

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ ПО ИЗМЕРЕНИЮ РАССЕЯНИЯ СВЕТА ПОД ДВУМЯ УГЛАМИ

Э. П. Зимин, А. М. Кругерский и Э. Г. Мизневич

Описан метод определения объемной концентрации грубодисперсных сферических частиц по измерению светорассеяния под двумя углами. Приведены результаты численных расчетов по исследованию оптимального варианта выбора пары углов и точности предлагаемого метода. Представлены результаты экспериментальной апробации метода.

Для прямой задачи дифракции Фраунгофера на полидисперсной системе «жестких» сферических независимо рассеивающих частиц в виде

$$\Phi(\theta) = \frac{c}{\theta^2} \int_0^\infty J_1^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \theta\right) a^2 n(a) da \quad (1)$$

Шифрин получил следующую формулу обращения [1]:

$$n(a) = -\frac{2\pi^3}{\lambda^2 ac} \int_0^\infty \theta \frac{d}{d\theta} [\theta^3 \Phi(\theta)] J_1\left(\frac{\pi a}{\lambda} \theta\right) Y_1\left(\frac{\pi a}{\lambda} \theta\right) d\theta. \quad (2)$$

Здесь Φ — поток электромагнитного излучения, рассеянного под углом θ к волновому вектору падающего излучения, $n(a)$ — спектральная счетная концентрация частиц, a — диаметр частицы, λ — длина волны, c — константа пропорциональности, J_1 и Y_1 — функции Бесселя первого и второго рода первого порядка.

Уравнение (2) является основой предложенного Шифриным метода измерения спектра размеров частиц в грубодисперсных аэрозолях по малоугловому рассеянию монохроматического электромагнитного излучения в видимой области (метод малых углов) [1]. Обзоры работ по использованию этого метода для диагностики аэрозолей имеются в [2, 3]. В работах [3, 4] метод малых углов использовался для абсолютных измерений параметров дисперсной фазы (путем расшифровки константы c). Это позволило определять не только спектр размеров в относительных единицах, но и интегральные параметры дисперсной фазы двухфазной среды: счет-

ную $N = \int_0^\infty n(a) da$ и объемную $\rho = (\pi/6) \int_0^\infty a^3 n(a) da$ концентрация частиц.

Использование метода малых углов для определения интегральных параметров дисперсных частиц связано с проведением большого объема измерительных и вычислительных работ.

Если целью эксперимента является определение только объемной концентрации дисперсной фазы, то для ее измерения можно предложить метод, в значительной степени свободный от недостатков, свойственных

определению ρ по спектру размеров частиц, измеряемому методом малых углов.

Предлагаемый метод основан на использовании только решения прямой задачи дифракции для полидисперсной системы сферических частиц.

Вводя параметр

$$A_j = \int_0^{\infty} a^j n(a) da \quad (3)$$

и используя теорему о среднем [5], интегральное уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$\Phi(\theta) = \frac{ca_0^{2-j}(\theta)}{\theta^2} A_j J_1^2 \left[\frac{\pi a_0(\theta)}{\lambda} \theta \right]. \quad (4)$$

Применение указанной теоремы возможно, так как функция $a^{2-j} J_1^2 \times \left(\frac{\pi a}{\lambda} \theta \right)$ является непрерывной, а функция $a^j n(a)$ не изменяет знак в интервале $[0, \infty]$. Параметр A_j в зависимости от значения j соответствует различным моментам функции $n(a)$.

Интегральные параметры дисперсной фазы легко выражаются через соответствующие моменты функции $n(a)$. Например, при $j=0$ получаем счетную концентрацию N , при $j=3$ получаем объемную концентрацию ρ в виде $\rho = (\pi/6)A_3$.

Если выбрать два угла θ_1 и θ_2 достаточно близкими, чтобы полагать a_0 постоянным в интервале $[\theta_1, \theta_2]$, то получим систему из двух трансцендентных уравнений, решениями которой являются a_0 и A_j .

Таким образом, предлагаемый метод определения интегральных параметров дисперсной фазы по малоугловому рассеянию света сводится к измерению потока рассеянного излучения только на двух углах. Поэтому будем называть его методом двух углов. Столь простое получение исходной экспериментальной информации позволяет легко обеспечить высокую оперативность измерений и диагностику двухфазных сред с нестационарным спектром частиц.

Однако прежде чем сделать окончательные выводы о работоспособности предлагаемого метода, необходимо рассмотреть условия решения упомянутой выше системы трансцендентных уравнений и проанализировать возможность введения предположения о постоянстве a_0 .

При условии $a_0 = \text{const}$ уравнение (4) формально совпадает с решением прямой задачи дифракции для монодисперсной системы частиц с диаметром a_0 . В этом случае система уравнений, соответствующих двум углам θ_1 и θ_2 , сводится к одному уравнению

$$J_1(z) = F(z), \quad (5)$$

где

$$z = \frac{\pi a_0}{\lambda} \theta_1, \quad \alpha = \frac{\theta_2}{\theta_1}, \quad F(z) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\Phi(\theta_1)}{\Phi(\theta_2)}} J_1(\alpha z).$$

Уравнение (5) удобно решать графически. Функция $J_1(z)$ является табулированной [6]. График функции $F(z)$ для заданных значений α и $\Phi(\theta_1)/\Phi(\theta_2)$ легко получить перестроением графика функции $J_1(z)$. Формально уравнение (5) имеет бесконечное множество решений. Однако если углы θ_1 и θ_2 выбраны на участке, соответствующем первому порядку дифракции ($\theta < 3.8 \lambda/\pi a_0$), то физический смысл имеет корень уравнения (5), меньший первого ненулевого корня уравнения $F(z)=0$. Для примера на рис. 1 показано графическое решение уравнения (5) для случая $a_0 = 14$ мкм, $\lambda = 0.63$ мкм, $\theta_1 = 10^{-2}$ и $\theta_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ рад. Параметр a_0 определяется соотношением $a_0 = \lambda z_0/\pi \theta_1$. Определив a_0 , с помощью уравнения (4) для любого из двух углов находим A_j .

Следует отметить, что параметр a_0 при обработке данных по светорассеянию на полидисперсной системе частиц методом двух углов является

просто вспомогательной величиной и в общем случае не выражается через модальный размер. Этот параметр равен диаметру частиц монодисперсной системы, эквивалентной по светорассеянию рассматриваемой полидисперсной системе.

Аналитическое выражение, описывающее зависимость погрешности определения интегральных параметров методом двух углов от величин углов Θ_1 и Θ_2 в предположении о постоянстве a_0 в интервале $[\Theta_1, \Theta_2]$, получить невозможно. Поэтому оптимизация выбора углов была проведена путем вычислений указанной погрешности для нескольких вариантов задания углов: для оптимального варианта выбора пары углов была проведена оценка точности предлагаемого метода для ряда спектров, представляющих практический интерес. Подробные исследования влияния выбора углов на погрешность определения A_j были проведены для момента A_3 , представляющего собой с точностью до постоянного множителя объемную концентрацию частиц дисперсной фазы ρ . Анализ условий измерения счетной концентрации N и суммарного поперечника частиц дисперсной фазы S — особая задача, и ее решение выходит за рамки данной работы. В данной работе приводятся только данные по погрешности определения N и S при вариантах выбора углов, оптимальных для измерения ρ .

Сразу можно отметить два очевидных положения, которыми следует руководствоваться при выборе углов. Во-первых, разность между углами должна быть достаточно малой, чтобы можно было считать ее постоянной в интервале $[\Theta_1, \Theta_2]$. Во-вторых, значения углов следует принимать достаточно малыми, чтобы они соответствовали углам, на которые эффективно рассеивают достаточно крупные частицы распределения, определяющие такой важнейший параметр двухфазной системы, как объемная концентрация частиц дисперсной фазы.

Второе положение позволяет также максимально обеспечить удовлетворение условия о постоянстве a_0 . Действительно, если угол Θ достаточно мал, чтобы удовлетворялось неравенство $(\pi a/\lambda)\Theta \ll 1$, то, используя асимптотическое представление $J_1(z) = z/2$, уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$\Phi(\Theta) = \frac{c\pi^2}{4\lambda^2} \int_0^\infty a^4 n(a) da = \frac{c\pi^2}{4\lambda^2} A_4.$$

С другой стороны, при $\Theta \rightarrow 0$ из уравнения (4) при $j=3$ получаем

$$\Phi(\Theta) = \frac{c\pi^2 a_0}{4\lambda^2} A_3.$$

Сравнение этих выражений свидетельствует о том, что $a_0(\Theta)$ при $\Theta \rightarrow 0$ стремится к постоянному значению A_4/A_3 .

Удержание следующих членов разложения функции $J_1(z)$ также дает постоянное значение параметра a_0 , определяемое выражением

$$a_0 = a_0(0) - \frac{\pi^2 A_6}{4\lambda^2 A_3},$$

где $a_0(0)$ — значение a_0 при $\Theta=0$. Следовательно, выбирая углы Θ_1 и Θ_2 достаточно близкими к нулю, получим пренебрежимо малое различие между $a_0(\Theta_1)$ и $a_0(\Theta_2)$.

Подробные вычисления погрешности проводились для модельного углового распределения потока светорассеяния соответственно спектру

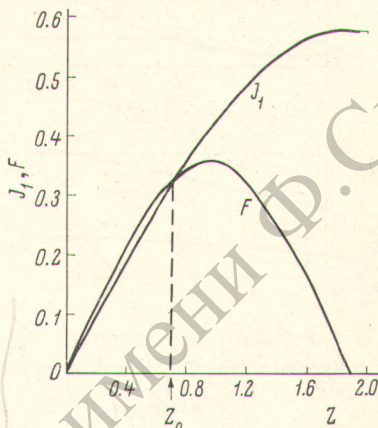


Рис. 1.

с нормальным распределением частиц по размерам, имеющим модальный размер $a = 12$ мкм и дисперсию $\sigma = 3$ мкм. Спектры, подобные данному, представляют практический интерес при исследованиях грубодисперсных аэрозолей [3]. Угловое распределение потока рассеянного излучения было задано в интервале углов от 10^{-2} до $7 \cdot 10^{-2}$ (здесь и далее углы даны в радианах) для следующих вариантов выбора углов измерения: 1) угол Θ_1 зафиксирован на наименьшем значении 10^{-2} , угол Θ_2 варьируется ($\Theta_2 > \Theta_1$);

2) угол Θ_2 зафиксирован на среднем значении $4 \cdot 10^{-2}$, угол Θ_1 варьируется; 3) угол Θ_1 зафиксирован на среднем значении $4 \cdot 10^{-2}$, угол Θ_2 варьируется; 4) варьируется $\Theta_{cp} = (\Theta_1 + \Theta_2)/2$ при $\Theta_1 = \Theta_2 = 10^{-2}$.

Результаты вычислений объемной концентрации ρ для описанного спектра представлены на рис. 2 (объемная концентрация, определенная непосредственно по спектру $\rho_0 = 1.07 \cdot 10^{-3}$, нанесена штрихпунктирной линией).

Анализ данных, представленных на рис. 2, показывает, что наименьшую относительную погрешность ($\leq 4\%$) метод двух углов обеспечивает при 1-м варианте выбора углов, когда Θ_1 зафиксирован на значении 10^{-2} и $\Theta_2 \leq 4 \cdot 10^{-2}$.

Влияние дисперсии на точность определения ρ методом двух углов показано в таблице, где для сравнения приведены также результаты применения метода малых углов. Вычисления проведены для нормальных распределений с одинаковым модальным размером $a_m = 12$ мкм при различных значениях дисперсии $\sigma = 0.5, 1, 2$ и 3 мкм. Из приведенных данных можно видеть, что точность определения объемной концентрации ρ методом малых углов падает по мере уменьшения ширины спектра. Относительно погрешности определения ρ методом двух углов можно сказать, что она незначительна при всех рассмотренных значениях дисперсии.

Как показали расчеты, предлагаемый метод двух углов можно использовать для измерения ρ при любой форме спектра. Например, вычисление удельного объема этим методом (при выбранных значениях углов $\Theta_1 = 10^{-2}$

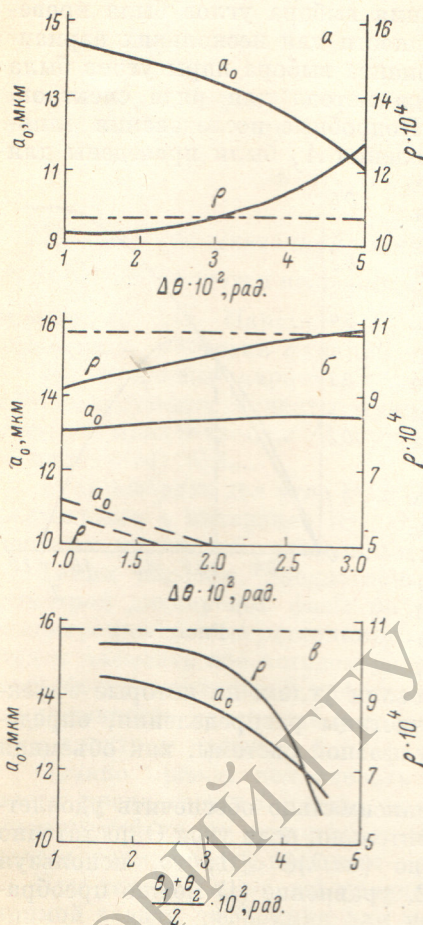


Рис. 2. Результаты расчетов a_0 и ρ при различном выборе углов.

a — вариант № 1, $б$ — варианты № 2 (сплошная линия) и № 3 (штриховая линия) и $в$ — вариант № 4.

зависит от выбора углов. Например, при $\Theta_1 = 10^{-2}$ и $\Theta_2 = 4 \cdot 10^{-2}$ погрешность определения ρ составляет не более 1%.

Результаты вычисления объемной концентрации частиц методом двух углов и методом малых углов для спектров с различными значениями дисперсии

σ , мкм	$\rho_0 \cdot 10^3$	Метод малых углов		Метод двух углов	
		$\rho \cdot 10^3$	$ \Delta\rho /\rho$, %	$\rho \cdot 10^3$	$ \Delta\rho /\rho$, %
0.5	0.91	1.05	15	0.90	1
1	0.92	1.00	8	0.92	0
2	0.98	1.03	5	0.95	3
3	1.07	1.09	2	1.03	4

и $\Theta_2=2 \cdot 10^{-2}$) для бимодального спектра, представляющего собой суперпозицию двух нормальных спектров с модальными размерами $a_{m1}=12$ мкм и $a_{m2}=24$ мкм и одинаковой дисперсией $\sigma=3$ мкм при $n(a_{m1})=n(a_{m2})$, дает $\rho=8.2 \cdot 10^{-4}$ при $\rho_0=8.6 \cdot 10^{-4}$ (относительная погрешность менее 5%). Следует отметить, что по мере увеличения модального размера следует переходить на меньшие углы измерения, так как с увеличением размера частицы дифракционная составляющая рассеянного света концентрируется на меньших углах. Выбор углов вблизи значений $\Theta_1=10^{-2}$ и $\Theta_2=2 \cdot 10^{-2}$ обеспечивает достаточно высокую точность определения ρ для спектров с $a_m \leq 30$ мкм.

Следует отметить, что определение некоторых параметров дисперсных частиц может быть также существенно без решения интегрального уравнения прямой задачи дифракции при использовании предложения о заданном характере распределения частиц по размерам. Так, в работе [8]

показано, что если распределение объемной концентрации дисперсных частиц описывается нормальным законом, то по измерению потоков светорассеяния под двумя углами можно определить величину наиболее вероятного размера частиц. В работе [7] показано, что оптическая информация одномодального γ -распределения имеет характерные координаты, по которым могут быть определены счетная концентрация частиц N , модальный размер a_m и параметр γ -распределения μ . Однако применение этих методов требует априорной информации о характере распределения частиц. При использовании метода двух углов такой информации не требуется.

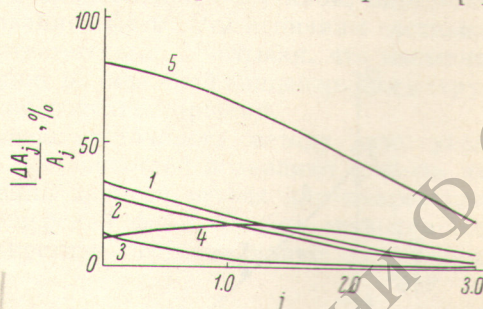


Рис. 3. Зависимость относительной погрешности $|\Delta A_j|/A_j$ от значения j .

Кривая 1 — $\Delta\Theta=10^{-2}$, 2 — $2 \cdot 10^{-2}$, 3 — $3 \cdot 10^{-2}$, 4 — $4 \cdot 10^{-2}$, 5 — $5 \cdot 10^{-2}$.

Не обсуждая в этой статье условий измерения таких интегральных параметров, как счетная концентрация частиц дисперсной фазы $N(j=0)$ и суммарный поперечник частиц $S(j=2)$, приведем лишь зависимость относительной погрешности $|\Delta A_j|/A_j$ от значения j для выбора углов по 1-му варианту (рис. 3). Видно, что наибольшая точность обеспечивается при измерениях объемной концентрации. Суммарный поперечник частиц также определяется с приемлемой точностью (за исключением выбора $\Theta_1=10^{-2}$ и $\Theta_2=6 \cdot 10^{-2}$, при котором и объемная концентрация ρ измеряется с существенной погрешностью), а погрешность определения N слишком большая. Такой результат объясняется тем, что вклад относительно мелких частиц распределения в суммарный поток светорассеяния на рассматриваемых углах мал по сравнению с вкладом крупных частиц. Поэтому концентрация мелких частиц измеряется с большой погрешностью. Напротив, объемная концентрация частиц определяется в основном относительно крупными частицами и погрешность вычисления $n(a)$ в области малых значений a оказывает незначительное влияние на точность определения ρ . Погрешность же вычисления величины N в одинаковой мере определяется погрешностью вычисления концентрации как малых, так и более крупных частиц распределения.

Для апробации предлагаемого метода определения объемной концентрации дисперсной фазы двухфазных сред по измерению светорассеяния на двух углах были использованы экспериментальные данные по светорассеянию, полученные в работе [3] при исследованиях распределения твердых частиц (частицы золи) в осесимметричной воздушной струе методом малых углов. Сочетание метода двух углов с методом Абеля позволяет определять радиальное изменение объемной концентрации в осесимметричной струе. Описание организации двухфазной воздушной струи и схемы измерения потока светорассеяния при сканировании струи све-

товым пучком приведено в [3]. Там же на основании данных работы [9] приводится техника вычислений перехода от замеров на выбранных хордах к значениям, относящимся к соответствующим кольцевым зонам. Размеры исследуемых частиц лежат в диапазоне единицы—десятки микрон, что определило использование в качестве источника света гелий-неонового лазера с длиной волны 0.63 мкм.

На рис. 4 приведена экспериментальная зависимость изменения потока рассеянного излучения Φ под двумя углами ($2.33 \cdot 10^{-2}$ и $3.67 \cdot 10^{-2}$) от координаты хорды $x = ql$, на которой производятся измерения. Здесь q — расстояние между хордами и l — номер хорды.

Как известно, численное решение уравнения Абеля позволяет найти радиальное распределение функции $g(r)$, для которой известны ее интег-

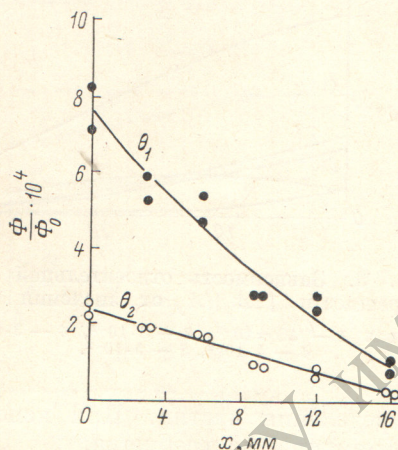


Рис. 4. Зависимость потока рассеянного излучения, измеренного на углах $\theta_1 = 2.33 \cdot 10^{-2}$ и $\theta_2 = 3.67 \cdot 10^{-2}$, от расстояния хорды измерения до центра струи.

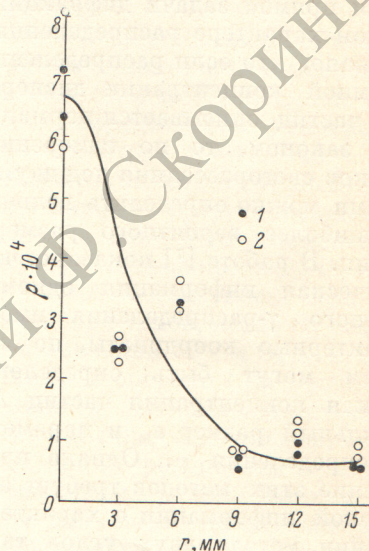


Рис. 5. Сравнение результатов измерения радиального изменения объемной концентрации частиц. 1 — метод малых углов, 2 — метод двух углов.

ральные значения $G(x)$ по хордам, относящим на расстояние $x = ql$ от центра. Так как $r = qk$, то

$$g(qk) = -\frac{2}{\pi q} \sum_{i=k}^m B_i^k G(ql). \quad (6)$$

В методе Абеля при использовании его в сочетании с методом двух углов в качестве функции $G^0(ql)$ выступает экспериментально определяемая величина Φ . Функция $g^0(qk)$ представляет собой в данном случае световой поток, рассеянный под углом Θ единичным рассеивающим объемом с координатой $r = qk$. Таким образом, объемная концентрация дисперсных частиц на каждом значении радиуса r определяется из решения системы двух уравнений ($\alpha = 1, 2$)

$$\rho(r) J_1^2\left(\frac{\pi a_0}{\lambda} \Theta_\alpha\right) = \frac{a_0 \Theta_\alpha^2}{3qc'} \sum_{i=k}^m B_i^k G^0(ql).$$

Константа дается выражением $c' = \frac{1}{4} i_0 S \Omega$, где i_0 — интенсивность падающего излучения, S — сечение зондирующего луча и Ω — телесный угол, в который принимается рассеянный свет.

По этой формуле были обработаны экспериментальные зависимости, представленные на рис. 4. Полученное радиальное изменение удельного

объема дисперсной фазы показано на рис. 5. На этом же рисунке для сравнения представлены результаты измерений, полученные методом малых углов (измерение угловых распределений на наборе хорд, вычисление спектров размеров частиц по формуле обращения и вычисление по этим спектрам радиального изменения объемной концентрации) при тех же параметрах двухфазного потока.

Сопоставление результатов, полученных предлагаемым методом двух углов и методом малых углов, показывает, что оба метода дают практически одинаковые результаты. Однако объем измерительных и вычислительных работ по методу двух углов значительно меньше.

Для контроля проведенных измерений было проведено сравнение среднего значения объемной концентрации дисперсной фазы, определенного по измеренному радиальному распределению (рис. 5) для метода малых углов и метода двух углов с аналогичной величиной, определенной по расходам газа и конденсированной фазы. Эти величины составили $1.35 \cdot 10^{-4}$, $1.47 \cdot 10^{-4}$ и $2.00 \cdot 10^{-4}$ соответственно. Учитывая, что насыпной объем частиц дает завышенное значение их объемной концентрации в струе, согласование указанных цифр можно считать хорошим.

Проведенные численные исследования точности метода двух углов и экспериментальная проверка его возможностей позволяют сделать вывод о целесообразности использования данного метода для диагностики объемной концентрации частиц дисперсной фазы. Особое значение этот метод может приобрести при диагностике нестационарных двухфазных объектов.

Литература

- [1] К. С. Шифрин. Тр. ВЗЛТИ, № 2, 153, 1956.
- [2] К. С. Шифрин. Сб. «Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света», 228. Изд. «Наука и техника», Минск, 1971.
- [3] Э. П. Зимин, О. В. Иноземцев, А. М. Кругерский, З. Г. Михневич. ТВТ, 11, 1030, 1973.
- [4] М. А. Сальман. ЖТФ, 40, 872, 1970.
- [5] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа. Физматгиз, М., 1963.
- [6] Е. Янке, Ф. Эмде. Таблицы функций. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
- [7] О. В. Гранкин, В. И. Чернышев, И. В. Колмаков. Сб. «Физика аэродисперсных систем», 47. Изд. КГУ, Киев, 1972.
- [8] А. Г. Блох. Тепловое излучение в котельных установках. Изд. «Энергия», Л., 1967.
- [9] O. H. Nestor, H. N. Olsen. SIAM Review, 2, 200, 1960.

Поступило в Редакцию 8 октября 1973 г.