f}) = \emptyset \text{ и } H_2 \subseteq \Phi(G).$$

2.4.19. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если подгруппа H \mathfrak{f} -достижима в группе G и $H/H \cap \Delta^{\mathfrak{f}}(G) \in \mathfrak{f}$, то $H \in \mathfrak{f}$.

2.4.20. Следствие. Пусть H — подгруппа группы G . Пусть существует такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G,$$

что для любого $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется одно из условий: 1) H_{i-1} нормальна в H_i ; 2) разрешимый корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1} и $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число. Если группа $H/H \cap \Delta^n(G)$ сверхразрешима, то H — сверхразрешимая под-

группа группы G . В частности, из сверхразрешимости группы $H/H \cap \Phi(G)$ следует сверхразрешимость подгруппы H .

Доказательство. Ввиду доказанной теоремы достаточно проверить, что подгруппа H \mathfrak{u} -достижима в группе G . Для этого из соображений индукции можно ограничиться лишь рассмотрением случая, когда H содержит разрешимый корадикал группы G и $|G : H|$ — простое число. Тогда H — максимальная подгруппа группы G и порядок главного фактора $K/\text{Core}_G(H)$ — некоторое простое число p . Поэтому $G/C_G(K/\text{Core}_G(H))$ — циклическая группа порядка, делящего $p - 1$. Так как группа $G/\text{Core}_G(H)$ примитивна и разрешима, то

$$C_G(K/\text{Core}_G(H)) = K.$$

Отсюда следует, что $G/\text{Core}_G(H)$ — сверхразрешимая группа, т.е. $G'' \subseteq H$.

2.4.21. Определение. Пусть \mathfrak{f} — непустая формация. Подгруппа H группы G называется \mathfrak{f} -подгруппой, если $H \in \mathfrak{f}$. Будем говорить, что H — максимальная \mathfrak{f} -достижимая (\mathfrak{f} -субнормальная) \mathfrak{f} -подгруппа группы G , если всегда из того, что $H \subseteq K$, где K — \mathfrak{f} -достижимая (\mathfrak{f} -субнормальная) \mathfrak{f} -подгруппа группы G , следует равенство $H = K$.

2.4.22. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Тогда каждая максимальная \mathfrak{f} -достижимая \mathfrak{f} -подгруппа группы G содержит $\Delta^{\mathfrak{f}}(G)$.

2.4.23. Замечание. Пусть \mathfrak{f} — формация, обладающая таким локальным экраном f , что $f(p) = 1$ для всех $p \neq 2, 3$ и $f(2) = f(3) = \{G \mid G \text{ разрешима и ее картеровские подгруппы являются 2-группами}\}$. В [68] строится группа G такая, что ее \mathfrak{f} -субнормальная (а значит, и \mathfrak{f} -достижимая) подгруппа H не принадлежит \mathfrak{f} , в то время как $H/H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{f}$. Таким образом, условие наследственности формации \mathfrak{f} в теореме 2.4.11 существенно и его отбросить нельзя.

2.4.24. Замечание. В дополнение к следствию 2.4.20 отметим, что подгруппа H группы G \mathfrak{u} -достижима тогда и только тогда, когда существует такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G,$$

что для любого $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется одно из условий: 1) H_{i-1} нормальна в H_i ; 2) разрешимый корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1} и $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число.

Теорема 2.4.11 позволяет получить некоторую информацию о структуре максимальных \mathfrak{f} -достижимых \mathfrak{f} -подгрупп конечных групп. Такая информация является достаточно важной при изучении некоторых вопросов теории \mathfrak{f} -достижимых подгрупп. Так, в работах [5,102] строение максимальных \mathfrak{f} -достижимых \mathfrak{f} -подгрупп тесно увязывается с решеточными свойствами \mathfrak{f} -достижимых \mathfrak{f} -подгрупп. В частности, в [5] для локальных наследственных формаций \mathfrak{f} показано, что в любой конечной группе множество всех \mathfrak{f} -достижимых подгрупп образует решетку тогда и только тогда, когда в каждой конечной группе существует единственная максимальная \mathfrak{f} -достижимая \mathfrak{f} -подгруппа.

2.4.25. Определение. Пусть \mathfrak{f} — непустая формация. Тогда произведение всех минимальных нормальных \mathfrak{f} -подгрупп группы G называем \mathfrak{f} -цоколем группы G .

В дальнейшем \mathfrak{f} -цокоть группы G будем обозначать через $\text{Soc}_{\mathfrak{f}}(G)$.

2.4.26. Определение. Определим подгруппу $\tilde{F}(G, \mathfrak{f})$ группы G следующими двумя условиями:

- 1) $\tilde{F}(G, \mathfrak{f}) \supseteq \Phi(G)$;
- 2) $\tilde{F}(G, \mathfrak{f})/\Phi(G) = \text{Soc}_{\mathfrak{f}}(G/\Phi(G))$.

2.4.27. Теорема. Пусть \mathfrak{f} — наследственная локальная формация, H — максимальная \mathfrak{f} -достижимая \mathfrak{f} -подгруппа группы G . Тогда $O_{\pi}(\tilde{F}(G, \mathfrak{f})) \subseteq H$, где $\pi = \pi(\mathfrak{f})$.

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не верна. Предположим, что $\Phi(G) = \Phi \neq 1$. Рассмотрим подгруппу $H\Phi/\Phi$ группы G/Φ .

На основании теоремы 2.4.11 $H\Phi/\Phi$ — максимальная \mathfrak{f} -достижимая \mathfrak{f} -подгруппа группы G/Φ . Поэтому ввиду выбора группы G имеем, что

$$O_{\pi}(\tilde{F}(G/\Phi, \mathfrak{f})) \subseteq H\Phi/\Phi.$$

Так как

$$\tilde{F}(G/\Phi, \mathfrak{f}) = \tilde{F}(G, \mathfrak{f})/\Phi,$$

то $\tilde{F}(G/\Phi, \mathfrak{f}) \in \mathfrak{f}$. Значит, $\tilde{F}(G, \mathfrak{f}) \subseteq N\Phi$. Согласно теореме 2.4.11, подгруппы $\tilde{F}(G, \mathfrak{f})$ и $N\Phi$ представимы в виде

$$\tilde{F}(G, \mathfrak{f}) = F_1 \times F_2, \quad N\Phi = N_1 \times N_2,$$

причем выполняются следующие условия:

- 1) $F_1 \in \mathfrak{f}, \quad N_1 \in \mathfrak{f};$
- 2) $\pi(F_2) \cap \pi(\mathfrak{f}) = \emptyset, \quad \pi(F_2) \cap \pi(N_2) = \emptyset;$
- 3) $F_2 \subseteq \Phi(G), \quad N_2 \subseteq \Phi(G).$

Отсюда следует, что $F_1 = O_\pi(\tilde{F}(G, \mathfrak{f}))$. Кроме того, так как $N \in \mathfrak{f}$, то $N_1 = N$. Теперь из $\tilde{F}(G, \mathfrak{f}) \subseteq N\Phi$ следует, что $O_\pi(\tilde{F}(G, \mathfrak{f})) \subseteq N$. Противоречие.

Значит, полагаем далее, что $\Phi(G) = 1$. Тогда $\tilde{F}(G, \mathfrak{f}) = \text{Soc}_{\mathfrak{f}}(G)$. Покажем, что любая минимальная нормальная подгруппа группы G , принадлежащая \mathfrak{f} , содержится в N .

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G , $L \in \mathfrak{f}$ и L не содержится в N . Рассмотрим подгруппу NL группы G . Так как N \mathfrak{f} -достижима в NL , то существует такая цепь подгрупп

$$N = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_t = NL,$$

что для каждого $i = 1, 2, \dots, t$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа N_{i-1} нормальна в N_i ; 2) \mathfrak{f} -корадикал подгруппы N_i содержится в N_{i-1} .

Ввиду леммы 2.4.12 подгруппа N_1 \mathfrak{f} -достижима в группе G и ее \mathfrak{f} -корадикал $(N_1)^{\mathfrak{f}}$ субнормален в G . Из наследственности формации \mathfrak{f} следует, что $(N_1)^{\mathfrak{f}} \subseteq (NL)^{\mathfrak{f}} \subseteq L$. Так как N — максимальная \mathfrak{f} -достижимая \mathfrak{f} -подгруппа группы G , то $(N_1)^{\mathfrak{f}} \neq 1$. Поэтому $(N_1)^{\mathfrak{f}} = L$.

Пусть T — главный фактор подгруппы N_1 , содержащийся в $(N_1)^{\mathfrak{f}}$. Тогда T — главный фактор группы NL . Предположим, что подгруппа $(N_1)^{\mathfrak{f}}$ не содержится в N . Тогда N — нормальная подгруппа группы N_1 . Не нарушая общности рассуждений, можем полагать, что N_1/N — простая группа. Отсюда следует, что $N(N_1)^{\mathfrak{f}} = N_1$. Так как $(N_1)^{\mathfrak{f}} \subseteq L$, то $(N_1)^{\mathfrak{f}} \in \mathfrak{f}$. Теперь из

$H_1/H \cong (H_1)^{\mathfrak{f}} / (H_1)^{\mathfrak{f}} \cap H$ следует, что $H_1/H \in \mathfrak{f}$. Значит, $(H_1)^{\mathfrak{f}} \subseteq H$. Противоречие.

Итак, $(H_1)^{\mathfrak{f}} \subseteq H$. Пусть f — локальный экран формации \mathfrak{f} . Так как $H \in \mathfrak{f}$, то $H/C_H(T) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(T)$. Так как $C_L(T)T = L$, то ввиду тождества Дедекинда имеем

$$\begin{aligned} H_1 &= H_1 \cap HL = H(H_1 \cap L) = H(H_1 \cap C_L(T)T) = \\ &= H(T(H_1 \cap C_L(T))) = H(H_1 \cap C_L(T)) = HC(T). \end{aligned}$$

Теперь из

$$H_1/C_{H_1}(T) = HC_{H_1}(T)/C_{H_1}(T) \cong H/C_H(T)$$

следует, что $H_1/C_{H_1}(T) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(T)$. Значит, T — \mathfrak{f} -центральный главный фактор группы H_1 . Так как главный фактор T выбран произвольно, то $H_1 \in \mathfrak{f}$. Пришли к противоречию с тем, что H — максимальная \mathfrak{f} -достижимая \mathfrak{f} -подгруппа группы G . Теорема доказана.

2.4.28. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — наследственная локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{f})$. Тогда каждая максимальная \mathfrak{f} -достижимая \mathfrak{f} -подгруппа группы G содержит подгруппу $O_{\pi}(\tilde{F}(G, \mathfrak{f}) \Delta^{\mathfrak{f}}(G))$.

Пусть f — некоторый экран. Следуя [61] (см. также [60]), нормальный фактор H/K группы G будем называть f^+ -фактором, если $f(H/K) \neq \emptyset$.

2.4.29. Следствие. Пусть f — локальный экран наследственной формации \mathfrak{f} . Если все главные факторы группы G являются f^+ -факторами, то каждая максимальная \mathfrak{f} -достижимая \mathfrak{f} -подгруппа группы G содержит подгруппу $\tilde{F}(G) \Delta^{\mathfrak{f}}(G)$.

2.4.30. Следствие. Пусть f — локальный экран наследственной формации \mathfrak{f} . Пусть H — максимальная \mathfrak{f} -достижимая \mathfrak{f} -подгруппа группы G . Если все главные факторы группы G являются f^+ -факторами, то $C_G(H) \subseteq \tilde{F}(G) \subseteq H$.

2.4.31. Следствие. Пусть f — локальный экран наследственной формации \mathfrak{f} . Пусть H — \mathfrak{f} -достижимая \mathfrak{f} -подгруппа группы G . Если все главные факторы группы G являются f^+ -факторами, то $H \tilde{F}(G) \in \mathfrak{f}$.

2.4.32. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — наследственная локальная формация, H — \mathfrak{f} -достижимая \mathfrak{f} -подгруппа группы G . Если

$G = H\tilde{F}(G)$ и все композиционные факторы группы G принадлежат \mathfrak{f} , то $G \in \mathfrak{f}$.

Напомним, что группа G называется квазинильпотентной, если $C_G(H/K)H = G$ для любого главного фактора H/K группы G .

2.4.33. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — наследственная локальная формация. Пусть H — \mathfrak{f} -достижимая \mathfrak{f} -подгруппа группы G , K — квазинильпотентная субнормальная подгруппа группы G . Если все композиционные факторы группы G принадлежат \mathfrak{f} и $G = \langle H, K \rangle$, то $G \in \mathfrak{f}$.

2.4.34. Замечание. Отметим, что если \mathfrak{f} — непустая наследственная формация, то каждая \mathfrak{f} -субнормальная подгруппа группы G содержит \mathfrak{h} -корадикал группы G , где \mathfrak{h} — формация всех тех групп, все композиционные факторы которых принадлежат \mathfrak{f} . Поэтому в следствиях 2.4.29—2.4.33, заменив условие \mathfrak{f} -достижимости подгруппы H условием ее \mathfrak{f} -субнормальности, можно отбросить те требования, чтобы все главные факторы группы G были \mathfrak{f}^+ -факторами либо все композиционные факторы группы G принадлежали \mathfrak{f} .

2.4.35. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — наследственная локальная формация. Пусть $G = \langle H, K \rangle$, где H и K — субнормальные подгруппы группы G , причем $H \in \mathfrak{f}$, K — квазинильпотентна. Если все композиционные факторы группы G принадлежат \mathfrak{f} , то $G \in \mathfrak{f}$.

2.4.36. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если H — максимальная \mathfrak{f} -субнормальная \mathfrak{f} -подгруппа разрешимой группы G , то $H \cong F(G) \Delta^{\mathfrak{f}}(G)$.

2.4.37. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если H — максимальная \mathfrak{f} -субнормальная \mathfrak{f} -подгруппа разрешимой группы G , то $C_G(H) \subseteq F(G) \subseteq H$.

2.4.38. Следствие. Пусть \mathfrak{f} — наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Пусть H — \mathfrak{f} -субнормальная \mathfrak{f} -подгруппа разрешимой группы G . Если K — подгруппа $F(G)$ и $G = \langle H, K \rangle$, то $G \in \mathfrak{f}$.

Обратимся теперь к формации \mathfrak{H} всех сверхразрешимых групп.

2.4.39. Следствие. Пусть H — максимальная \mathfrak{H} -субнормальная сверхразрешимая подгруппа разрешимой группы G . Тогда:

- 1) $H \cong F(G)\Delta^{\mathfrak{H}}(G)$;
- 2) $C_G(H) \subseteq F(G) \subseteq H$;

2.4.40. Следствие. Пусть H и K — подгруппы разрешимой группы G , причем $G = \langle H, K \rangle$ и $K \subseteq F(G)$. Пусть существует цепь

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$$

с простыми индексами. Если подгруппа H сверхразрешима, то G — сверхразрешимая группа.

2.5. Дополнения и комментарии

Результаты параграфов 2.1 и 2.4 по классам Шунка позволяют сделать новые выводы и в теории формаций конечных групп. Проиллюстрируем это на одном из примеров.

2.5.1. Лемма. Пусть \mathfrak{f} — непустая разрешимая наследственная формация. Тогда наименьший класс Шунка \mathfrak{X} , содержащий формацию \mathfrak{f} , является нормально наследственным.

Доказательство. Согласно теореме Фёрстера из [85], имеем $\mathfrak{X} = E_{\Phi}\mathfrak{f}$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$ и N — нормальная подгруппа G . Тогда из $\mathfrak{X} = E_{\Phi}\mathfrak{f}$ имеем $G/\Phi(G) \in \mathfrak{f}$. Так как формация \mathfrak{f} является нормально наследственной, то $N\Phi(G)/\Phi(G) \in \mathfrak{f}$. Ввиду изоморфизма

$$N\Phi(G)/\Phi(G) \cong N/N \cap \Phi(G)$$

имеем, что $N/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{f}$. Так как $\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{X}$, то

$$N/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{X}.$$

Из нормальной наследственности формации \mathfrak{f} и леммы 2.1.32 заключаем, что

$$\text{Char}(\mathfrak{f}) = \pi(\mathfrak{f}) = \pi(\mathfrak{X}) = \text{Char}(\mathfrak{X}).$$

Кроме того, на основании теоремы Шунка из [110] в любой разрешимой группе существует единственный класс сопряженных \mathfrak{X} -проекторов. Таким образом, все условия теоремы 2.4.1 выполнены. Следовательно, подгруппа N представима в виде прямого произведения $N = A \times B$, множители которого удовлетворяют условиям:

- 1) $A \in \mathfrak{X}$;
- 2) $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{X}) = \emptyset$;
- 3) $B \subseteq \Phi(G)$.

Так как $G \in \mathfrak{X}$, то $\pi(B) \subseteq \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{X})$. Следовательно, $B = 1$. Но тогда $N = A \in \mathfrak{X}$, т.е. класс \mathfrak{X} является нормально наследственным. Лемма доказана.

2.5.2. Теорема. Пусть \mathfrak{f} — непустая разрешимая нормально наследственная формация. Тогда для любой группы G подгруппа $\Delta^{\mathfrak{f}}(G)$ представима в виде прямого произведения $\Delta^{\mathfrak{f}}(G) = A \times B$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $A/\Phi(A) \in \mathfrak{f}$;
- 2) $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{f}) = \emptyset$;
- 3) $B \subseteq \Phi(G)$.

Доказательство. Пусть \mathfrak{X} — наименьший класс Шунка, содержащий формацию \mathfrak{f} . Тогда на основании теоремы Фёрстера из [85] $\mathfrak{X} = E_{\Phi\mathfrak{f}}$. Ввиду леммы 2.5.1 класс Шунка \mathfrak{X} является нормально наследственным. Кроме того, из теоремы Шунка [110] следует, что в любой разрешимой группе существует единственный класс сопряженных \mathfrak{X} -проекторов. Отметим также, что по лемме 2.1.6 класс \mathfrak{X} обладает свойством $\ell(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.1.29. Следовательно, для любой группы G подгруппа $\Delta^{\mathfrak{X}}(G)$ представима в виде прямого произведения $\Delta^{\mathfrak{X}}(G) = A \times B$, множители которого удовлетворяют условиям:

- 1) $A \in \mathfrak{X}$;
- 2) $B \subseteq \Phi(G)$;
- 3) $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{X}) = \emptyset$.

На основании лемм 1.2.1 и 1.2.2 заключаем, что $\Delta^{\mathfrak{f}}(G) = \Delta^{\mathfrak{X}}(G)$. А так как $\pi(\mathfrak{f}) = \pi(\mathfrak{X})$, то $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{X}) = \emptyset$. Так как $A \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X} = E_{\Phi\mathfrak{f}}$, то $A/\Phi(A) \in \mathfrak{f}$. Теорема доказана.

2.5.3. Замечание. Требование нормальной наследственности класса Шунка \mathfrak{X} в теореме 2.1.29 существенно и его отбросить нельзя (см. замечание к теореме 6.15 из [81], стр. 392). Это же касается и требования нормальной наследственности формации \mathfrak{f} в теореме 2.5.2.

2.5.4. Замечание. Одно из условий теоремы 2.1.29 заключается в том, чтобы для класса Шунка \mathfrak{X} в любой группе $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$, где \mathfrak{N} — класс всех нильпотентных групп, существовал единственный класс сопряженных \mathfrak{X} -проекторов. В случае локальной формации это условие выполняется согласно теореме Шмида [109] и Э.Ф. Шмигирева [64]. Однако существуют классы Шунка, которые этим свойством не обладают. В частности, к ним относится класс Шунка \mathfrak{X} , порожденный группой $GL(3,2)$. Он состоит из тех групп H , для которых $H/\Phi(H) \simeq GL(3,2)$. В группе $G = \text{Hol}V$, где V — элементарная абелева группа порядка 8, все дополнения к V являются \mathfrak{X} -проекторами и составляют более одного класса сопряженных подгрупп ([100], стр.161).

В [103] Майер доказывает нильпотентность подгруппы $\Delta(G)$ (пересечение всех ненормальных максимальных подгрупп группы G) исходя из других соображений. Он изучает здесь строение подгруппы X группы G , перестановочной с любой максимальной подгруппой группы G и доказывает, что $F(X) \triangleleft\triangleleft G$. Отсюда, в частности, следует, что все силовские подгруппы из $\Delta(G)$ субнормальны (а значит, нормальны) в G , т.е. $\Delta(G) \in \mathfrak{N}$.

В [103] Майер исследовал также свойства подгруппы H , перестановочной с каждой самонормализуемой подгруппой из G . При этом он показал, что такая подгруппа субнормальна в G и ее разрешимый корадикал нормален в G . Отсюда следует, в частности, что $H/\text{Core}_G(H)$ — разрешимая группа. В связи с результатами работ [101,104] о перестановочных подгруппах Майер в [103] предлагает уточнить строение группы $H/\text{Core}_G(H)$: всегда ли группа $H/\text{Core}_G(H)$ будет нильпотентной, а если она нильпотента, то будет ли гиперцентральной. Следующие примеры дают отрицательный ответ на эти вопросы.

Следуя [103], будем говорить, что подгруппа A N -вложена в G , если A перестановочна с любой самоцентрализованной подгруппой группы G .

2.5.5. Пример. Пусть

$$H \simeq Z_5, \quad K \simeq Z_3, \quad G = H \text{ wr } K = [B]K,$$

где B — база регулярного сплетения G . Пусть $T = H \times H \times 1$ — подгруппа из B . Тогда подгруппа T N -вложена в G и $\text{Core}_G(T) = 1$.

2.5.6. Замечание. Построенный пример показывает, что существуют группы, которые содержат N -вложенную нильпотентную, но негиперцентральную подгруппу с единичным ядром.

2.5.7. Пример. Пусть G и T — группы из предложения 2.5.5,

$$R \simeq Z_2, \quad P = G \text{ wr } R = [L]R,$$

где L — база регулярного сплетения P . Пусть $F = G \times T$ — подгруппа из L . Тогда подгруппа F N -вложена в P и $\text{Core}_G(F) = 1$.

2.5.8. Замечание. Нильпотентная длина подгруппы F равна 2. Поэтому пример 2.5.7 показывает, что существуют группы, которые содержат N -вложенную ненильпотентную подгруппу с единичным ядром.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНА Д. СКОРИНЫ

Глава 3

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

В данной главе исследуются некоторые из аспектов влияния свойств заданных систем максимальных подгрупп группы G на нормальное и подгрупповое строение нормальных подгрупп из G . При этом удастся получить достаточные признаки вложения нормальных подгрупп в заданную формацию или класс Шунка. В частности, в параграфах 3.1 и 3.4 изучается строение нормальной подгруппы K группы G при условии, что все максимальные подгруппы из G , не содержащие K , пересекаются с K по \mathfrak{N} -подгруппам, где \mathfrak{N} — формация всех нильпотентных групп. Такая постановка вопроса может рассматриваться как одно из внешних обобщений групп Шмидта. В параграфах 3.2 и 3.3 устанавливаются достаточные признаки разрешимости и сверхразрешимости нормальных подгрупп в зависимости от индексов тех максимальных подгрупп группы G , которые не покрывают подгруппу K . Эти результаты применяются при изучении строения подгрупп $\Phi_k(G)$ и $\Phi_\infty(G)$.

3.1. Нормальные подгруппы, близкие к группам Шмидта

В настоящем параграфе исследуется строение нормальной (субнормальной) подгруппы K группы G при условии, что все максимальные подгруппы группы G , не содержащие K , имеют нильпотентные пересечения с подгруппой K . Понятно, что подгруппа K является группой Шмидта, если $K = G$ и группа G ненильпотентна. Поэтому обсуждаемый подход можно рассматривать как одно из обобщений групп Шмидта, носящее внешний характер.

Доказательству основного результата предшествует несколько вспомогательных утверждений.

3.1.1. Лемма. Пусть K — субнормальная подгруппа группы G . Если для всякой максимальной подгруппы M группы G , не содержащей K , пересечение $M \cap K$ нильпотентно, то подгруппа K разрешима.

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G . Выберем в G субнормальную группу K наименьшего порядка, для которой лемма не верна. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G . Согласно лемме 7.2 из [59], подгруппа KN/N субнормальна в G/N . Кроме того, каждая максимальная подгруппа M/N , не содержащая KN/N , имеет с KN/N нильпотентное пересечение. Действительно,

$$\begin{aligned} M/N \cap KN/N &= (M \cap KN)/N = (M \cap K)N/N \cong \\ &\cong M \cap K / M \cap K \cap N \in \mathfrak{N} \end{aligned}$$

Таким образом, для G/N все условия леммы выполнены. Ввиду предположения индукции KN/N — разрешимая группа. Из изоморфизма $KN/N \cong K/K \cap N$ следует разрешимость группы $K/K \cap N$.

Пусть $K \cap N \subset K$. Очевидно, $K \cap N \triangleleft\triangleleft G$. Кроме того, каждая максимальная подгруппа группы G , не содержащая $K \cap N$, имеет с $K \cap N$ нильпотентное пересечение. В результате выбора K и из $K \cap N \subset K$ следует, что $K \cap N$ — разрешимая подгруппа группы G . Отсюда и из разрешимости $K/K \cap N$ вытекает разрешимость подгруппы K .

Пусть $K \cap N = K$. Тогда $K \subseteq N$. Пусть $x \in G$, H — максимальная подгруппа группы G , которая не содержит K^x . Тогда максимальная подгруппа $H^{x^{-1}}$ не содержит K . По условию леммы $H^{x^{-1}} \cap K \in \mathfrak{N}$. Так как $(H^{x^{-1}} \cap K)^x = H \cap K^x$, то $H \cap K^x \in \mathfrak{N}$. Итак, для K^x все условия леммы выполняются, т.е. любая максимальная подгруппа группы G , не содержащая K^x , имеет с K^x нильпотентное пересечение.

Предположим, что K — непростая группа. Пусть F — нормальная максимальная подгруппа группы K . Так как для F все условия леммы выполнены, то из выбора K следует разрешимость F . Так как $F \triangleleft\triangleleft G$, то ввиду следствия 7.7.2 из [59] подгруппа F содержится в разрешимом радикале $S(G)$ группы G .

Отсюда следует, что $N \cap S(G) \supseteq F \neq 1$. Так как N — минимальная нормальная подгруппа группы G , то $N \subseteq S(G)$. Теперь из $K \subseteq N$ следует разрешимость K .

Итак, K — простая неабелева группа. Так как N — минимальная нормальная подгруппа группы G , то $N = K^{x_1} \times \dots \times K^{x_n}$, где $K^{x_i} = K$. Пусть P — силовская p -подгруппа N . Очевидно, $P \cap K^{x_i}$ — силовская p -подгруппа K^{x_i} для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому

$$P = (P \cap K^{x_1}) \times \dots \times (P \cap K^{x_n}).$$

Покажем, что

$$N_N(P) \subseteq N_{K^{x_1}}(P \cap K^{x_1}) \times \dots \times N_{K^{x_n}}(P \cap K^{x_n}) = D.$$

Пусть $y \in D$. Тогда $y = y_1 \dots y_n$, где $y_i \in N_{K^{x_i}}(P \cap K^{x_i})$. Элемент y_i нормализует $P \cap K^{x_i}$ и централизует $P \cap K^{x_j}$ для всех $j \neq i$. Поэтому $y_i \in N_N(P)$. Но тогда $y \in N_N(P)$.

Ввиду леммы Фраттини $N_G(P)N = G$. Из строения N следует, что $N_G(P) \neq G$. Пусть M — максимальная подгруппа группы G , содержащая $N_G(P)$. Тогда $MN = G$. Так как

$$N = K^{x_1} \times K^{x_2} \times \dots \times K^{x_n},$$

то найдется номер $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, для которого $K^{x_k} \not\subseteq M$. Так как $N_N(P) \subseteq M$, то $N_{K^{x_k}}(P \cap K^{x_k}) \subseteq M$. Как отмечалось выше, подгруппа K^{x_k} удовлетворяет условию теоремы. Поэтому $M \cap K^{x_k} \in \mathfrak{N}$. Так как

$$N_{K^{x_k}}(P \cap K^{x_k}) \subseteq M \cap K^{x_k},$$

то $N^{x_k}(P \cap K^{x_k}) \in \mathfrak{N}$. Из сопряженности подгрупп K и K^{x_k} следует, что $N_K(P \cap K) \in \mathfrak{N}$.

Итак, для любого простого числа p из $\pi(K)$ нормализатор силовской p -подгруппы группы K нильпотентен. По теореме 2 из [75] подгруппа K нильпотентна. Но тогда N — абелева группа. Противоречие. Лемма доказана.

3.1.2. Лемма. Пусть K — нормальная подгруппа группы G . Если $\Phi(G) \cap K = 1$, то каждая максимальная подгруппа группы G , не содержащая K , имеет с K нильпотентное пересечение тогда и только тогда, когда K удовлетворяет одному из условий:

1) K — прямое произведение абелевых минимальных нормальных подгрупп группы G ;

2) K — разрешимая группа, причем:

а) K содержит единственную минимальную нормальную подгруппу группы G , являющуюся \mathfrak{N} -корадикалом K ;

в) $K^{\mathfrak{N}}$ — силовская p -подгруппа K для некоторого простого $p \in \pi(K)$;

с) либо $K/K^{\mathfrak{N}} \subseteq \Phi(G/K^{\mathfrak{N}})$, либо $K/K^{\mathfrak{N}}$ — нефраттиниев главный фактор группы G .

Доказательство. Необходимость. Пусть для максимальной подгруппы M группы G , не содержащей K , пересечение $M \cap K$ нильпотентно. Согласно лемме 3.1.1, подгруппа K разрешима. Если K — нильпотентная группа, то ввиду леммы 7.9 из [59] K является прямым произведением некоторого числа минимальных нормальных подгрупп группы G . Предположим, что K — ненильпотентная группа. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в K . Так как $L \not\subseteq \Phi(G)$, то существует максимальная подгруппа M группы G такая, что $ML = G$ и $M \cap L = 1$. На основании тождества Дедекинда

$$(M \cap K)L = ML \cap K = K.$$

По условию леммы $M \cap K \in \mathfrak{N}$. Поэтому из

$$K/L = (M \cap K)L/L \simeq M \cap K \in \mathfrak{N}$$

следует, что $K^{\mathfrak{N}} \subseteq L$. Так как $K^{\mathfrak{N}}$ — характеристическая подгруппа K , то $K^{\mathfrak{N}} \triangleleft G$. Так как подгруппа K ненильпотентна, а L — минимальная нормальная подгруппа G , то $K^{\mathfrak{N}} = L$. Отсюда, в частности, следует, что L — единственная минимальная нормальная подгруппа G , содержащаяся в K . Так как $\Phi(G) \cap K = 1$, то, согласно лемме 7.9 из [59], $L = F(K)$. Так как L абелева, то ввиду следствия 4.1.3 из [59] $L = C_K(L)$.

Пусть L — p -группа. Предположим, что L — собственная подгруппа силовой p -подгруппы K_p группы K . Так как $(M \cap K)L = K$, то $K_p = (M \cap K)_p L$, где $(M \cap K)_p$ — силовая p -подгруппа $M \cap K$. Так как $M \cap K \in \mathfrak{N}$ и $M \cap K \triangleleft M$, то $(M \cap K)_p \triangleleft M$. Кроме того,

$$N_{K_p}((M \cap K)_p) \supset (M \cap K)_p.$$

Следовательно, $N_G((M \cap K)_p) \supset M$. Так как M — максимальная подгруппа группы G , то $(M \cap K)_p \triangleleft G$. Так как $(M \cap K)_p \neq 1$, то пришли к противоречию с условием $C_G(L) = L$. Значит, $K^{\mathfrak{N}} = L$ — силовая p -подгруппа K .

Пусть $K/L \not\cong \Phi(G/L) = \Phi/L$. Рассмотрим G -главный фактор $D/K \cap \Phi$ группы K , который является нефраттиниевым. Поэтому существует максимальная подгруппа F группы G , удовлетворяющая условиям: $K \cap \Phi \subseteq F$ и $FD = G$. Так как подгруппа K разрешима, то $F \cap D = K \cap \Phi$. Теперь из нильпотентности подгруппы $F \cap D$ и равенства $L = F(K)$ следует, что $K \cap \Phi = L$.

Значит, D/L — нефраттиниев G -главный фактор K . Легко проверяется, что

$$(F/L \cap K/L)(D/L) = K/L.$$

Если $F/L \cap K/L \neq 1$, то $L \subset F \cap K$. Так как L — силовая p -подгруппа K и $F \cap K \in \mathfrak{N}$, то $F = L \times R$, где R — p -дополнение группы F . Отсюда следует, что $R \subseteq C_K(L)$, а это противоречит условию $C_K(L) = L$. Значит, $F/L \cap K/L = 1$. Отсюда $D/L = K/L$, т.е. K/L — нефраттиниев главный фактор группы G .

Достаточность. Пусть K — разрешимая подгруппа группы G с единственной минимальной G -допустимой подгруппой, являющейся \mathfrak{N} -корадикалом K .

Пусть M — максимальная подгруппа группы G , не содержащая K . Если M не содержит $K^{\mathfrak{N}}$, то из условия леммы следует, что $M \cap K^{\mathfrak{N}} = 1$. Отсюда имеем $(M \cap K) \cap K^{\mathfrak{N}} = 1$. Теперь из изоморфизма

$$K/K^{\mathfrak{N}} = (M \cap K)K^{\mathfrak{N}}/K^{\mathfrak{N}} \cong M \cap K$$

следует, что $M \cap K \in \mathfrak{N}$. Итак, всякая максимальная подгруппа группы G , не содержащая $K^{\mathfrak{N}}$, имеет с K нильпотентное пересечение.

Пусть далее M содержит $K^{\mathfrak{N}}$. Если $K/K^{\mathfrak{N}} \subseteq \Phi(G/K^{\mathfrak{N}})$, то M содержит K , что противоречит выбору M . Итак, если $K/K^{\mathfrak{N}} \subseteq \Phi(G/K^{\mathfrak{N}})$, то каждая максимальная подгруппа группы G , не содержащая K , дополняет $K^{\mathfrak{N}}$, а потому имеет с K нильпотентное пересечение.

Пусть $K/K^{\mathfrak{N}}$ — нефраттиниев главный фактор группы G . Так как $K/K^{\mathfrak{N}}$ — абелева группа, то

$$M/K^{\mathfrak{N}}K/K^{\mathfrak{N}} = G/K^{\mathfrak{N}}$$

и

$$M/K^{\mathfrak{N}} \cap K/K^{\mathfrak{N}} = 1.$$

Отсюда, в частности, следует, что $M \cap K = K^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}$. Итак, если $K/K^{\mathfrak{N}} \not\subseteq \Phi(G/K^{\mathfrak{N}})$, то любая максимальная подгруппа группы G , не содержащая K , имеет с K нильпотентное пересечение.

Если K — прямое произведение минимальных нормальных абелевых подгрупп группы G , то $K \in \mathfrak{N}$ и поэтому из наследственности \mathfrak{N} следует $M \cap K \in \mathfrak{N}$ для любой максимальной подгруппы M группы G , не содержащей K . Лемма доказана.

3.1.3. Следствие. Пусть K — нильпотентная нормальная подгруппа группы G . Если каждая максимальная подгруппа группы G , не содержащая K , имеет с K нильпотентное пересечение, то $K \in \mathfrak{N}_{p, p'}$ для некоторого простого $p \in \pi(K)$.

Доказательство. Пусть $\Phi = \Phi(G) \cap K$. Рассмотрим факторгруппу G/Φ . Очевидно, $\Phi(G/\Phi) \cap K/\Phi = 1$ и каждая максимальная подгруппа группы G/Φ , не содержащая K/Φ , имеет с K/Φ нильпотентное пересечение. Согласно лемме 3.1.2, в этом случае K/Φ — разрешимая группа с единственной минимальной G -допустимой подгруппой $(K/\Phi)^{\mathfrak{N}} = K^{\mathfrak{N}}\Phi/\Phi$, причем: 1) либо

$$K/K^{\mathfrak{N}}\Phi \subseteq \Phi(G/K^{\mathfrak{N}}\Phi),$$

либо $K/K^{\mathfrak{N}}\Phi$ — нефраттиниев главный фактор G ; 2) $K^{\mathfrak{N}}\Phi/\Phi$ — силовская p -подгруппа K/Φ для некоторого простого $p \in \pi(K)$. Отсюда следует, что $K/\Phi \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_p$. Пусть \mathfrak{f} — класс всех p -замкнутых групп, \mathfrak{h} — класс всех разрешимых групп с нильпотентной холловской p^{\perp} -подгруппой. Тогда $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_p = \mathfrak{f} \cap \mathfrak{h}$. Классы \mathfrak{f} и \mathfrak{h} являются насыщенными формациями (насыщенность \mathfrak{h} следует из теоремы 16.2 из [59]). Но тогда и класс $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_p$ — насыщенная формация, содержащая \mathfrak{N} . Ввиду следствия 4.2.1 из [59] $K \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_p$.

3.1.4. Следствие. Пусть K — нормальная подгруппа конечной группы G . Если пересечение $M \cap K$ нильпотентно для всех K -максимальных подгрупп M , то подгруппа K является полупрямым произведением двух нильпотентных холловских подгрупп.

3.1.5. Теорема. Пусть K — нормальная подгруппа группы G , $\Phi = K \cap \Phi(G)$. Каждая максимальная подгруппа группы G , не содержащая K , имеет с K нильпотентное пересечение тогда и только тогда, когда K удовлетворяет одному из условий:

- 1) K — нильпотентная группа;
- 2) K — разрешимая группа, причем:
 - а) K/Φ содержит единственную минимальную нормальную подгруппу группы G/Φ , являющуюся \mathfrak{N} -корадикалом K/Φ ;
 - в) $K^{\mathfrak{N}}\Phi/\Phi$ — силовская p -подгруппа K/Φ для некоторого простого $p \in \pi(K)$;
 - с) либо $K/K^{\mathfrak{N}}\Phi \subseteq \Phi(G/K^{\mathfrak{N}}\Phi)$ и $\Phi K_{p'} \in \mathfrak{N}$, либо $K/K^{\mathfrak{N}}\Phi$ — нефраттиниев главный фактор группы G и $\Phi = Z_{\infty}(K)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть каждая максимальная подгруппа группы G , не содержащая K , имеет с K нильпотентное пересечение. Рассмотрим факторгруппу G/Φ . Согласно лемме 3.1.2, K/Φ удовлетворяет одному из условий:

- 1) K/Φ — прямое произведение абелевых минимальных нормальных подгрупп группы G/Φ ;
- 2) K/Φ — разрешимая группа, причем:
 - а) K/Φ содержит единственную минимальную нормальную подгруппу группы G/Φ , являющуюся \mathfrak{N} -корадикалом K/Φ ;
 - в) $(K/\Phi)^{\mathfrak{N}} = K^{\mathfrak{N}}\Phi/\Phi$ — силовская p -подгруппа K/Φ для некоторого простого $p \in \pi(K)$;

с) либо $K/K^{\mathfrak{N}}\Phi \subseteq \Phi(G/K^{\mathfrak{N}}\Phi)$, либо $K/K^{\mathfrak{N}}\Phi$ — нефраттиниев главный фактор группы G .

Если K/Φ удовлетворяет условию 1), то на основании следствия 4.2.1 из [59] $K \in \mathfrak{N}$. Пусть K/Φ удовлетворяет условию 2). Пусть $K/K^{\mathfrak{N}}\Phi \subseteq \Phi(G/K^{\mathfrak{N}}\Phi)$ и M — максимальная подгруппа G , не содержащая K . Ввиду условия теоремы $M \cap K \in \mathfrak{N}$. Очевидно,

$$(M \cap K/\Phi)(K^{\mathfrak{N}}\Phi/\Phi) = K/\Phi$$

и

$$(M \cap K/\Phi) \cap (K^{\mathfrak{N}}\Phi/\Phi) = 1.$$

Так как $K^{\mathfrak{N}}\Phi/\Phi$ — силовская p -подгруппа G/Φ , то $M \cap K/\Phi$ — p -дополнение группы K/Φ . Из сопряженности p -дополнений можем считать, что $M \cap K = K_p\Phi$, где K_p — некоторое p -дополнение группы K . Значит, $K_p\Phi \in \mathfrak{N}$.

Пусть теперь $K/K^{\mathfrak{N}}\Phi$ — нефраттиниев главный фактор группы G . Пусть $K/K^{\mathfrak{N}}\Phi = q^a$, где q — простое число. Тогда

$$K/\Phi = [K^{\mathfrak{N}}\Phi/\Phi]Q\Phi/\Phi,$$

где Q — некоторая силовская q -подгруппа K . Если максимальная подгруппа M группы G не содержит $K^{\mathfrak{N}}$, то, как и выше, показывается, что $M \cap K = \Phi Q$. Из условия теоремы следует, что $\Phi Q \in \mathfrak{N}$. Если M содержит $K^{\mathfrak{N}}$, но не содержит K , то $M \cap K = K^{\mathfrak{N}}\Phi$. Из условия теоремы следует, что $K^{\mathfrak{N}}\Phi \in \mathfrak{N}$. Заметим, что $K^{\mathfrak{N}}\Phi = P\Phi$ для некоторой силовской p -подгруппы P группы K .

Пусть Q_1 — произвольная силовская q -подгруппа K . Тогда $Q_1\Phi/\Phi$ — силовская q -подгруппа K/Φ . По теореме Силова существует $x \in K$ такой, что $Q_1\Phi = (Q\Phi)^x$. Значит, $Q_1\Phi \in \mathfrak{N}$ и $N_K(Q_1) \supseteq \Phi$. Аналогично показывается, что $N_K(P_1) \supseteq \Phi$ для любой силовской p -подгруппы P_1 группы K . Если R — силовская r -подгруппа K ($r \neq p$ и $r \neq q$), то R — силовская r -подгруппа Φ и из нильпотентности Φ имеем $N_K(R) \supseteq \Phi$.

Итак, нормализатор в K любой силовой подгруппы из K содержит Φ . Но тогда и любой системный нормализатор группы K содержит Φ . Согласно следствию 21.1.1 из [59], $\Phi \subseteq Z_{\infty}(K)$.

Достаточность. Если K — нильпотентная группа, то утверждение теоремы очевидно. Пусть K — разрешимая группа, удовлетворяющая условиям а) и в) теоремы. Пусть

$$K/K^* \Phi \subseteq \Phi(G/K^* \Phi)$$

и $\Phi K_p \in \mathfrak{N}$. Если M — максимальная подгруппа G , не содержащая K , то

$$K/\Phi = (M \cap K)/\Phi K^* \Phi/\Phi$$

и

$$(M \cap K)\Phi \cap K^* \Phi/\Phi = 1.$$

Так как $K^* \Phi/\Phi$ — силовая p -подгруппа K/Φ , то $(M \cap K)/\Phi$ — p -дополнение K/Φ . Из сопряженности p -дополнений следует, что $M \cap K = K_p \Phi$, где $K_p \Phi$ — некоторое p -дополнение K . Отсюда следует, что $M \cap K \in \mathfrak{N}$.

Пусть $K/K^* \Phi$ — нефраттиниев главный фактор группы G и $\Phi \subseteq Z_{\infty}(K)$. Пусть M — максимальная подгруппа G . На основании леммы 3.1.2 $M \cap K/\Phi$ — нильпотентная группа. Так как $\Phi \subseteq Z_{\infty}(K)$, то $\Phi \subseteq Z_{\infty}(M \cap K)$. Отсюда следует, что $M \cap K \in \mathfrak{N}$. Теорема доказана.

3.1.6. Замечание. Пусть K — нормальная подгруппа группы G и каждая максимальная подгруппа G , не содержащая K , имеет с K нильпотентное пересечение. Если группа G нильпотентна и $K = G$, то G — группа Шмидта. Из теоремы 3.1.5 следует, что, когда подгруппа K нильпотентна, то ее свойства во многом напоминают свойства групп Шмидта. Поэтому естественно предположить, что K будет группой Шмидта, если $K \notin \mathfrak{N}$. Однако следующие примеры показывают, что это не так.

3.1.7. Пример. Пусть $H_1 = [Z_2 \times Z_2]Z_3$. Ввиду леммы 18.8 из [61] существует точный и неприводимый $F_p[H]$ -модуль V , где $p \neq 2, 3$, а F_p — поле из p элементов. Пусть $G = [V]H$, $K = [V](Z_2 \times Z_2)$. Легко проверяется, что каждая максимальная подгруппа группы

G , не содержащая K , имеет с K нильпотентное пересечение. В то же время K не является группой Шмидта.

3.1.8. Пример. Пусть Z_{17} — циклическая группа порядка 17,

$$G = [Z_{17}]\text{Aut}Z_{17} = [Z_{17}]Z_{16},$$

S — подгруппа порядка 8 группы Z_{16} . Если $K = [Z_{17}]S$, то каждая максимальная подгруппа группы G , не содержащая K , имеет с K нильпотентное пересечение, однако сама подгруппа K группой Шмидта не является.

Отметим еще следующее. Пример 3.1.7 соответствует той ситуации в теореме 3.1.5, когда $K/K^{\mathfrak{N}}$ — нефраттиниев главный фактор группы G , а пример 3.1.8 — ситуации, когда

$$K/K^{\mathfrak{N}} \subseteq \Phi(G/K^{\mathfrak{N}}).$$

3.2. Группы с заданной системой максимальных подгрупп примарных индексов

В настоящем параграфе исследуется нормальное строение группы, у которой все максимальные подгруппы, не содержащие некоторую ее субнормальную подгруппу, имеют примарный индекс.

История рассматриваемого вопроса начинается с теоремы Гуральника [95]. Сущность ее состоит в том, что индекс любой максимальной подгруппы группы G примарен в том и только в том случае, когда либо группа G разрешима, либо $G/S(G) \cong \text{PSL}(2,7)$ (напомним, что $S(G)$ — разрешимый радикал группы G , т. е. наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G). Следующая теорема развивает этот результат в двух направлениях. Во-первых, условие примарности индексов налагается лишь на те максимальные подгруппы группы G , которые не содержат ее некоторую субнормальную подгруппу K . Во-вторых, показывается, что отмеченное ограничение на индексы максимальных подгрупп существенно влияет не только на строение подгруппы K , но и на строение самой группы G .

3.2.1. Теорема. Пусть K — субнормальная подгруппа группы G . Тогда и только тогда каждая максимальная подгруппа из G , не содержащая K , имеет примарный индекс, когда выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) K разрешима;
- 2) группа $G/S(K^G)$ представима в виде

$$G/S(K^G) = K^G/S(K^G) \times H/S(K^G),$$

причем

$$K^G/S(K^G) \approx \text{PSL}(2,7)$$

и $H = H^f$, где $f = \text{form } \text{PSL}(2,7)$.

Напомним, что через K^G обозначается нормальное замыкание подгруппы K в группе G , т.е.

$$K^G = \langle K \mid x \in G \rangle.$$

Через $\text{form } \text{PSL}(2,7)$ обозначается пересечение всех формаций, содержащих $\text{PSL}(2,7)$. Отметим, что каждая группа из $\text{form } \text{PSL}(2,7)$ есть конечное прямое произведение групп, изоморфных $\text{PSL}(2,7)$.

Доказательству теоремы предпошлим несколько вспомогательных утверждений.

3.2.2. Лемма. Пусть K — минимальная нормальная в G подгруппа, а L — простая нормальная в K подгруппа. Если $N_G(L) = LC_G(L)$, то $G = KC_G(D)$, где D — некоторая диагональ в K .

Доказательство. Пусть $N = N_G(L)$ и

$$G = N_{x_1} \cup N_{x_2} \cup \dots \cup N_{x_t}$$

— разложение группы G в правые смежные классы по подгруппе N , где x_i — единичный элемент группы G . Тогда $L_i = L^{x_i}$ будет простой нормальной в K подгруппой. Ясно, что $L_i \cap L_j = 1$ при $i \neq j$ и

$$K = L_1 \times L_2 \times \dots \times L_t.$$

Пусть $D = \{\prod_{i=1}^t l^{x_i} \mid l \in L\}$ — диагональ прямого произведения. Для произвольного элемента $y \in G$ имеем: $L^{x_i y} = L_i^y = L_j = L^{x_j}$, т.е.

$$x_i g x_j^{-1} \in N = C_G(L) L.$$

Поэтому $x_i g x_j^{-1} = cm$, где $c \in C_G(L)$, а $m \in L$. Заметим, что если i пробегает значения $1, 2, \dots, t$, то j также пробегает все эти значения. Теперь

$$(\prod_{i=1}^t l^{x_i})^g = \prod_{i=1}^t l^{x_i g} = \prod_{j=1}^t l^{cmx_j} = \prod_{j=1}^t l^{mx_j} = \prod_{i=1}^t l^{mx_i} = \prod_{i=1}^t l^{x_i x_i^{-1} m x_i},$$

откуда $g(x_i^{-1} m x_i)^{-1} \in C_G(D)$ и

$$g \in C_G(D)(x_i^{-1} m x_i) \subseteq C_G(D) K.$$

Лемма доказана.

3.2.3. Лемма. Пусть K — прямое произведение групп, изоморфных простой группе L . Если A — собственная в K подгруппа, содержащая некоторую диагональ, то A изоморфна прямому произведению групп, изоморфных L . В частности, индекс $|K : A| = |L|^n$, где n — натуральное число.

Доказательство проведем индукцией по числу прямых сомножителей в K . Пусть $K = L_1 \times L_2 \times \dots \times L_t$ — прямое произведение простых групп, изоморфных L . Пусть φ_i — изоморфизм L на L_i для $i = 1, 2, \dots, t$ и $D = \{\prod_{i=1}^t l^{\varphi_i} \mid l \in L\}$ — диагональ в K , содержащаяся в A .

Предположим, что $A_1 = A \cap L_1 \neq 1$. Тогда A_1 нормальна в A и D нормализует A_1 . Поэтому для любого $l \in L$ имеем

$$A_1 = A^{\prod_{i=1}^t l^{\varphi_i}} = A_1^{l^{\varphi_1}}$$

и A_1 нормальна в L_1 . Так как L_1 — простая группа, то $A \supseteq L_1$ и

$$A = L_1 \times (A \cap L_2 \dots L_t).$$

Очевидно, что $F = \{\prod_{i=2}^t l^{\varphi_i} \mid l \in L\}$ — диагональ $L_2 \dots L_t$. Так как $L_1 \subseteq A$ и $D \subseteq A$, то

$$(l^{\varphi_1})^{-1} \prod_{i=1}^t l^{\varphi_i} = \prod_{i=2}^t l^{\varphi_i} \in A,$$

т.е. $F \subseteq A$. По индукции подгруппа $A \cap L_2 \dots L_t$ изоморфна прямому произведению нескольких копий L . Поэтому такой будет и подгруппа A .

Пусть теперь $A \cap L_1 = 1$. Рассмотрим изоморфизм

$$K/L_1 \cong L_2 \times \dots \times L_r.$$

При этом изоморфизме подгруппа $\bar{A} = AL_1/L_1$ содержит диагональ $\bar{D} = DL_1/L_1$ группы K/L_1 . По индукции \bar{A} изоморфна прямому произведению нескольких копий L . Так как $A \cong \bar{A}$, то лемма доказана полностью.

3.2.4. Лемма. Пусть K — субнормальная подгруппа группы G . Если каждая максимальная подгруппа из G , не содержащая K , имеет примарный индекс, то

$$G/S(K^G) = K^G/S(K^G) \times H/S(K^G),$$

причем либо $K^G/S(K^G) = 1$, либо $K^G/S(K^G) \cong \text{PSL}(2,7)$.

Доказательство. Обозначим $K^G = L$. Предположим, что подгруппа K разрешима. Тогда на основании следствия 7.7.2 из [59] L — разрешимая группа. В этом случае, очевидно, лемма справедлива.

Итак, подгруппа K не является разрешимой. Поэтому существует по крайней мере одна максимальная подгруппа группы G , не содержащая L . Пусть M — одна из таких подгрупп. Так как $L = \langle K^x \mid x \in G \rangle$, то найдется такой $x \in G$, что M не содержит K^x . Тогда M^x не содержит K . По условию леммы $|G : M^{x^{-1}}| = p^\alpha$ для некоторого простого p , но тогда $|G : M| = p^\alpha$. Таким образом, для L все условия леммы выполняются.

Поэтому будем считать далее, что $K < G$. Покажем, что

$$G/S(K) = K/S(K) \times H/S(K),$$

где $K/S(K) \cong \text{PSL}(2,7)$. Применим индукцию по величине суммы $|G| + |K|$.

Предположим, что $S(K) = R \neq 1$. Тогда факторгруппа $\bar{G} = G/R$ имеет нормальную подгруппу $\bar{K} = K/R$. Если максимальная подгруппа $\bar{M} = M/R$ группы \bar{G} не содержит \bar{K} , то максимальная подгруппа M группы G не содержит K . Значит, индекс $|\bar{G} : \bar{M}| = |G : M|$ примарен. Таким образом, для группы \bar{G} и ее нормальной подгруппы \bar{K} выполняются все условия леммы. Так как

$$|\bar{G}| + |\bar{K}| < |G| + |K|,$$

то по предложению индукции имеем $\bar{G} = \bar{K} \times \bar{H}$, где либо $\bar{K} = 1$, либо $\bar{K} \cong \text{PSL}(2,7)$. Отсюда следует, что

$$G/S(K) = K/S(K) \times H/S(K),$$

причем либо $K/S(K) = 1$, либо $K/S(K) \cong \text{PSL}(2,7)$.

Значит, далее полагаем $S(K) = 1$. Предположим, что найдется нормальная в G подгруппа N , которая собственно содержится в K . Очевидно, $S(N) \subseteq S(K) = 1$. Кроме того, любая максимальная в G подгруппа M , не содержащая N , не содержит K . Поэтому индекс $|G : M|$ примарен. Так как

$$|G| + |N| < |G| + |K|,$$

то ввиду выбора группы G и ее подгруппы K имеем $G = N \times H_1$, где $N \cong \text{PSL}(2,7)$. Очевидно, $H_1 = C_G(N)$ и поэтому $G = N \times C_G(N)$. В силу тождества Дедекинда

$$K = N \times (K \cap C_G(N)),$$

причем $K \cap C_G(N) \triangleleft G$. Как и для N , показывается, что

$$F = K \cap C_G(N) \cong \text{PSL}(2,7)$$

и

$$G = F \times C_G(F) = N \times F \times C_G(NF) = K \times C_G(K).$$

По лемме 3.2.3 диагональ D в $N \times F = K$ является максимальной подгруппой группы K , причем $|K : D| = 168$. Поэтому подгруппа $M = D \times C_G(NF)$ максимальна в G и $|G : M| = 168$. Очевидно, M не содержит K . Пришли к противоречию с условием леммы.

Итак, K — минимальная нормальная подгруппа группы G . Пусть M — максимальная подгруппа G , не содержащая K . По условию леммы $|G : M| = p^a$, где p — некоторое простое число. Кроме того, $G = MK$ и

$$p^a = |G : M| = |K : K \cap M|,$$

т.е. p делит порядок K . Пусть P — силовская p -подгруппа K . Согласно лемме Фраттини, $KN_G(P) = G$, поэтому для максимальной в G подгруппы S , содержащей $N_G(P)$, индекс

$$|G : S| = |K : K \cap S|$$

будет взаимно просто с p . По условию леммы $|G : S| = q^a$, где q — простое число, отличное от p .

Итак, индексы подгрупп $M \cap K$ и $S \cap K$ в K взаимно просты и равны соответственно p^α и q^a . Так как K — минимальная нормальная подгруппа G , то $K = L_1 \times L_2 \times \dots \times L_t$ — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что L_1 не содержится в M . Тогда

$$|L_1 : L_1 \cap M| = |L_1(K \cap M) : (K \cap M)|$$

делит $|K : K \cap M| = p^\alpha$. Таким образом, простая группа L_1 содержит подгруппу $L_1 \cap M$ примарного индекса. Так как подгруппы L_1, L_2, \dots, L_t сопряжены, то можем считать, что L_1 не содержится в S , а поэтому $L_1 \cap S$ будет иметь в L_1 примарный индекс q^a . Следовательно, простая группа L_1 содержит подгруппы $M \cap L_1$ и $S \cap L_1$ взаимно простых примарных индексов. По теореме Гуральника [95] $L \cap L_1 \simeq \text{PSL}(2, 7)$.

Допустим, что $L_1 C_G(L_1) \neq N_G(L_1)$. Тогда

$$N_G(L_1)/C_G(L_1) \simeq \text{Aut} L_1 \simeq \text{PGL}(2, 7).$$

Пусть T — силовская 2-подгруппа группы K . По лемме Фраттини $G = KN_G(T)$. Теперь, основываясь на тождестве Дедекинда,

$$N_G(L_1) = K(N_G(L_1) \cap N_G(T)),$$

т.е. существует элемент $x \in N_G(T)$, который на L_1 индуцирует внешний автоморфизм. Пусть F — максимальная подгруппа группы G , содержащая $N_G(T)$. Если $L_1 \subseteq F$, то

$$K = L_1^G = L_1^{KF} = L_1^F \subseteq F,$$

что противоречит равенству $G = KF$. Следовательно, $L_1 \cap F$ — собственная в L_1 подгруппа, допустимая относительно внешнего автоморфизма, индуцированного элементом x . В этом случае

$$21 = |L_1 \cap \mathfrak{H}| = |G : \mathfrak{H}|,$$

что противоречит условию леммы.

Таким образом, $L_1 C_G(L) = N_G(L_1)$. Пусть $t > 1$. В этом случае по лемме 3.2.2 $G = KC_G(D)$, где D — некоторая диагональ в K . Пусть M — максимальная в G подгруппа, надстроенная над $DC_G(D)$. Тогда $M = (M \cap K)C_G(D)$. Так как $D \subseteq M \cap K$, то по лемме 3.2.3 подгруппа $M \cap K$ имеет в K индекс, равный 168^n для некоторого n . Кроме того,

$$|G : M| = |K : M \cap K| = 168^n$$

и M не содержит K . Противоречие с условием леммы.

Итак, $t = 1$, т.е. $L_1 = K$. В этом случае $G = K \times C_G(K)$ и $K \simeq \text{PSL}(2,7)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.2.1. Необходимость. Пусть каждая максимальная подгруппа группы G , не содержащая K , имеет примарный индекс. Пусть подгруппа K не является разрешимой. Ввиду леммы 3.2.4 имеем

$$G/S(K^G) = K^G/S(K^G) \times H/S(K^G),$$

где $K^G/S(K^G) \simeq \text{PSL}(2,7)$. Обозначим $K^G = L$. Предположим, что H^f — собственная подгруппа H . Если $H^f \neq 1$, то, переходя к факторгруппе G/H^f , имеем

$$\bar{G}/S(\bar{L}) = \bar{L}/S(\bar{L}) \times \bar{H}/S(\bar{L}),$$

где $\bar{G} = G/H^f$, $\bar{L} = LH^f/H^f$, $\bar{H} = H/H^f$. Так как $|\bar{G}| < |G|$, то по индукции $\bar{H}^f = \bar{H}$. По лемме 1.2 из [59]

$$\bar{H}^f = (H/H^f)^f = H^f/H^f.$$

Поэтому $H/H^f = H^f/H^f$, а значит, $H = H^f$ — противоречие.

Следовательно, $H^f = 1$, а значит, $H \in \mathfrak{f}$. В этом случае $S(L) = 1$ и $G = K \times H$, где $K \simeq \text{PSL}(2,7)$; $H \in \text{form } \text{PSL}(2,7)$. Из строения формации \mathfrak{f} имеем $H = H_1 \times \dots \times H_t$, где $H_i \simeq \text{PSL}(2,7)$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Пусть D — диагональ группы

$$G = K \times H_1 \times \dots \times H_t.$$

Пусть $t > 1$. Тогда по лемме 3.2.3 $M = DH_1 \dots H_{t-1}$ — максимальная подгруппа G , не содержащая K . Индекс этой подгруппы в G равен 168, противоречие с условием. Значит, $t = 1$. Тогда сама подгруппа D максимальна в G . Так как $|G : D| = 168$ и D не содержит K , то снова приходим к противоречию. Значит, остается положить $H^f = H$.

Достаточность. Пусть $K \triangleleft G$ и выполняется одно из утверждений 1) или 2) теоремы. Если подгруппа K разрешима, то, очевидно, любая максимальная подгруппа группы G , не содержащая K , имеет примарный индекс.

Значит, подгруппа K не является разрешимой. Обозначим $L = K^G$. Тогда $G/S(L) = L/S(L) \times H/S(L)$, $L/S(L) \cong \text{PSL}(2,7)$ и $H = H^f$. Пусть M — максимальная подгруппа группы G , не содержащая L . Если M не содержит $S(L)$, то индекс $|G : M|$ примарен. Поэтому $M \supseteq S(L)$. Если $S(L) \neq 1$, то, переходя к факторгруппе $G/S(L)$, получаем по индукции, что индекс

$$|G : M| = |G/S(L) : M/S(L)|$$

примарен. Значит, $S(L) = 1$. В этом случае $K = L \cong \text{PSL}(2,7)$, $G = K \times H$, $H^f = H$.

Предположим, что M не содержит H . Тогда

$$N_G(M \cap H) \supseteq \langle M, K \rangle = G,$$

M — максимальная подгруппа G и M не содержит K . Если $M \cap H \neq 1$, то по индукции индекс

$$|G : M| = |G/M \cap H : M/M \cap H|$$

примарен. Поэтому полагаем далее, что $M \cap H = 1$. Тогда из максимальнойности M в G имеем

$$M \cong MH/H \cong KH/H \cong K \cong \text{PSL}(2,7).$$

Допустим, что $M \cap K \neq 1$, тогда из $K \triangleleft G$ следует $M \cap K \triangleleft M$, что противоречит простоте группы M . Значит, $M \cap K = 1$. Но тогда

$$H \cong HK/K = MK/K \cong M/M \cap K \cong M \cong \text{PSL}(2,7).$$

Пришли к противоречию с условием $H = H^f$.

Значит, M содержит H . Тогда M/H — максимальная подгруппа группы G/H . Так как $G/H \cong \text{PSL}(2,7)$, то либо $|G : M| = 8$, либо $|G : M| = 7$.

Итак, индекс любой максимальной подгруппы группы G , не содержащей K , примарен. Теорема доказана.

3.2.5. Следствие. Пусть K — нормальная подгруппа группы G . Тогда и только тогда каждая максимальная подгруппа из G , не содержащая K , имеет примарный индекс, когда выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) K разрешима;
- 2) $G/S(K) = K/S(K) \times H/S(K)$, причем $K/S(K) \cong \text{PSL}(2,7)$, $H = H^{\text{formPSL}(2,7)}$.

3.2.6. Следствие. Пусть K — субнормальная подгруппа группы G . Если каждая максимальная подгруппа группы G , не содержащая K , имеет примарный индекс, то либо K разрешима, либо $K/S(K) \cong \text{PSL}(2,7)$.

3.3. K -максимальные подгруппы

3.3.1. Определение. Пусть K — нормальная подгруппа конечной группы G . Максимальная в G подгруппа M называется K -максимальной, если M не содержит K и $M \cap K \neq 1$.

В настоящем параграфе устанавливаются достаточные признаки частичной сверхразрешимости и разрешимости подгруппы K при ограничениях на индексы K -максимальных подгрупп.

Следующий пример показывает, что в конечной группе с неразрешимой нормальной подгруппой K множество K -максимальных подгрупп может не исчерпывать множество всех максимальных подгрупп, не содержащих K .

3.3.2. Пример. Пусть $G = A_5 \text{ wr } A_6$ — регулярное сплетение знакопеременных групп A_5 и A_6 . Пусть $G = [K]A_6$, где K — база сплетения. Тогда (см., например, [86]) K дополняется максимальной в G подгруппой M , изоморфной A_6 .

Пусть G — группа, а K — ее нормальная подгруппа. Через $m(G, K) = \{M \subset G \mid K \text{ не содержится в } M\}$ обозначим совокупность максимальных подгрупп из G , не содержащих K , а через $m_1(G, K) = \{M \in m(G, K) \mid M \cap K \neq 1\}$ — множество тех максимальных в G подгрупп, которые не содержат K и с K пересекаются по подгруппе, отличной от единичной. Подгруппы из $m_1(G, K)$ являются K -максимальными подгруппами. Ясно, что

$m_1(G, K) \subseteq m(G, K)$ и что в случае $m(G, K) = \emptyset$ подгруппа K содержится в подгруппе Фраттини группы G .

3.3.3. Лемма. Если $m_1(G, K) = \emptyset$, то K нильпотентна и либо $K \subseteq \Phi(G)$, либо K — минимальная нормальная подгруппа.

Доказательство. Пусть P — силовская подгруппа из K . Предположим, что подгруппа P ненормальна в G , и пусть M — максимальная в G подгруппа, содержащая нормализатор $N_G(P)$ подгруппы P . Так как $P \subseteq M \cap K$, то $M \cap K \neq 1$. По лемме Фраттини $G = KN_G(P) \subseteq KM$, поэтому K не содержится в M . Значит, $M \in m_1(G, K)$. Противоречие. Итак, все силовские подгруппы из K нормальны в G , поэтому подгруппа K нильпотентна.

Пусть K не содержится в подгруппе Фраттини $\Phi(G)$ группы G . Тогда существует максимальная подгруппа H , не содержащая K . Так как $m_1(G, K) = \emptyset$, то $H \cap K = 1$ и $G = [H]K$. Из максимальной H следует, что K — минимальная нормальная подгруппа. Лемма доказана.

3.3.4. Лемма. Если K — не минимальная нормальная в G подгруппа, то $m(G, K) = m_1(G, K)$. Если K — минимальная нормальная подгруппа и K абелева, то $m_1(G, K) = \emptyset$.

Доказательство. Предположим, что $m(G, K) \neq m_1(G, K)$, и пусть $M \in m(G, K) \setminus m_1(G, K)$. Тогда M — максимальная в G подгруппа, не содержащая K , и $M \cap K = 1$. Если L — нормальная в G подгруппа из K , то ML — подгруппа в G . Если $G = ML$, то $L = K$. Если $ML = M$, то $L = 1$. Значит, K — минимальная нормальная в G подгруппа. Противоречие. Поэтому допущение неверно и $m(G, K) = m_1(G, K)$.

Пусть K — абелева минимальная нормальная в G подгруппа. Предположим, что $m_1(G, K) \neq \emptyset$, и пусть $H \in m_1(G, K)$. Тогда $H_1 = H \cap K \neq 1$ и подгруппа H_1 нормальна в H и K . Поэтому H_1 нормальна в G , что противоречит минимальности K . Лемма доказана.

3.3.5. Лемма. Если K и L — нормальные в G подгруппы и $L \subseteq K$, то $m_1(G, L) \subseteq m_1(G, K)$.

Доказательство. Пусть $M \in m_1(G, L)$. Тогда M не содержит L и $M \cap L \neq 1$. Так как $L \subseteq K$, то M не содержит K и $M \cap K \subseteq M \cap L \neq 1$. Поэтому $M \in m_1(G, K)$. Лемма доказана.

3.3.6. Лемма. Если L — нормальная в G подгруппа, то

$$m_1(G/L, KL/L) = \{M/L \mid L \subseteq M \in m_1(G, K), M \cap K \not\subseteq L\}.$$

Доказательство. Пусть $M/L \in m_1(G/L, KL/L)$. Тогда M/L не содержит KL/L , поэтому M не содержит K . Так как

$$L/L \neq M/L \cap KL/L = M \cap KL/L = (M \cap K)L/L,$$

то $M \cap K \not\subseteq L$ и $M \in m_1(G, K)$.

Обратно, если $L \subseteq M \in m_1(G, K)$ и $M \cap K \not\subseteq L$, то M/L — максимальная в G/L подгруппа, не содержащая KL/L , и $ML/L \cap KL/L = (M \cap K)L/L \neq L/L$, т.е. $M/L \in m_1(G/L, KL/L)$. Лемма доказана.

Пусть π — некоторое множество простых чисел, а π' — дополнение к π во множестве всех простых чисел. Конечная группа называется π -обособленной, если каждый ее главный фактор является π -группой либо π' -группой. В силу теоремы Фейта — Томпсона о разрешимости групп нечетного порядка каждая конечная π -обособленная группа либо π -разрешима, либо π' -разрешима.

3.3.7. Лемма. Если индекс каждой подгруппы из $m_1(G, K)$ есть простое число или равен квадрату простого числа, то K разрешима.

Доказательство. Если $m(G, K) = m_1(G, K)$, то K разрешима по теореме 1 из [22]. Пусть $m(G, K) \neq m_1(G, K)$. По лемме 3.3.4 подгруппа K — минимальная нормальная. Пусть p — наибольшее простое число, делящее порядок K , и P — силовская p -подгруппа из K . Если подгруппа P нормальна в G , то $P = K$ и K разрешима. Значит, P ненормальна, а по лемме Фраттини $G = N_G(P)K$. Теперь максимальная в G подгруппа M , содержащая $N = N_G(P)$, будет принадлежать $m_1(G, K)$ и по условию

$$|G : M| = |K : K \cap M|$$

равно q или q^2 . Так как N — нормализатор силовской подгруппы P в группе G и в группе M , то по третьей теореме Силова $|G : N| \equiv 1 \pmod{p}$, $|M : N| \equiv 1 \pmod{p}$. Теперь q^2 или

$$q = |K : KM| = |G : M| = |G : N| / |M : N| \equiv 1 \pmod{p}.$$

Так как $q < p$, то p делит $q^2 - 1 = (q - 1)(q + 1)$ и $p = q + 1$. Последнее возможно только при $p = 3$, $q = 2$. Значит, K — $\{2, 3\}$ -группа, поэтому K разрешима.

3.3.8. Лемма. Пусть K — π -обособленная нормальная подгруппа группы G и пусть индекс каждой подгруппы из $m_1(G, K)$ либо не делится на простые числа из π , либо является простым числом из π , либо равен квадрату простого числа из π . Тогда K π -разрешима.

Доказательство. Если $m_1(G, K) = m(G, K)$, то лемма 3.3.8 превращается в лемму 3.1 из [57], поэтому K π -разрешима. Пусть $m_1(G, K) \neq m(G, K)$. Тогда K — минимальная нормальная в G подгруппа по лемме 3.3.4. Так как K — π -обособленная группа, то K — π -группа. Поскольку $G = MK$ для всех $M \in m_1(G, K)$, то индекс каждой K -максимальной подгруппы является простым числом либо равен квадрату простого числа. Теперь подгруппа K разрешима по лемме 3.3.7. Лемма доказана.

3.3.9. Теорема. Пусть K — π -обособленная нормальная подгруппа группы G и пусть индекс каждой подгруппы из $m_1(G, K)$ либо равен некоторому простому числу из π , либо не делится ни на одно простое число из π . Тогда подгруппа K π -сверхразрешима.

Доказательство. Если $m(G, K) = m_1(G, K)$, то K π -сверхразрешима по теореме 3.1 [57]. Пусть $m(G, K) \neq m_1(G, K)$. Тогда по лемме 3.3.4 K — минимальная нормальная подгруппа. По условию K — π -обособленная подгруппа, значит, либо K — π' -группа, либо K — π -группа. Если K — π' -группа, то K π -сверхразрешима. Если K — π -группа, то по лемме 3.3.8 подгруппа K разрешима, а значит, абелева, т.е. опять K π -сверхразрешима. Теорема доказана.

3.3.10. Лемма. Если каждая K -максимальная подгруппа имеет примарный индекс, то либо K разрешима, либо $K/S(K)$ изоморфна $PSL(2, 7)$.

Доказательство проведем индукцией по порядку группы G . Предположим, что $R = S(K) \neq 1$. Тогда факторгруппа $\bar{G} = G/R$ содержит нормальную подгруппу $\bar{K} = K/R$. Если $\bar{M} = M/R$ — K -максимальная в \bar{G} подгруппа, то \bar{M} не содержит \bar{K} и $\bar{M} \cap \bar{K} \neq 1$. Поэтому M не содержит K и $M \cap K \neq 1$. Теперь к группе \bar{G} применима индукция. Так как $S(\bar{K}) = 1$, то $\bar{K} = 1$, либо \bar{K} изоморфна $PSL(2, 7)$. Следовательно, либо подгруппа $K = S(K)$ разрешима, либо $K/S(G) \simeq PSL(2, 7)$.

Теперь следует считать, что $S(K) = 1$. Допустим, что существует нормальная в G подгруппа L , которая собственно содержится в K . Ясно, что $S(L) \subseteq S(K) = 1$. Кроме того, если M — L -максимальная в G подгруппа, то M не содержит L и $M \cap K \neq 1$. Но тогда M не содержит K и $M \cap K \neq 1$, т.е. каждая L -максимальная подгруппа будет K -максимальной. По индукции $L \simeq \text{PSL}(2,7)$.

Допустим, что $\text{LC}_G(L)$ — собственная в G подгруппа. Так как

$$\text{Aut PSL}(2,7) = \text{PGL}(2,7),$$

то $G/C_G(L) \simeq \text{PSL}(2,7)$, а подгруппа $\text{LC}_G(L)$ в группе L имеет индекс 2. Но в $\text{PGL}(2,7)$ есть максимальная подгруппа индекса 14, поэтому в G имеется максимальная подгруппа M , которая содержит $C_G(L)$, причем $|G : M| = 14$. Ясно, что M не содержит L и $M \cap K \neq 1$. Значит, M будет K -максимальной подгруппой и ее индекс должен быть примарным. Противоречие.

Таким образом, $\text{LC}_G(L) = G$, а поскольку $L \cap C_G(L) = Z(L) = 1$, то $G = L \times C_G(L)$. Далее $K = L \times (K \cap C_G(L))$, причем $H = K \cap C_G(L)$ — нормальная в G подгруппа. Поэтому $H \simeq \text{PSL}(2,7)$ и

$$G = H \times C_G(H) = H \times L \times (C_G(H) \cap C_G(L)).$$

Пусть D — диагональ в $H \times L = K$. По лемме 3.2.3 подгруппа D — максимальная в K подгруппа индекса 168. Поэтому

$$F = D \times (C_G(H) \cap C_G(L))$$

— максимальная в G подгруппа индекса 168. Так как $F \cap K \subseteq D \neq 1$ и F не содержит K , то F — K -максимальная подгруппа непримарного индекса. Противоречие.

Итак, K — минимальная нормальная в G подгруппа. Пусть M — K -максимальная в G подгруппа. Она существует по лемме 3.3.3. По условию леммы $|G : M| = p^a$, где p — некоторое простое число. Кроме того, $G = MK$ и

$$p^a = |G : M| = |K : K \cap M|,$$

т.е. p делит порядок K . Если P — силовская p -подгруппа из K , то $\text{KN}_G(P) = G$ и для максимальной в G подгруппы S , содержащей $\text{N}_G(P)$, индекс

$$|G:S| = |K:K \cap S|$$

будет взаимно прост с p . Ясно, что S — K -максимальная в G подгруппа, а по условию леммы ее индекс равен q^b , где q — простое число, отличное от p .

Значит, группа G содержит две K -максимальные подгруппы M и S взаимно простых примарных индексов p^a и q^b . Поэтому и в K подгруппы $M \cap K$ и $S \cap K$ имеют индексы p^a и q^b соответственно. Так как $K = L_1 \times L_2 \times \dots \times L_t$ есть прямое произведение изоморфных простых групп, то можно считать, что L_1 не содержится в M . Теперь

$$|L_1 : L_1 \cap M| = |L_1 K \cap M : K \cap M|$$

будет делить $|K : K \cap M| = p^a$, т.е. простая группа L_1 содержит подгруппу $L_1 \cap M$ примарного индекса. Ввиду изоморфизма прямых множителей можно считать, что L_1 не содержится в S , поэтому $S \cap L_1$ будет иметь в L_1 примарный индекс q^b .

Итак, простая группа L_1 содержит подгруппы $M \cap L_1$ и $S \cap L_1$ взаимно простых примарных индексов. По теореме Гуральника [95] группа $L_1 \cong \text{PSL}(2,7)$.

Допустим, что $L_1 C_G(L_1) \neq N_G(L_1)$. Так как факторгруппа $N_G(L_1)/C_G(L_1)$ изоморфна группе автоморфизмов группы $L_1 \cong \text{PSL}(2,7)$, то

$$N_G(L_1)/C_G(L_1) \cong \text{PGL}(2,7).$$

По лемме Фраттини $G = KN_G(T)$, где T — силовская 2-подгруппа из K , поэтому

$$N_G(L_1) = K(N_G(L_1) \cap N_G(T)),$$

т.е. в $N_G(T)$ существует элемент x , который на L_1 индуцирует внешний автоморфизм. Если F — максимальная в G подгруппа, содержащая $N_G(T)$, то F будет K -максимальной в G подгруппой. Если $L_1 \subseteq F$, то $K = L_1^G = L_1^{KF} = L_1^F \subseteq F$ и приходим к противоречию. Поэтому $L_1 \cap F$ — собственная в L_1 подгруппа, допустимая относительно внешнего автоморфизма. В этом случае

$$21 = |L_1 : L_1 \cap F| = |G : F|,$$

что противоречит условию леммы.

Таким образом, $L_1 C_G(L_1) = N_G(L_1)$. В этом случае $G = KC_G(D)$ по лемме 3.2.2, где D — некоторая диагональ в K . Пусть M — максимальная в G подгруппа, надстроенная над $DC_G(D)$. Тогда $M = (M \cap K)C_G(D)$. Так как $D \subseteq M \cap K$, то по лемме 3.2.3 подгруппа $M \cap K$ имеет индекс в K , равный 168^n для натурального n . Кроме того,

$$|G : M| = |M : K \cap M| = 168^n,$$

и M является K -максимальной подгруппой. Противоречие. Лемма доказана.

3.3.11. Следствие. Если каждая K -максимальная в G подгруппа имеет примарный индекс, отличный от 7 и 8, то подгруппа K разрешима.

Следующая лемма является прямым следствием леммы 3.3.1.

3.3.12. Лемма. Если для всякой K -максимальной подгруппы M пересечение $M \cap K$ нильпотентно, то K — разрешимая группа.

3.3.13. Теорема. Если для каждой K -максимальной подгруппы M группы G либо подгруппа $M \cap K$ нильпотентна, либо индекс $|G : M|$ примарен и не равен 7 и 8, то подгруппа K разрешима.

Доказательство проведем индукцией по числу $|G| + |K|$. Если N — нормальная в G подгруппа $\neq 1$, то факторгруппа $\bar{G} = G/N$ содержит нормальную подгруппу $\bar{K} = KN/N$. Пусть $\bar{M} = M/N$ — \bar{K} -максимальная в \bar{G} подгруппа, т.е. \bar{M} не содержит \bar{K} и $\bar{M} \cap \bar{K} \neq 1$. Тогда

$$\bar{M} \cap \bar{K} = M/N \cap KN/N = N(M \cap K)/N,$$

поэтому $M \cap K \neq 1$, и подгруппа M не содержит K . Значит, M — K -максимальная в G подгруппа. Если подгруппа $M \cap K$ нильпотентна, то подгруппа $\bar{M} \cap \bar{K}$ также нильпотентна. Если индекс $|G : M|$ примарен и отличен от 7 и 8, то и индекс $|\bar{G} : \bar{M}| = |G : M|$ примарен и отличен от 7 и 8. Таким образом, к факторгруппе G/N применима индукция, по которой подгруппа KN/N разрешима. Если N разрешима, то разрешима и G . Следовательно, в G нет разрешимых нормальных неединичных подгрупп.

Предположим, что $N \subseteq K$ и $N \neq K$. Пусть N — N -максимальная в G подгруппа, существующая по лемме 3.3.3. Тогда N не содержит K и

$$N \cap K \supseteq N \cap N \neq 1,$$

т.е. N будет K -максимальной подгруппой. Следовательно, каждая N -максимальная подгруппа удовлетворяет условиям теоремы. По индукции N разрешима. Противоречие.

Таким образом, K — минимальная нормальная подгруппа.

Если подгруппа $M \cap K$ нильпотентна для всех K -максимальных подгрупп M , то K разрешима по лемме 3.3.12. Значит, не все пересечения нильпотентны, поэтому существует K -максимальная подгруппа F такая, что ее индекс $|G : F| = p^\alpha$, p — простое число, причем $p^\alpha \neq 7$ и 8 .

Допустим, что существует другая K -максимальная подгруппа N примарного индекса $|G : N| = q^\beta \neq 7$ и 8 и допустим, что $q \neq p$. Тогда $NK = G$, поэтому

$$q^\beta = |G : N| = |K : K \cap N|,$$

т.е. q делит порядок K и в K имеется подгруппа $K \cap N$ примарного индекса. Так как K — минимальная нормальная подгруппа, то $K = A \times B$, где A — простая группа, а B — прямое произведение простых групп, изоморфных A . Если $K \cap N \supseteq A$, то $B = q$ -группа, противоречие. Значит, A не содержится в $K \cap N$ и $N \cap A$ — собственная в A подгруппа. Теперь индекс $|A : A \cap N| = q^{\beta_1}$, т.е. простая группа A содержит подгруппу $A \cap N$ примарного индекса q^{β_1} , не равного 7 и 8 .

Аналогично, $FK = G$ и

$$p^\alpha = |G : F| = |K : K \cap F|,$$

а $|A : A \cap F| = p^{\alpha_1}$, т.е. $A \cap F$ — собственная в A подгруппа примарного индекса p^{α_1} , не равного 7 и 8 .

Таким образом, в простой группе A имеются две собственные подгруппы $A \cap N$ и $A \cap F$ различных примарных индексов. По теореме [95] группа A изоморфна $PSL(2,7)$, но там примарные индексы исчерпываются числами 7 и 8 . Противоречие.

Следовательно, индексы всех K -максимальных подгрупп F , для которых подгруппа $F \cap K$ ненильпотентна, являются степенями одного и того же простого числа p .

Пусть P — силовская p -подгруппа из K . По лемме Фраттини $N_G(P)K = G$. Обозначим через M максимальную в G подгруппу, содержащую $N_G(P)$. Так как $G = MK$ и

$$|G : M| = |N : M \cap K|,$$

то p не делит индекс $|G : M|$, поэтому подгруппа $M \cap K$ нильпотентна.

Но подгруппа $M \cap K$ нормальна в M , отсюда нормализаторы всех силовских подгрупп из $M \cap K$ совпадают с M , т.е. $N_G(Q) = M$ для каждой силовской подгруппы Q из $M \cap K$. Далее

$$N_K(Q) = N_G(Q) \cap K = M \cap K,$$

поэтому $M \cap K$ — холловская в K подгруппа.

Итак, в группе K имеется холловская нильпотентная подгруппа $K \cap M$, и нормализатор каждой силовской подгруппы из $K \cap M$ совпадает с $K \cap M$. Если подгруппа $K \cap M$ не примарна, то в K имеется нормальное дополнение к каждой силовской подгруппе из $K \cap M$ (см. [19], теорема 4). Это противоречит тому, что K — прямое произведение изоморфных простых групп.

Таким образом, $K \cap M = P$ и $N_K(P) = P$. По теореме Глаубермана [94] $p = 2$ или 3 . Кроме того, силовская p -подгруппа в A самонормализуема. Так как

$$p^f = |G : H| = |K : KH|,$$

то $|A : A \cap H| = p^{\alpha_1}$. Теперь из теоремы [95] вытекает, что A изоморфна одной из следующих групп: A_{p^n} ; $\text{PSL}(n, q)$ и $(q^n - 1)/(q - 1) = p^{\alpha}$; $\text{PSp}_4(3)$ и $p^{\alpha_1} = 27$. Но в этих группах силовские p -подгруппы отличны от своих нормализаторов. Противоречие. Теорема доказана.

3.3.14. Следствие. Если индекс каждой ненильпотентной K -максимальной подгруппы примарен и отличен от 7 и 8 , то K разрешима.

3.4. Дополнения и комментарии

Применим результаты параграфов 3.2 и 3.3 для изучения строения подгрупп $\Phi_k(G)$ и $\Phi_\infty(G)$. Напомним, что через $\Phi_1(G)$ обозначается пересечение максимальных в G подгрупп простого индекса; через $\Phi_2(G)$ — пересечение максимальных в G подгрупп, индексы которых не равны простым числам или квадратам простых чисел; ... ; через $\Phi_k(G)$ — пересечение максимальных в G подгрупп, индексы которых не равны p^i для любого простого p и всех $i = 1, 2, \dots, k$; ... ; через $\Phi_\infty(G)$ — пересечение максимальных в G подгрупп непримарных индексов. В случае отсутствия максимальных подгрупп требуемых индексов положим $\Phi_i(G) = G$. Ясно, что

$$\Phi(G) = \Phi_0(G) \leq \Phi_1(G) \leq \Phi_2(G) \leq \dots \leq \Phi_\infty(G).$$

Нам потребуется следующая лемма, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 3.2.1.

3.4.1. Лемма. Если K — неразрешимая нормальная в G подгруппа и индекс в группе G каждой подгруппы из $m_1(G, K)$ примарен, то $G/S(K) = K/S(K) \times H/S(K)$ и $K/S(K) \cong \text{PSL}(2, 7)$.

3.4.2. Теорема. Для любой группы G справедливы следующие утверждения:

- 1) подгруппа $\Phi_1(G)$ сверхразрешима;
- 2) подгруппа $\Phi_2(G)$ разрешима;
- 3) тогда и только тогда в группе G подгруппа $\Phi_\infty(G)$ неразрешима, когда

$$G/S(\Phi_\infty(G)) = \Phi_\infty(G)/S(\Phi_\infty(G)) \times H/S(\Phi_\infty(G)),$$

где

$$\Phi_\infty(G)/S(\Phi_\infty(G)) \simeq \text{PSL}(2, 7) \text{ и } H = H^{\text{formPSL}(2, 7)}.$$

Доказательство. Вначале докажем 2). Пусть $\mathfrak{M}_2(G)$ — совокупность максимальных подгрупп из G , индексы которых являются простыми числами или квадратами простых чисел. Если A — максимальная в G подгруппа, не принадлежащая $\mathfrak{M}_2(G)$, и α — автоморфизм группы G , то $|(G : A)| = |(G : \alpha(A))|$ и подгруппа $\alpha(A)$ также не принадлежит $\mathfrak{M}_2(G)$. Ясно, что

$$\Phi_2(G) = \{\cap A \mid A \subset \cdot G, A \notin \mathfrak{M}_2(G)\}$$

— характеристическая в G подгруппа. Если $B \in \mathfrak{m}_1(G, \Phi_2(G))$, то B — максимальная в G подгруппа, не содержащая $\Phi_2(G)$. Поэтому $B \in \mathfrak{M}_2(G)$ и индекс подгруппы B в группе G есть простое число либо квадрат простого числа. По лемме 3.3.7 подгруппа $\Phi_2(G)$ разрешима.

Теперь проверим 1). Пусть $\mathfrak{M}_1(G)$ — совокупность максимальных в G подгрупп простых индексов. Тогда

$$\Phi_1(G) = \{\cap A \mid A \subset \cdot G, A \notin \mathfrak{M}_1(G)\}.$$

Так как $\Phi_1(G) \leq \Phi_2(G)$, то $\Phi_1(G)$ — разрешимая нормальная в G подгруппа. Если $B \in \mathfrak{m}_1(G, \Phi_1(G))$, то B — максимальная в G подгруппа, не содержащая $\Phi_1(G)$. Поэтому $B \in \mathfrak{M}_1(G)$ и индекс подгруппы B в группе G есть простое число. По теореме 3.3.9 подгруппа $\Phi_1(G)$ сверхразрешима.

Осталось доказать 3). Пусть подгруппа $K = \Phi_{\infty}(G)$ неразрешима. Если M — максимальная в G подгруппа, не содержащая K , то индекс M в G примарен и применима лемма 3.4.1, по которой

$$G/S(K) \cong K/S(K) \times H/S(K),$$

причем $K/S(K) \cong \text{PSL}(2,7)$. Предположим, что $H \neq H^f$, где $f = \text{form PSL}(2,7)$. Так как формация f состоит из конечных групп, являющихся прямыми произведениями $\text{PSL}(2,7)$, то $H/S(K)$ и $G/S(K)$ — прямые произведения групп, изоморфных $\text{PSL}(2,7)$. Пусть $A/S(K)$ — максимальная в G подгруппа, содержащая некоторую диагональ. По лемме 3.2.3 индекс подгруппы A в группе G непримарен. Так как $A/S(K)$ не содержит $K/S(K)$, то A не содержит K и по условию теоремы индекс A в группе G должен быть примарным, противоречие. Значит, допущение неверно и $H = H^{\text{form PSL}(2,7)}$.

Обратно, если

$$G/S(\Phi_{\infty}(G)) \cong \Phi_{\infty}(G)/S(\Phi_{\infty}(G)) \times H/S(\Phi_{\infty}(G)),$$

где

$$\Phi_{\infty}(G)/S(\Phi_{\infty}(G)) \cong \text{PSL}(2,7),$$

то подгруппа $\Phi_\infty(G)$ неразрешима.

3.4.3. Следствие. В любой группе пересечение максимальных подгрупп непримарных индексов и индексов 7 является разрешимой подгруппой.

Доказательство. Пусть G — группа и K — пересечение максимальных в G подгруппе непримарных индексов и индексов 7. Ясно, что K — нормальная в G подгруппа и индекс в группе G каждой подгруппы из $m_1(G, K)$ примарен. Предположим, что подгруппа K неразрешима. Тогда по лемме 3.4.1 имеем

$$G/S(K) = K/S(K) \times H/S(K)$$

и

$$K/S(K) \approx \text{PSL}(2,7).$$

В группе $\text{PSL}(2,7)$ имеется симметрическая подгруппа S_4 индекса 7, поэтому в G имеется подгруппа A индекса 7, не содержащая K , противоречие. Следствие доказано.

Простая группа $\text{PSL}(2,7)$ содержит максимальную подгруппу $[Z_7]Z_3$ индекса 8. Поэтому, если в следствии 3.4.3 число 7 заменить на 8, а в доказательстве симметрическую подгруппу S_4 на $[Z_7]Z_3$, то получим следующий результат.

3.4.4. Следствие. В любой группе пересечение максимальных подгрупп непримарных индексов и индексов 8 является разрешимой подгруппой.

Отметим, что оба следствия остаются справедливыми, если рассматривать пересечения ненильпотентных максимальных подгрупп непримарных индексов и индексов 7 (или 8). При доказательстве надо использовать следствия 3.4.3 и 3.4.4 и описание неразрешимых групп с нильпотентной максимальной подгруппой [71].

Уточним строение подгруппы $\Phi_k(G)$ группы G . Для этого введем следующие определения.

3.4.5. Определение. Пусть f — функция, определенная на множестве P всех простых чисел и принимающая значения из множества $N \cup \{0\}$, т.е.

$$f: P \rightarrow N \cup \{0\}.$$

Функцию f будем называть m -ограничением.

3.4.6. Определение. Пусть f — некоторое m -ограничение. Через $\mathfrak{X}(f)$ обозначим класс всех групп G , обладающих следующими свойствами:

- 1) группа G разрешима;
- 2) если M — максимальная подгруппа группы G и $|(G : M)|$ — p -число, то $|(G : M)| \leq p^{f(p)}$.

3.4.7. Замечание. Ясно, что $\mathfrak{X}(f)$ — класс всех сверхразрешимых групп, если $f(p) = 1$ для всех простых p . Если же $f(p) = n$ для всех простых p , то $\mathfrak{X}(f)$ — класс всех разрешимых групп, у которых индексы максимальных подгрупп не делятся на q^{n+1} . В дальнейшем такой класс будем обозначать через $\mathfrak{X}(k)$.

3.4.8. Лемма. Пусть f — некоторое ограничение,

$$\pi = \{p \in \mathbb{P} \mid f(p) \neq 0\}.$$

Тогда:

- 1) $\mathfrak{X}(f)$ — класс Шунка;
- 2) $\mathfrak{X}(f)$ содержит все сверхразрешимые π -группы;
- 3) класс $\mathfrak{X}(f)$ является нормально наследственным.

Доказательство. 1. Пусть Θ — m -функтор, выделяющий в каждой группе G саму группу и те ее максимальные подгруппы M , для которых индекс $|G : M|$ либо делится на два различных простых числа, либо является степенью некоторого простого числа p и больше $p^{f(p)}$. Простая проверка показывает, что Θ выдерживает все изоморфизмы и является регулярным. Ввиду теоремы 1.1.16 класс

$$\mathfrak{X} = \{G \mid G = \Phi_{\Theta}(G)\}$$

является классом Шунка. Теперь достаточно заметить, что $\mathfrak{X}(f) = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{E}$, где \mathfrak{E} — класс всех разрешимых групп. Так как пересечение классов Шунка является классом Шунка, то $\mathfrak{X}(f)$ — класс Шунка.

2. Пусть G — сверхразрешимая π -группа. Если M — ее максимальная подгруппа, то $|G : M| = p$ для некоторого простого p из π . Так как $f(p) \geq 1$ для всех $p \in \pi$, то $G \in \mathfrak{X}(f)$.

3. Применим индукцию по порядку группы. Пусть G — $\mathfrak{X}(f)$ -группа наименьшего порядка, обладающая тем свойством, что в ней имеется нормальная подгруппа N , не входящая в $\mathfrak{X}(f)$.

Пусть K — минимальная нормальная подгруппа, содержащаяся в N . Ввиду выбора группы G из $\mathfrak{X}(f)$ имеем $N/K \in \mathfrak{X}(f)$. Согласно теореме Шунка из [110], в N существует $\mathfrak{X}(f)$ -проектор R , причем любые два $\mathfrak{X}(f)$ -проектора группы N сопряжены. На основании леммы 2.1.33 $N_G(R)N = G$. Допустим, что R — нормальная подгруппа группы G . Так как $G \in \mathfrak{X}$, то ввиду утверждения 2) данной леммы $N/R \in \mathfrak{X}$. Приходим к противоречию с тем, что R — \mathfrak{X} -проектор N . Значит, подгруппа R не является нормальной в G . Заключим $N_G(R)$ в максимальную подгруппу M группы G . Так как $RK = N$, то $MK = G$.

Пусть K — p -группа. Так как $G \in \mathfrak{X}(f)$, то $|G : M| = p^t$, где $t \leq f(p)$. Так как группа G разрешима, то $|K| = p^t$.

Так как подгруппа N не входит в $\mathfrak{X}(f)$, то в ней имеется максимальная подгруппа H , для которой $|N : H| = q^s$, причем $s > f(q)$. Ввиду предположения индукции можно считать, что H не содержит K . Следовательно, $q = p$. Так как $N = HK$, то

$$|N : H| = |K : K \cap H|, \text{ т.е. } p^s = |N : H| \leq |K| = p^t.$$

Значит, $s \leq t \leq f(p)$. Противоречие. Лемма доказана.

Следующая лемма устанавливает связь значений m -ограничения f с p -длиной $\ell_p(G)$ группы G , входящей в класс $\mathfrak{X}(f)$.

3.4.9. Лемма. Пусть f — некоторое m -ограничение. Если $G \in \mathfrak{X}(f)$, то $\ell_p(G) \leq \mathfrak{X}(f)$ для любого простого числа p .

Доказательство. Предположим, что существуют группы, для которых лемма не выполняется. Выберем среди них группу G наименьшего порядка.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G . Рассмотрим группу G/N . Так как $\mathfrak{X}(f)$ — класс Шунка, то $G/N \in \mathfrak{X}(f)$. Так как $|G/N| < |G|$, то ввиду предположения индукции $\ell_p(G/N) \leq f(p)$. Если теперь N — p' -группа, то из $\ell_p(G/N) = \ell_p(G)$ будет следовать, что $\ell_p(G) \leq f(p)$. Пришли к противоречию.

Поэтому N — p -группа. По лемме VI.6.4 из [100] $\ell_p(G/\Phi(G)) = \ell_p(G)$. Поэтому можем считать, что $\Phi(G) = 1$.

Если N_1 и N_2 — две минимальные нормальные подгруппы группы G , то на основании леммы VI.6.4 из [100]

$$\ell_p(G) = \ell_p(G/N_1 \cap N_2) = \max \{ \ell_p(G/N_1), \ell_p(G/N_2) \} \leq f(p).$$

Снова пришли к противоречию.

Итак, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , причем $|N| = p^m$, $m \leq f(p)$. Так как $\Phi(G) = 1$, то $N = C_G(N)$. Поэтому группу G/N можно рассматривать, как группу автоморфизмов подгруппы N , индуцированную группой G . Так как N — элементарная абелева группа порядка p^m , $m \leq f(p)$, то группа G/N изоморфна некоторой подгруппе полной линейной группы $GL(m, p)$. Поэтому [100, стр.382] силовская p -подгруппа группы $GL(m, p)$ имеет ступень нильпотентности не выше $m - 1$. В связи с этим ступень нильпотентности силовской p -подгруппы группы G/N не выше $m - 1 \leq f(p) - 1$.

По теореме Холла и Хигмена из [96] $\ell_p(G/N) \leq f(p) - 1$.

Отсюда следует, что $\ell_p(G) \leq f(p)$. Снова пришли к противоречию. Лемма доказана.

3.4.10. Теорема. Пусть k — некоторое натуральное число. Тогда для любой группы G справедливы утверждения:

1) либо подгруппа $\Phi_k(G)$ разрешима, либо $\Phi_k(G)/S(\Phi_k(G)) \simeq \text{PSL}(2, 7)$;

2) $S(\Phi_k(G)) \in \mathfrak{X}(k)$;

3) $\ell_p(S(\Phi_k(G))) \leq k$ для любого простого числа p .

Доказательство. 1. Обозначим подгруппу $\Phi_k(G)$ через K . Тогда из определения подгруппы $\Phi_k(G)$ следует, что любая максимальная подгруппа группы G , не содержащая K , имеет индекс p^m , где $m \leq k$. Теперь ввиду леммы 3.4.1 либо подгруппа K разрешима, либо $K/S(K) \simeq \text{PSL}(2, 7)$.

2. Применим индукцию по порядку группы. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Ясно, что $S(K) \neq 1$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в $S(K)$. Ввиду леммы 1.1.9 $S(K)/N = S(K/N)$. Так как $|G/N| < |G|$, то $S(K)/N \in \mathfrak{X}(k)$. Пусть $R \in \mathfrak{X}(k)$ -проектор группы $S(K)$. Согласно лемме 2.1.33 и теореме Шунка из [110], имеем

$$G = N_G(R)S(K) = N_G(R)RN = N_G(R)N.$$

Так как N — абелева группа, то ввиду утверждения 2) леммы 3.4.8 подгруппа R не является нормальной в G . Заключим $N_G(R)$ в максимальную подгруппу группы G . Тогда $MN = G$ и $M \cap N = 1$. Так как N — абелева p -группы для некоторого простого p и $S(K)$ не принадлежащий $\mathfrak{X}(k)$, то $|N| = p^t$, где $t > k$.

Но тогда $|G : M| = p^t$, где $t > k$. Пришли к противоречию с тем, что M не содержит $K = \Phi_k(G)$. Значит,

$$S(K) = S(\Phi_k(G)) \in \mathcal{X}(k).$$

3. Так как на основании утверждения 2) данной теоремы подгруппа $S(\Phi_k(G))$ принадлежит классу Шунка $\mathcal{X}(k)$, то по лемме 3.4.9 при $f(p) = k$ для всех простых p имеем

$$\ell_p(S(\Phi_k(G))) \leq f(p) = k.$$

Теорема доказана.

3.4.11. Следствие. Для любой группы G и любого простого числа p справедливо неравенство $\ell_p(\Phi_2(G)) \leq 2$.

На основании результатов С.Ф. Каморникова [10] мы можем уточнить следствие 3.4.11 следующим образом.

3.4.12. Следствие. Для любой группы G справедливы утверждения:

1) сверхразрешимый корадикал группы $\Phi_2(G)$ дисперсивен по Оре;

2) подгруппа Фиттинга группы $\Phi_2(G)$ содержит 2'-холловскую подгруппу сверхразрешимого корадикала группы $\Phi_2(G)$.



ЛИТЕРАТУРА

1. Авдашкова Л.П., Каморников С.Ф. О нормализаторах f -достижимых подгрупп // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1996. №1. С.33—35.
2. Аль-Шаро Халед. О пересечении некоторого семейства максимальных подгрупп конечной группы // Вопросы алгебры. Гомель, 1996. Вып. 9. С.144—151.
3. Бузланов А.В. Конечные разрешимые группы с заданными максимальными подгруппами // Вопросы алгебры. Мн., 1993. Вып. 6. С.35—45.
4. Васильев А.Ф. О некоторых свойствах локальных формаций // Вопросы алгебры. Мн., 1985. Вып.1. С.4—9.
5. Васильев А.Ф., Каморников С.Ф., Семенчук В.Н. О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. Киев, 1993. С.27—54.
6. Ведерников В.А. О признаках разрешимости и сверхразрешимости конечных групп // Сибир. матем. труды. 1967. Т.8, №6. С.1236—1244.
7. Ведерников В.А., Дука Н.Г. Конечные группы с обобщенной подгруппой Фраттини // IX Всесоюз. алгебраич. коллоквиум. Гомель, 1968. С.44.
8. Ведерников В.А., Огарков Т.Т. Об обобщенной подгруппе Фраттини конечной группы // IV Всесоюз. симпозиум по теории групп. Новосибирск, 1973. С.22—23.
9. Воробьев Н.Т. Об аналоге проблемы Гашюца // VII конф. математиков Беларуси. Мн., 1996. Ч. 1. С.97-98.
10. Каморников С.Ф. К теореме Ф.Холла // Вопросы алгебры. Мн., 1990. Вып. 5. С.45—52.
11. Каморников С.Ф. Субнормальные подгруппы в теории формаций конечных групп: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Гомель, 1995.
12. Каморников С.Ф. Перестановочность подгрупп и f -субнормальность // Сибир. матем. журн. 1996. Т.37, №5. С.1065—1080.
13. Каморников С.Ф., Селькин М.В. О разрешимых подгруппах конечных групп // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1994. №2. С.53—57.
14. Каморников С.Ф., Селькин М.В. О влиянии максимальных подгрупп примарного индекса на строение конечной группы // Изв. высш. учеб. завед. Математика. 1995. №6. С.24—28.
15. Каморников С.Ф., Селькин М.В. К теории f -достижимых подгрупп конечных групп. (Препринт / Гомельский госуниверситет). Гомель, 1995. №39. 15 с.
16. Каморников С.Ф., Селькин М.В. Об одном свойстве f -достижимых подгрупп // Вопросы алгебры. Гомель, 1996. Вып. 10. С.71—90.
17. Каморников С.Ф., Шеметков Л.А. О корадикалах субнормальных подгрупп // Алгебра и логика. 1995. Т.34. №5. С.493—513.
18. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Новосибирск, 1995. 132 с.
19. Монахов В.С. О влиянии свойств максимальных подгрупп на строение конечной группы // Матем. заметки. 1972. Т.11, №2. С.183—190.
20. Монахов В.С., Селькин М.В. О разрешимости нормальных подгрупп конечных групп // Матем. заметки. 1992. Т.51, №3. С.85—90.
21. Монахов В.С., Селькин М.В. О строении нормальных подгрупп конечных групп // Вопросы алгебры. Мн., 1993. Вып.6. С.96—100.
22. Поляков Л.Я. О влиянии свойств максимальных подгрупп на разрешимость конечной группы // Конечные группы. Мн., 1966. С.89—97.
23. Поляков Л.Я. О разрешимых группах // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1968. №2. С.43—46.
24. Поляков Л.Я. О нормальных подгруппах с заданными свойствами // Вопросы алгебры. Мн., 1985. Вып.1. С.62—66.
25. Селькин М.В. Некоторые признаки разрешимости конечных групп // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1971. №6. С.113—115.
26. Селькин М.В. О максимальных подгруппах конечных групп // Докл. АН БССР. 1974. Т.18, №11. С.969—972.
27. Селькин М.В. О влиянии максимальных подгрупп на формационное строение конечных групп // Конечные группы. Мн., 1975. С.151—163.

28. Селькин М.В. О пересечениях f -абнормальных максимальных подгрупп конечных групп // XIV Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. докл. Новосибирск, 1977. С.60—61.
29. Селькин М.В. Конечные группы с заданными f -абнормальными максимальными подгруппами // Конечные группы. Мн., 1978. С.143—151.
30. Селькин М.В. Формационное строение конечных групп // VI Всесоюз. симпозиум по теории групп: Тез. докл. Киев, 1978. С. 54.
31. Селькин М.В. Пересечение f -абнормальных максимальных подгрупп заданного индекса // XV Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. докл. Красноярск, 1979. С. 138.
32. Селькин М.В. О f -абнормальных максимальных подгруппах заданного индекса // VII Всесоюз. симпозиум по теории групп: Тез. докл. Красноярск, 1980. С. 106.
33. Селькин М.В. О свойствах пересечений f -абнормальных максимальных подгрупп // V Республ. конф. математиков Белоруссии: Тез. докл. Гродно, 1980. С. 21.
34. Селькин М.В. Исследование пересечений f -абнормальных максимальных подгрупп конечных групп // Подгрупповое строение конечных групп. Мн., 1981. С.108—116.
35. Селькин М.В. Формационные свойства инвариантных подгрупп конечных групп // XVI Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. докл. Л., 1981. С. 145.
36. Селькин М.В. Формационные свойства конечных групп // VIII Всесоюз. симпозиум по теории групп: Тез. докл. Киев, 1982. С.112.
37. Селькин М.В. О формационном строении конечных групп // XVII Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. докл. Мн., 1983. С. 211.
38. Селькин М.В. О свойствах максимальных подгрупп конечных групп // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. Мн., 1984. С.159—166.
39. Селькин М.В. Группы с заданными максимальными подгруппами // XVIII Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. докл. Кишинев, 1985. С. 112.
40. Селькин М.В. О пересечении максимальных подгрупп конечных групп // X Всесоюз. симпозиум по теории групп: Тез. докл. Гомель, 1986. С. 205.
41. Селькин М.В. K -максимальные подгруппы конечных групп // XIX Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. докл. Львов, 1987. С. 251.
42. Селькин М.В. О максимальных подгруппах конечных групп // Междунар. конф. по алгебре: Тез. докл. Новосибирск, 1989. С. 106.
43. Селькин М.В. \mathcal{X} -абнормальность и \mathcal{X} -центральность для классов Шунка // Вопросы алгебры. Гомель, 1996. Вып. 10. С.27—34.
44. Селькин М.В., Сидоров А.В. Пересечения максимальных подгрупп заданного типа // VII Белорус. матем. конф.: Тез. докл. Мн., 1996. Ч. I. С. 82.
45. Селькин М.В., Семенчук В.Н. Пересечение максимальных подгрупп в конечных группах // Вопросы алгебры. Мн., 1985. Вып.1. С.67—72.
46. Селькин М.В., Сидоров А.В. Некоторые обобщения подгруппы Фраттини // Вопросы алгебры. Гомель, 1996. Вып.9. С.138—143.
47. Семенчук В.Н. Минимальные не f -группы // Алгебра и логика. 1979. Т.18, №3. С.348—382.
48. Семенчук В.Н. Строение конечных групп с f -абнормальными и f -субнормальными подгруппами // Вопросы алгебры. Мн., 1986. Вып.2. С.50—55.
49. Сидоров А.В. О группах, близких к минимальным не f -группам // Вопросы алгебры. Мн., 1986. Вып. 2. С.55—62.
50. Скиба А.Н. О формациях, порожденных классами групп // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1981. №3. С.33—39.
51. Скиба А.Н. О локальных формациях длины 5 // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Мн., 1986. С.135—149.
52. Ходалевич А.Д. Минимальные не f -группы // Докл. АН БССР. 1984. Т.28, №5. С.389—391.
53. Холл М. Теория групп. М.: ИЛ., 1962. 468 с.
54. Черников С.Н. О группах с ограничениями для подгрупп // Группы с ограничениями для подгрупп. Киев, 1971. С.17—39.
55. Чунихина И.К., Чунихин С.А. О p -разложимых группах // Матем. сб. 1944. Т.15, №2. С.325—342.
56. Чунихин С.А., Шеметков Л.А. Конечные группы // Алгебра. Топология. Геометрия. 1969 (Итоги науки). М., 1971. С.7—70.

57. Шеметков Л.А. О конечных разрешимых группах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т.32, №3. С.533—559.
58. Шеметков Л.А. Ступенчатые формации групп // Матем. сб. 1974. Т.94, №4. С.628—648.
59. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
60. Шеметков Л.А. Композиционные формации и радикалы конечных групп // Укр. матем. журн. 1988. Т.40, №3. С.369—374.
61. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. 256 с.
62. Шлык В.В. О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах // Мат. заметки. 1973. Т.14, №3. С. 429—439.
63. Шлык В.В. О влиянии формационных свойств максимальных подгрупп на строение конечной разрешимой группы // Докл. АН БССР. 1973. Т.17, №2. С.109—112.
64. Шмигирев Э.Ф. О некоторых вопросах теории формаций // Конечные группы. Мн., 1975. С.213—225.
65. Шмидт О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные // Матем. сб. 1924. Т.31. С.366—372.
66. Baer R. Classes of finite groups and their properties // Ill. J. Math. 1957. Vol.1. P.115—187.
67. Ballester-Bolinches A. Maximal subgroups and formations // J. Pure Appl. Algebra. 1989. Vol.61. P.223—232.
68. Ballester-Bolinches A., Perez-Ramos M.D. On \mathfrak{f} -subnormal subgroups and Frattini-like subgroups of a finite group // Glasgow Math. J. 1994. Vol.36. P.241—247.
69. Ballester-Bolinches A., Shemetkov L.A. On lattices of p -local formations of finite groups. Preprint / F.Scorina University of Gomel. Gomel, 1996. №37. 10p.
70. Barnes D.W., Kegel O.H. Gaschütz functors on finite soluble groups // Math. Z. 1966. Vol.94. P.134—142.
71. Bauman B. Endliche nichtauflösbare Gruppen mit einer nilpotenten maximalen Untergruppen // J. Algebra. 1975. Vol.38, №1. P.119—135.
72. Bhattacharya P., Mukherjee N.P. On the intersection of a class of maximal subgroups of a finite group II // J. Pure Appl. Algebra. 1986. Vol.42. P.117—124.
73. Bechtell H., Hofmann M. Kernels of formations // Вопросы алгебры. Гомель, 1996. Вып.9. С.15—37.
74. Beidleman J.C., Smith H. On Frattini-like subgroups // Glasgow Math. J. 1993. Vol.35. P.95—98.
75. Bianchi M., Mauri A.G.B., Hauck P. On finite groups with nilpotent Sylow-normalizers // Arch. Math. 1968. Vol.47, №3. P. 193—197.
76. Bryant R.M., Bryce R.A., Hartley B. The formation generated by a finite group // Bull. Austral. Math. Soc. 1970. Vol.2. P.347—357.
77. Carter R., Hawkes T. The \mathfrak{f} -normalizers of a finite soluble group // J. Algebra. 1967. Vol.5, №2. P.175—202.
78. Deskins W.E. A condition for the solvability of a finite group // Ill. J. Math. 1961. Vol.5, №2. P.306—313.
79. Doerk K. Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen // Math. Z. 1966. Bd.91. S.198—205.
80. Doerk K. Über Homomorphe endlicher auflösbarer Gruppen // J. Algebra. 1974. Vol.30. P.12—30.
81. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin — New York: Walter de Gruyter, 1992. 898p.
82. Erickson R.P. Projectors of finite groups // Comm. Algebra. 1982. Vol.10, №18. P.1919—1938.
83. Feng Y., Zhang B. Frattini subgroups relative to formation functors // J. Pure Appl. Algebra. 1990. Vol.64. P.145—148.
84. Förster P. Charakterisierungen einiger Schunckklassen endlicher auflösbarer Gruppen I // J. Algebra. 1978. Vol.55. P.155—187.
85. Förster P. Closure operations for Schunck classes and formations of finite solvable groups // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1979. Vol.85. P.253—259.
86. Förster P. A note on primitive groups with small maximal subgroups // Algebra paper. Monash University. 1983. №93. P.1—5.
87. Förster P. Projektive Klassen endlicher Gruppen I. Schunck und Gaschützklassen // Math. Z. 1984. Vol.186. P.249—278.
88. Foy P.D. The formation generated by a finite group: Ph. D. Dissertation. University of Manchester, 1990.

89. Frattini G. Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni // Atti Acad. dei Lincei. 1885. Vol.1. P.281—285.
90. Gaschütz W. Über die Φ -Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1953. Bd.58. S.160—170.
91. Gaschütz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1963. Bd.80. №4. S.300—305.
92. Gaschütz W. Existenz und Konjugiertsein von Untergruppen, die in endlichen auflösbaren Gruppen durch gewisse Indexschränken definiert sind // J. Algebra. 1978. Vol.53. P.389—394.
93. Gaschütz W. Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups / Notes in Pure Mathematics. Canberra: Austral. Nat. Univ., 1979. Vol.11. 100p.
94. Glauberman G. Prime-power factor groups of finite groups. II // Math. Z. 1970. Bd.117. №1—4. S.46—56.
95. Guralnik R. Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. Vol.81. №2. P.304—311.
96. Hall P., Higman G. On the p -length of p -soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem // Proc. London Math. Soc. 1956. Vol.6. P.1—40.
97. Hawkes T.O. On formation subgroups of a finite soluble group // J. London Math. Soc. 1968. Vol.44, №2. P.243—250.
98. Higman G. Representations of general linear groups and varieties of groups // Proc. Internat. Conf. Theory of Groups. Canberra: Austral. Nat. Univ., 1965. P.167—173.
99. Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen // Mat. Z. 1954. Bd.60. S.409—434.
100. Huppert B. Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1967. 793s.
101. Ito N., Szep J. Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen // Acta Sci. Math. (Szeged). 1962. Vol.23. P. 168—170.
102. Kegel O. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten // Arch. Math. 1978. Vol.30, №2. P.225—228.
103. Maier R. Zur Vertauschbarkeit und Subnormalität von Untergruppen // Arch. Math. 1989. Vol.53. P.110—120.
104. Maier R., Schmid P. The embedding of quasinormal subgroups in finite groups // Math. Z. 1973. Bd.131. S.269—272.
105. Monakhov V.S., Selkin M.V. Solvability of normal subgroups of finite groups // Plenum Publishing Corporation. USA, 1992. P.282—285.
106. Monakhov V.S., Selkin M.V. Building of normal subgroups depending on maximal subgroups. Preprint / Gomel State University. Gomel, 1994. - №1. 12p.
107. Rose J.S. Finite groups with prescribed Sylow tower subgroups // Proc. London Math. Soc. 1966. Vol.16, №4. P.577—589.
108. Schmid P. Über die Automorphismengruppen endlicher Gruppen // Arch. Math. 1972. Vol.23, №3. P.236—242.
109. Schmid P. Lokale Formationen endlicher Gruppen // Math. Z. 1974. Bd.137, №1. S.31—48.
110. Schunck H. \mathcal{L} -Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1967. Bd.97. №4. S.326—330.
111. Selkin M.V. Some properties of finite groups // International Congress of Mathematicians. Japan, 1990. P.16.
112. Shemetkov L.A. Some ideas and results in the theory of formations of finite groups // Вопросы алгебры. Гомель, 1992. Вып.7. С.3—38.
113. Thompson J.G. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. Vol.74, №3. P.383—437.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения	3
Введение	6

Глава 1

КЛАССЫ ШУНКА И m -ФУНКТОРЫ

1.1. m -Функторы на группах	24
1.2. Классы Шунка, индуцированные m -функторами	36
1.3. Дополнения и комментарии	42

Глава 2

Θ -ПОДГРУППЫ ФРАТТИНИ

2.1. X -абнормальность и X -центральность для классов Шунка	46
2.2. Пересечение X -абнормальных максимальных подгрупп, не принадлежащих X	63
2.3. Пересечение f -абнормальных максимальных подгрупп заданных индексов	73
2.4. Подгруппы обобщенно фраттиниеских расширений групп	85
2.5. Дополнения и комментарии	104

Глава 3

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

3.1. Нормальные подгруппы, близкие к группам Шмидта	108
3.2. Группы с заданной системой максимальных подгрупп примарных индексов	117
3.3. K -максимальные подгруппы	125
3.4. Дополнения и комментарии	134
Литература	141

Научное издание

Селькин Михаил Васильевич

МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ В ТЕОРИИ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Редактор С. В. Машканова. Художник С. М. Шолохова. Художественный редактор Л. М. Гомонов.
Технический редактор С. А. Курган. Корректор С. В. Машканова.

Сдано в набор 02.05.97. Подписано в печать 13.05.97. Формат 60x84^{1/8}. Бум. офсетная. Гарнитура Таймс.
Офсетная печать. Усл. печ. л. 8,37. Усл. кр.-отг. 8,72. Уч.-изд. л. 6,87. Тираж 200 экз. Зак. № 633.
Фабрика "Полеспечат" Государственного комитета РБ по печати. Гомель, Советская, 1.
Литенгиз 295. 8/4

Издательство "Беларуская навука" Академии наук Беларуси и Государственного комитета Республики Беларусь по печати. 220141, Минск, Жодинская, 18. ЛН № 1294 от 16.07.96 г.

Набор и верстка выполнены на компьютерах издательства "Беларуская навука".