УДК 539.12.01

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЗАДАЧА О СВЯЗАННЫХ *S*-СОСТОЯНИЯХ ДЛЯ СУПЕРПОЗИЦИИ ДВУХ ПОТЕНЦИАЛОВ «δ-СФЕРА»

Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай, М.С. Данильченко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

RELATIVISTIC BOUND *S*-STATES PROBLEM FOR SUPERPOSITION OF TWO POTENTIALS «δ-SPHERE» TYPE

Yu.A. Grishechkin, V.N. Kapshai, M.S. Danilchenko

F. Scorina Gomel State University

Найдены точные решения релятивистских двухчастичных уравнений квазипотенциального типа для связанных состояний в случае потенциала «δ-сфера» в релятивистском конфигурационном представлении и в случае суперпозиции двух таких потенциалов. На основании анализа полученных условий квантования энергии найдены знаки коэффициентов в δ-потенциалах, при которых возможно существование связанных состояний и определено максимально возможное количество таких состояний.

Ключевые слова: *релятивистское двухчастичное уравнение*, *релятивистское конфигурационное представление*, *дельта-потенциал*, *связанное состояние*, *условие квантования энергии.*

The exact solutions of relativistic two-particle quasipotential type equations for bound states in the case of the potential «δ-sphere» in the relativistic configuration representation and in the case of the superposition of two such potentials are considered. The signs of the coefficients in the δ-potentials that allow the existence of bound states and the maximum possible number of this states are defined on the basis of the analysis of the energy quantization conditions.

Keywords: *relativistic two-particle equation*, *relativistic configurational representation*, *delta-function potential*, *bound state*, *energy quantization condition.*

Введение

В работе [1] были получены точные решения релятивистских двухчастичных уравнений квазипотенциального типа с потенциалами «δ-сфера» в релятивистском конфигурационном представлении и суперпозицией двух таких потенциалов в случае *s*-состояний рассеяния. Эти потенциалы представляют интерес как с точки зрения возможности получения точных решений уравнений квантовой теории, так и с точки зрения их использования для моделирования взаимодействия в реальных физических системах. Например, в недавних работах [2], [3] потенциалы, представленные суперпозицией «δ-сфер», были использованы для описания нуклон-нуклонных взаимодействий в рамках нерелятивистской квантовой теории. Исследование взаимодействий с применением суперпозиции произвольного числа δ-потенциалов в рамках релятивистской теории оказывается намного более сложной задачей. Поэтому следует прежде всего рассмотреть более простые случаи одного и суперпозиции двух потенциалов «δ-сфера». В то же время описание составных систем без рассмотрения связанных состояний является неполным. В настоящей работе найдены точные решения релятивистских двухчастичных уравнений квазипотенциального типа с потенциалом «δ-сфера» и суперпозицией двух таких потенциалов в случае связанных *s*-состояний. Решение аналогичной задачи в одномерном случае было получено в работе [4].

1 Точное решение двухчастичных уравнений в РКП с δ-потенциалом

Уравнения для волновых функций *s*-состояний рассеяния систем двух скалярных частиц одинаковой массы m имеют форму [5], [6]

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin(\chi_q m r) + \\ + \int_0^\infty G_{(j)}(\chi_q, r, r') V(r') \psi_{(j)}(\chi_q, r') dr', \tag{1.1}$$

где индекс j соответствует одному из четырёх уравнений квазипотенциального типа [7]–[9]: $j = 1$ $(j = 3)$ – уравнению Логунова – Тавхелидзе (модифицированному), $j = 2$ $(j = 4)$ – уравнению Кадышевского (модифицированному). В уравнениях (1.1) величина $\chi_q \geq 0$ – быстрота, связанная с энергией для состояний рассеяния как $2E_q = 2m \operatorname{ch} \chi_q$, r − модуль радиус-вектора в РКП, $V(r)$ − потенциал. Парциальные функции Грина $G_{(j)}(\chi_q, r, r')$ имеют вид

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r') = \\ = G_{(j)}(\chi_q, r - r') - G_{(j)}(\chi_q, r + r'), \tag{1.2}$$

где [4], [5]

$$G_{(1)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{K_q^{(1)}} \frac{\mathrm{sh}[(\pi/2 + i\chi_q)mr]}{\mathrm{sh}(\pi mr/2)},$$

$$G_{(2)}(\chi_q, r) = \frac{(4m\ \mathrm{ch}\chi_q)^{-1}}{\mathrm{ch}(\pi mr/2)} - \frac{i}{K_q^{(2)}} \frac{\mathrm{sh}[(\pi + i\chi_q)mr]}{\mathrm{sh}(\pi mr)},$$

$$G_{(3)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{K_q^{(3)}} \frac{\mathrm{ch}[(\pi/2 + i\chi_q)mr]}{\mathrm{ch}(\pi mr/2)},$$

$$G_{(4)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{K_q^{(4)}} \frac{\mathrm{sh}[(\pi + i\chi_q)mr]}{\mathrm{sh}(\pi mr)}.$$

В формулах (1.2) использованы обозначения

$$K_q^{(1)} = K_q^{(2)} = m\ \mathrm{sh}\,2\chi_q;$$

$$K_q^{(3)} = K_q^{(4)} = 2m\ \mathrm{sh}\,\chi_q.$$

Для связанных состояний уравнения (1.1) модифицируются к однородному виду, а быстрота становится мнимой ($\chi_q = iw_q$, где $0 \le w_q < \pi/2$, $2E_q = 2m\cos w_q$):

$$\psi_{(j)}(iw_q, r) = \int_0^\infty G_{(j)}(iw_q, r, r')V(r')\psi_{(j)}(iw_q, r')dr'. \quad (1.3)$$

Нетрудно видеть, что в нерелятивистском пределе уравнения (1.1)–(1.3) переходят в соответствующие уравнения квантовой механики, – неоднородное и однородное интегральные уравнения Шрёдингера в координатном представлении [10] для состояний рассеяния и связанных состояний, соответственно.

Рассмотрим решения релятивистских уравнений для связанных состояний (1.3) в случае взаимодействия, задаваемого δ-потенциалом:

$$V(r) = V_0\delta(r - a), \quad (1.4)$$

где V_0 и $a > 0$ – вещественные константы. Подстановка потенциала в уравнения и вычисление интегралов приводит к выражениям

$$\psi_{(j)}(iw_q, r) = V_0 G_{(j)}(iw_q, r, a)\psi_{(j)}(iw_q, a), \quad (1.5)$$

где величины $\psi_{(j)}(\chi_q, a)$ – неизвестны. Неравенство нулю этих величин возможно только, если выполняются следующие условия:

$$V_{0(j)} = \left[G_{(j)}(iw_q, a, a)\right]^{-1} = \left[G_{(j)}(iw_q, 0) - G_{(j)}(iw_q, 2a)\right]^{-1}, \quad (1.6)$$

которые являются условиями квантования для величины w_q (по сути, условиями квантования энергии $2E_q = 2m\cos w_q$). В условиях (1.6) параметр потенциала V_0 представлен как функция энергетического параметра w_q. Разумеется, было бы удобнее, чтобы величина w_q (или E_q) была функцией V_0, но в рассматриваемых случаях решение соответствующих уравнений в аналитической форме невозможно. Для четырёх рассматриваемых квазипотенциальных уравнений условия (1.6) имеют следующий вид:

$$V_{0(1)} = \frac{\pi m \sin 2w_q}{2w_q + \pi\left[2\mathrm{sh}^2(w_q ma) - \mathrm{sh}(2w_q ma)\,\mathrm{cth}(\pi ma)\right]}; \quad (1.7)$$

$$V_{0(2)} = \left(\pi m \sin 2w_q\right) / \left[w_q + \pi\left[\frac{\mathrm{sh}^2(\pi ma/2)\sin w_q}{\mathrm{ch}(\pi ma)} + 2\mathrm{sh}^2(w_q ma) - \mathrm{sh}(2w_q ma)\,\mathrm{cth}(2\pi ma)\right]\right];$$

$$V_{0(3)} = \frac{2m\sin w_q}{2\mathrm{sh}^2(w_q ma) - \mathrm{th}(\pi ma)\mathrm{sh}(2w_q ma)};$$

$$V_{0(4)} = \frac{2\pi m \sin w_q}{w_q + \pi\left[2\mathrm{sh}^2(w_q ma) - \mathrm{sh}(w_q ma)\,\mathrm{cth}(2\pi ma)\right]}.$$

Из выражений (1.7) следует, что связанные состояния могут существовать только, если $V_0 < 0$. На рисунке 1.1 представлены результаты численных расчётов зависимостей $V_0(w_q)$, заданных формулами (1.7). На рисунке видно, что при моделировании взаимодействия δ-потенциалом может существовать только один энергетический уровень (одно значение w_q при фиксированных остальных параметрах).

Рисунок 1.1 – Условия квантования энергии связанных состояний для δ-потенциала
(a – условия квантования при $m = 1$, $a = 1$; b – условия квантования при $m = 0{,}5$, $a = 2$)

Неизвестные величины $\psi_{(j)}(iw_q, a)$ в волновых функциях (1.5) легко определяются из условия нормировки, которое может быть выбрано в нерелятивистской форме:

$$\int\limits_0^\infty \psi_{(j)}^2(iw_q, r)dr = 1, \qquad (1.8)$$

одинаковой для всех четырёх уравнений.

2 Решение в случае суперпозиции двух δ-потенциалов

Найдём теперь решения уравнений для связанных состояний (1.3) в случае суперпозиции двух δ-потенциалов:

$$V(r) = V_1\delta(r-a_1) + V_2\delta(r-a_2), \qquad (2.1)$$

где $V_{1,2}$, $a_{1,2}$ – вещественные постоянные и $a_2 > a_1 > 0$. Подстановка потенциала (2.1) в уравнения (1.3) приводит к равенствам

$$\psi_{(j)}(iw_q, r) = \sum_{s=1}^{2} V_s G_{(j)}(iw_q, r, a_s)\psi_{(j)}(iw_q, a_s), \qquad (2.2)$$

содержащим две неизвестные величины $\psi_{(j)}(iw_q, a_1)$, $\psi_{(j)}(iw_q, a_2)$. Взяв эти равенства в точках $r = a_1$ и $r = a_2$, получим однородную систему двух линейных алгебраических уравнений относительно $\psi_{(j)}(iw_q, a_1)$, $\psi_{(j)}(iw_q, a_2)$. Условия существования ненулевых решений являются условиями квантования энергии. Можно показать, что для всех четырёх рассматриваемых квазипотенциальных уравнений они представляются в виде

$$\prod_{s=1}^{2}\left[1 - V_s G_{(j)}(iw_q, a_s, a_s)\right] - \\ - V_1 V_2 G_{(j)}^2(iw_q, a_2, a_1) = 0. \qquad (2.3)$$

Эти условия при $a_2 \to \infty$ преобразуются в условия квантования (1.6) для одного δ-потенциала.

На рисунке 2.1 приведены некоторые численные результаты для уравнений (2.3). Из него видно, что для суперпозиции двух δ-потенциалов могут существовать один или два энергетических уровня.

Для более детального анализа выражений (2.3) определим $V_2 = \alpha V_1$, где α – безразмерный параметр ($\alpha \neq 0$). Тогда равенства (2.3) принимают форму квадратных уравнений относительно V_1, решая которые, можно получить следующие два выражения для каждого j:

$$V_{1(j)}^{\pm} = \left[\alpha G_{(j)}(iw_q, a_2, a_2) + G_{(j)}(iw_q, a_1, a_1) \pm \right. \\ \left. \pm\sqrt{D_{(j)}(iw_q, a_1, a_2)}\right] / \left[2\alpha\left(G_{(j)}(iw_q, a_1, a_1)\times \right.\right. \\ \left.\left. \times G_{(j)}(iw_q, a_2, a_2) - G_{(j)}^2(iw_q, a_2, a_1)\right)\right], \qquad (2.4)$$

где

$$D_{(j)}(iw_q, a_1, a_2) = \\ = \left[G_{(j)}(iw_q, a_1, a_1) - \alpha G_{(j)}(iw_q, a_2, a_2)\right]^2 + \\ + 4\alpha G_{(j)}^2(iw_q, a_2, a_1).$$

Численные результаты для выражений (2.4) при $V_1 = V_2$ ($\alpha = 1$) и при $V_1 = -V_2$ ($\alpha = -1$) показаны на рисунках 2.2 и 2.3 соответственно.

На рисунках видно, а из выражений (2.4) следует, что для каждого значения w_q при фиксированных значениях параметров m, a_1, a_2, α существуют два значения величины V_1. При этом, связанные состояния могут существовать, если выполняется одно из условий: 1) $V_1 < 0$, $V_2 < 0$; 2) $V_1 < 0$, $V_2 > 0$; 3) $V_1 > 0$, $V_2 < 0$. Если $V_1 > 0$, $V_2 > 0$, то связанные состояния не существуют.

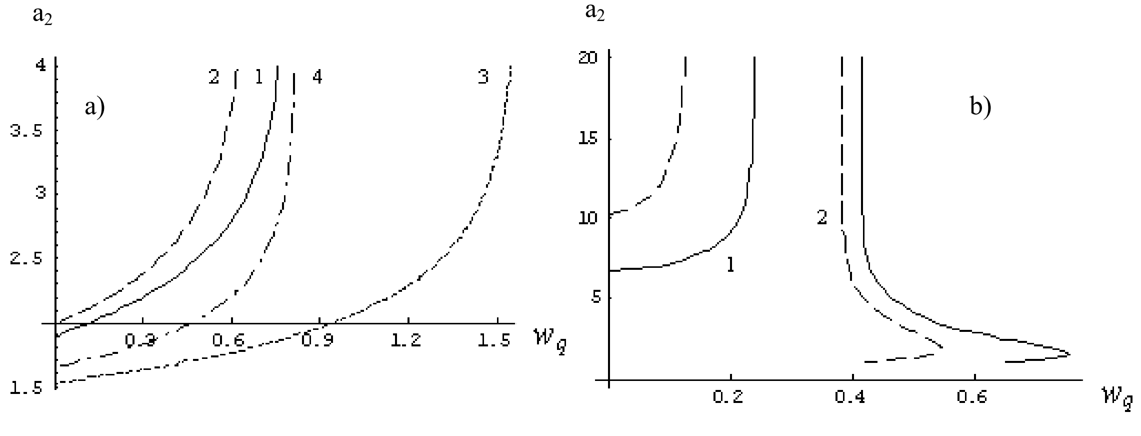

Рисунок 2.1 – Условия квантования энергии связанных состояний для суперпозиции двух δ-потенциалов

(a – условия квантования при $m = 1$, $a_1 = 1$, $V_1 = 7$, $V_2 = -2$;

b – условия квантования при $m = 1$, $a_1 = 1$, $V_1 = -2$, $V_2 = -1$)

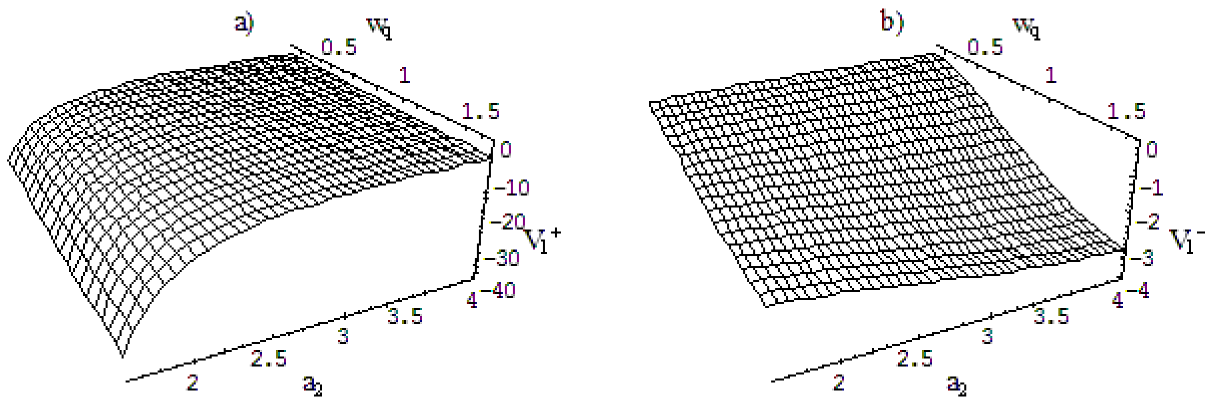

Рисунок 2.2 – Условия квантования энергии в случае $j = 1$ для суперпозиции двух δ-потенциалов (a – для V_1^{+}; b – для V_1^{-} при $m = 1,\ a_1 = 1,\ \alpha = 1$)

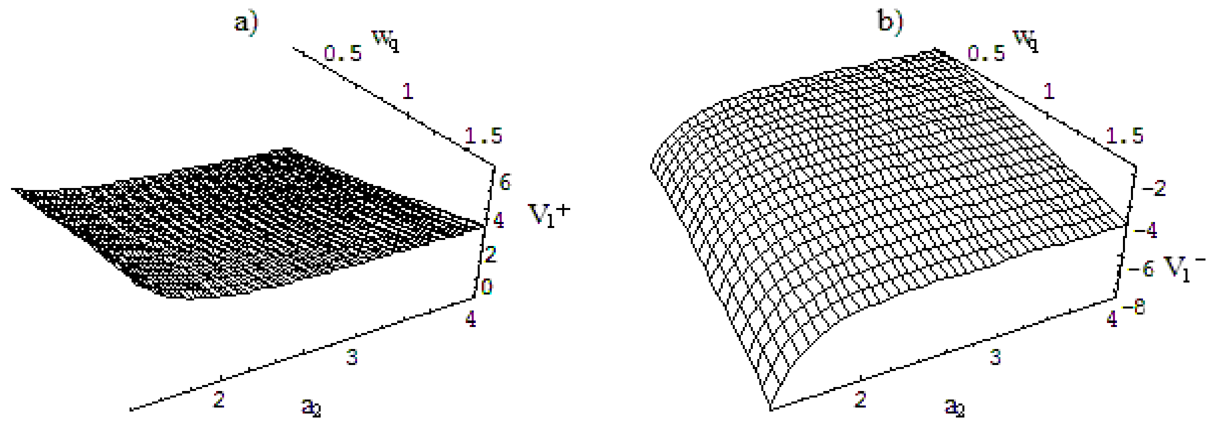

Рисунок 2.3 – Условия квантования энергии в случае $j = 4$ для суперпозиции двух δ-потенциалов (a – для V_1^{+}; b – для V_1^{-} при $m = 1,\ a_1 = 1,\ \alpha = -1$)

3 Нерелятивистский предел

Определим теперь нерелятивистский предел полученных результатов. В этом пределе ($w_q \to 0$, $m \to \infty$) полученные условия квантования (1.7), (2.4) имеют одинаковый для всех рассматриваемых уравнений вид

$$\lim_{\substack{w_q \to 0 \\ m \to \infty}} V_{0(j)}(w_q) = \\ = V_{0(0)}(\kappa) = \frac{-2\kappa}{1-\exp(-\kappa a)}, \tag{3.1}$$

$$1 + \frac{1}{\kappa}\sum_{s=1}^{2} V_s \exp(-\kappa a_s)\,\mathrm{sh}(\kappa a_s) + \\ + \frac{V_1 V_2}{\kappa^2}\exp(-\kappa a_2)\,\mathrm{sh}(\kappa a_1)\,\mathrm{sh}(\kappa a_2 - \kappa a_1) = 0, \tag{3.2}$$

где $\kappa = w_q m$. Выражения (3.1), (3.2) совпадают с условиями, полученными при решении уравнения Шрёдингера с потенциалом «δ-сфера» в координатном представлении и суперпозицией двух таких потенциалов.

Заключение

В данной работе получены точные решения релятивистской задачи о связанных s-состояниях системы двух скалярных частиц одинаковой массы. Решение задачи найдено на основании четырёх вариантов двухчастичных уравнений квазипотенциального типа в случае моделирования взаимодействия δ-потенциалом и суперпозицией двух таких потенциалов в релятивистском конфигурационном представлении. В ходе анализа найденных аналитических выражений для условий квантования энергии были определены знаки коэффициентов в δ-потенциалах, при которых возможно существование связанных состояний, а также максимально возможное число этих состояний. Нерелятивистский предел полученных выражений совпадает с соответствующими выражениями, полученными при решении аналогичных задач квантовой механики. Эти результаты будут полезны при решении задач о связанных состояниях систем двух частиц в случае моделирования взаимодействий суперпозициями большего числа потенциалов «δ-сфера», что представляется перспективным для релятивистского описания нуклон-нуклонных взаимодействий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Капшай*, *В.Н.* Релятивистская задача о *s*-состояниях рассеяния для суперпозиции двух потенциалов «δ-сфера» / В.Н. Капшай, Ю.А. Гришечкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 7–12.

2. *Navarro-Perez*, *R*. Effective Interactions in the delta-shells potential / R. Navarro-Perez, J.E. Amaro, E. Ruiz-Arriola // Few Body Syst. – 2013. – Vol. 54, № 7–10. – P. 1487–1490.

3. *Navarro-Perez*, *R*. Phenomenological high precision neutron-proton delta-shell potential / R. Navarro-Perez, J.E. Amaro, E. Ruiz-Arriola // Phys. Lett. B. – 2013. – Vol. 724, № 1–3. – P. 138–143.

4. *Kapshai*, *V.N.* One-dimensional relativistic problems on bound states and scattering for a superposition of two potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // Russian Physics Journal. – 2002. – Vol. 45. – P. 1–9.

5. *Капшай*, *В.Н.* Разложение по матричным элементам УНП группы Лоренца и интегральные уравнения для релятивистских волновых функций / В.Н. Капшай, Т.А. Алфёрова // Ковариантные методы в теоретической физике: Сб. ст. // Ин-т физики НАН Беларуси. – Минск, 1997. – Вып. 4. – С. 88–95.

6. *Alferova*, *T.A*. Expansion in terms of matrix elements of the Lorentz group unitary irreducible representations and integral equations for scattering states relativistic wave functions / T.A. Alferova, V.N. Kapshai // Nonlinear phenomena in complex systems: Proced. of the Sixth Annual Seminar NPCS'97 / Academy of Sciences of Belarus. Inst. of Phys. – Minsk, 1998. – P. 78–85.

7. *Logunov*, *A.A*. Quasi-optical approach in quantum field theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.

8. *Kadyshevsky*, *V.G*. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V.G. Kadyshevsky // Nucl. Phys. – 1968. – Vol. B6, № 1. – P. 125–148.

9. *Кадышевский*, *В.Г.* Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.

10. *Тейлор*, *Дж.* Теория рассеяния / Дж. Тейлор. – М.: Мир, 1975. – 568 с.

Поступила в редакцию 28.02.17.