Проблемы физики, математики и техники, № 2 (31), 2017

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ ОБОБЩЕННО МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ (ОБЗОР). II. ОТ МАКСИМАЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ К МАКСИМАЛЬНЫМ ПАРАМ

В.А. Ковалёва

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FINITE GROUPS WITH GIVEN GENERALIZED MAXIMAL SUBGROUPS (REVIEW). II. FROM THE MAXIMAL CHAINS TO THE MAXIMAL PAIRS

V.A. Kovaleva

F. Scorina Gomel State University

Пусть G – конечная группа. Напомним, что максимальной цепью длины n в G называется всякая цепь вида $H_n < H_{n-1} < \cdots < H_1 < H_0 = G,$ где H_i – максимальная подгруппа в H_{i-1} для всякого $i = 1, \ldots, n.$ В данном обзоре продолжен анализ наиболее известных работ, связанных с исследованиями конечных групп с заданными максимальными цепями.

Ключевые слова: *конечная группа*, *максимальная цепь*, *n-максимальная подгруппа*, *максимальная пара подгрупп.*

Let G be a finite group. Recall that a maximal chain of G of length n is a chain $H_n < H_{n-1} < \cdots < H_1 < H_0 = G$ such that H_i is a maximal subgroup of H_{i-1} for every $i = 1, \ldots, n.$ In this review we continue the analysis of the most famous papers in which finite groups with given maximal chains are developed.

Keywords: *finite group*, *maximal chain*, *n-maximal subgroup*, *maximal pair of subgroups.*

Введение

Все рассматриваемые в работе группы являются конечными и G обозначает конечную группу. Символ $\pi(G)$ обозначает множество всех простых делителей порядка G, n обозначает некоторое натуральное число.

Напомним, что *максимальной цепью длины* n в G называется всякая цепь вида

$$H_n < H_{n-1} < \cdots < H_1 < H_0 = G,$$

где H_i – максимальная подгруппа в H_{i-1} для всякого $i = 1, \ldots, n.$ Подгруппа H из G называется *n-максимальной подгруппой* в G, если H является последним членом некоторой максимальной цепи длины n.

В [1] автором были рассмотрены наиболее известные работы, в которых авторами изучались группы с обобщенно нормальными n-максимальными подгруппами. В данной статье продолжен анализ работ, связанных с исследованиями групп с заданными максимальными цепями подгрупп. В частности, рассмотрены группы, в каждой максимальной цепи длины n которых содержится собственная (обобщенно) субнормальная подгруппа, а также группы, все n-максимальные подгруппы которых обладают некоторым наследственным теоретико-групповым свойством. Кроме того, рассмотрено такое интересное обобщение максимальной подгруппы, как максимальная пара подгрупп.

Используемые в статье обозначения и терминологию можно при необходимости найти в [2]–[4].

1 Группы, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную субнормальную подгруппу

В работе [5] Манном были изучены группы, все n-максимальные подгруппы которых являются субнормальными. В частности, Манном было доказано, что если все n-максимальные подгруппы разрешимой группы G субнормальны и $|\pi(G)| \geq n+1,$ то G нильпотентна; если $|\pi(G)| \geq n-1,$ то G является ϕ-дисперсивной для некоторого упорядочения ϕ множества $\pi(G)$. И, наконец, в случае, когда $|\pi(G)| \geq n,$ Манн привел полное описание G [5, теорема 8] (см. также теорему 2.1 в [1]). Поскольку каждая n-максимальная подгруппа является последним членом некоторой максимальной цепи длины n, возникла естественная задача исследования групп, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную субнормальную подгруппу. В данном направлении следует, прежде всего, отметить работы Дескинса [6] и Спенсера [7], [8]. В [6] Дескинсом было введено понятие вариантности группы. При этом под *вариантностью максимальной цепи длины n* группы G понимается отношение n к числу членов цепи, отличных от G, в случае, когда такое число не равно 0, и n в противном случае; *вариантность* G равна наибольшей из вариантностей максимальных цепей из G. Изучая влияние вариантности на строение группы, Дескинс получил следующий результат.

***Теорема* 1.1** [6, теорема 3]. *В каждом из следующих случаев G разрешима:*

(i) *вариантность G меньше* 5 *и* $(|G|,3)=1$;

(ii) *вариантность G меньше* 4.

В дальнейшем Асаадом [9] была установлена разрешимость G в случае, когда вариантность G меньше 8 и $(|G|,3)=1.$ Более того, Асаад показал, что группа G, вариантность которой равна 8 и $(|G|,3)=1$, изоморфна $Sz(2^3)$ – простой группе Судзуки над полем из 2^3 элементов.

В работе [7] Спенсер, рассматривая ненильпотентные разрешимые группы G, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную субнормальную в G подгруппу, показал, что для таких групп $|\pi(G)|\le n$ и нильпотентная длина и ранг G не превышают n. Более того, в случае, когда $|\pi(G)|=n$, все силовские подгруппы из G являются абелевыми; в случае же, когда $|\pi(G)|\ge n-1$, G является ϕ-дисперсивной для некоторого упорядочения ϕ множества $\pi(G)$. В [7] были также рассмотрены группы, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную субнормальную подгруппу и в которых существует по крайней мере одна максимальная цепь длины $n-1$, не содержащая собственных субнормальных подгрупп. Для этого была введена функция $h(G)$, причем $h(G)=n$, если G обладает указанным выше свойством (впоследствии группы с $h(G)=n$ были названы *группами высоты Спенсера n* [10]).

***Теорема* 1.2** [7, теоремы 1–4]. *Для разрешимой группы G справедливы следующие утверждения*:

(i) *нильпотентная длина G не превышает* $h(G)$;

(ii) *если* $h(G)<|\pi(G)|$, *то G нильпотентна;*

(iii) *если* $h(G)-|\pi(G)|\le 1$, *то G является* ϕ*-дисперсивной для некоторого упорядочения* ϕ *множества* $\pi(G)$;

(iv) *если* $h(G)=|\pi(G)|\ge 2$, *то силовские подгруппы из G либо цикличны, либо являются элементарными абелевыми группами. Более того, если в G существуют по крайней мере две неизоморфные ненормальные силовские подгруппы, то все ненормальные силовские подгруппы из G имеют простые порядки.*

***Теорема* 1.3** [7, теорема 7]. *Если* $h(G)\ge 2$, *то ранг G не превосходит* $h(G)$.

Заметим также, что в случае, когда $h(G)=2$, в [7] было установлено, что G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Кроме того, развивая результаты Дескинса [6], Спенсер установил разрешимость G при $h(G)\le 3$ и $h(G)\le 4$ с $(|G|,3)=1$ [7, теорема 6].

Исследования работы [7] были продолжены в дальнейшей работе Спенсера [8]. Один из основных результатов этой публикации позволяет обобщить результат Манна [5, теорема 8].

***Теорема* 1.4** [8]. *Если G разрешима и* $h(G)=|\pi(G)|\ge 2$, *то* $G=NH$, *где N – нормальная нильпотентная холлова подгруппа из G, все силовские подгруппы которой являются элементарными абелевыми группами, и H – дополнение к N, причем H является циклической группой и в случае, когда* $|\pi(H)|\ge 2$, $|H|$ *является свободным от квадратов числом.*

В [8] Спенсеру удалось также улучшить границу для нильпотентной длины разрешимой группы G. Было доказано, что нильпотентная длина G не превосходит $h(G)-|\pi(G)|+2$. В этой же работе Спенсер обобщил результаты работы Янко [11] о группах с нормальными 4-максимальными подгруппами (см. также раздел 1 в [1]), доказав следующую теорему.

***Теорема* 1.5** [8, теорема 4]. *Если G неразрешима и* $h(G)=4$, *то G изоморфна либо группе* $SL(2,5)$, *либо группе* $PSL(2,p)$, *где* $p=5$ *или p – такое простое число, что* $p-1$ *и* $p+1$ *являются произведением не более трех простых чисел и либо* $p\equiv\pm 3(\mathrm{mod}\ 40)$, *либо* $p\equiv\pm 13(\mathrm{mod}\ 40)$.

Среди современных исследований групп, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную субнормальную подгруппу, отметим работы Андреевой, Скибы и В. Го [10], [12]. В [12] изучались группы, каждая максимальная цепь длины два или три которых содержит собственную субнормальную подгруппу. Так, в случае, когда каждая максимальная цепь длины два группы содержит собственную субнормальную подгруппу, было установлено, что группа является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами (из чего, в частности, следует отмеченный выше результат Спенсера). В дальнейшем в [10] было получено полное описание групп, каждая максимальная цепь длины 3 которых содержит собственную субнормальную подгруппу и в которых существует по крайней мере одна максимальная цепь длины 2, не содержащая собственных субнормальных подгрупп (групп высоты Спенсера 3).

***Теорема* 1.6** [12, теорема]. *Пусть* p,q,r – *различные простые числа,* P, Q, R – *соответствующие им силовские подгруппы из G. В том и только в том случае G является группой высоты Спенсера* 3, *когда* $|G|=p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}$, *где* $p\ne q$ *и* $3\le\alpha+\beta+\gamma$, *и G является группой одного из следующих типов:*

I. $G=PQ$ *и G удовлетворяет по крайней мере одному из условий:*

(1) *G – группа Шмидта с* $|\Phi(P)|\le p$;

(2) *P – минимальная нормальная подгруппа в G и либо* $|Q:Q_G|=q^2$ *и все максимальные подгруппы из Q являются циклическими, либо Q – нециклическая группа,* $|Q:Q_G|=q$ *и любая максимальная подгруппа из Q, отличная от* Q_G, *является циклической;*

(3) $G=G^{\mathfrak{N}}\rtimes M$, *где нильпотентный корадикал* $G^{\mathfrak{N}}$ *группы G является минимальной нормальной подгруппой в G,* $M=M_p\times Q$ *– представитель единственного класса ненормальных максимальных подгрупп из G,* $|M_p|=p$, $Q=\langle a\rangle$ *– циклическая группа и* $|Q:Q_G|=q$;

(4) $\Phi(P)=1$ *и G – подпрямое произведение ненормальной максимальной подгруппы A и подгруппы B, где* $A=A_p\rtimes Q$ *– группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и* A_p *– минимальная нормальная подгруппа в G,* $B=B_p\rtimes Q$ *и либо B нильпотентна,* $|B_p|=p$ *и* $B_p\le Z(G)$, *либо* $B\simeq A$;

(5) $\Phi(P)\ne 1$, $A=\Phi(P)\rtimes Q$ *– представитель единственного класса ненормальных максимальных подгрупп из G, A – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и* $|Q:Q_G|=q$.

II. $G=P\rtimes(R\rtimes Q)$ *и G имеет только три класса максимальных подгрупп, представителями которых являются ненормальная холлова* r'*-подгруппа A, ненормальная холлова* p'*-подгруппа L и нормальная подгруппа M, причем* $|G:M|=q$. *Более того, выполнены следующие утверждения*:

(a) *L – либо группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, либо нильпотентная группа с* $|R|=r$;

(b) $A=P\rtimes Q$ *– группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и* $|Q:Q_G|=q$. *Более того, если A нормальна в G, то L нильпотентна*;

(c) *P – минимальная нормальная подгруппа в G и либо R является минимальной нормальной подгруппой в G, либо* $|R|=r$ *и* $|Q|=q$.

2 Группы, каждая максимальная цепь длины *n* которых содержит собственную обобщенно субнормальную подгруппу

Как и в случае обобщенно субнормальных *n*-максимальных подгрупп (см. раздел 3 в [1]), естественно рассмотреть группы, каждая максимальная цепь длины *n* которых содержит собственную обобщенно субнормальную подгруппу.

Группы, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную p-субнормальную подгруппу. Кегелем [13] было введено следующее обобщение субнормальности. Подгруппа *H* из *G* называется *p-субнормальной* в *G*, если для каждой силовской *p*-подгруппы G_p из *G* пересечение $H\cap G_p$ является силовской *p*-подгруппой в *H*. В работах Новицкого и Дуки [14], [15] были рассмотрены группы, все максимальные *pd*-цепи (максимальные цепи, каждый неединичный член которых является *pd*-группой) длины *n* которых содержат хотя бы одну собственную *p*-субнормальную подгруппу. Новицким были рассмотрены только те максимальные *pd*-цепи длины *n*, у которых силовская *p*-подгруппа *n*-го члена имеет наибольший порядок (максимальные *pd-цепи*. В [14] было установлено, что в случае, когда в каждой максимальной *pd*-цепи группы *G* существует собственная *p*-субнормальная подгруппа, *G* является *p*-нильпотентной группой Миллера-Морено; в случае, когда в каждой максимальной *pd*-цепи группы *G* существует собственная *p*-субнормальная подгруппа и в *G* имеется такая максимальная *pd*-цепь длины $n-1$, которая не содержит *p*-субнормальных в *G* подгрупп (*p* – наименьший простой делитель порядка *G*), *G* является *p*-нильпотентной. Кроме того, в [14] был получен следующий результат.

***Теорема* 2.1** [14, теорема 6]. *В том и только в том случае каждая максимальная* 2*d-цепь длины* 4 *неразрешимой группы G содержит собственную* 2*-субнормальную подгруппу и в G имеется максимальная* 2*d-цепь длины* 3, *не содержащая* 2*-субнормальных в G подгрупп*, *когда G изоморфна одной из следующих групп*:

(1) $SL(2,p)$, $PSL(2,p)$, *где p – простое число, причем* $p=5,13$ *или* $\lambda(p\pm1)=3$ *и* $p\not\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,10)$;

(2) $SL(2,3^p)$, $PSL(2,3^p)$, *где* $p>2$ *– простое число и* $\lambda(3^p\pm1)\le 3$.

В теореме 2.1, как и в дальнейшем, $\lambda(m)$ – сумма показателей канонического разложения числа *m*. В частности, $\lambda(G)$ – сумма показателей канонического разложения числа $|G|$.

В работе Дуки [15] были исследованы такие *pd*-группы *G*, все максимальные *pd*-цепи длины *n* которых содержат хотя бы одну собственную *p*-субнормальную подгруппу и в *G* существует по крайней мере одна максимальная *pd*-цепь длины $n-1$, не содержащая собственных *p*-субнормальных в *G* подгрупп. Было установлено, что для $n=2$ такие группы ненильпотентны, причем все их собственные подгруппы являются абелевыми. Кроме того, для случая $p=2$ и $n=3$ Дука установил разрешимость *pd*-группы. И, наконец, в случае $p=2$ и $n=4$ было установлено, что *G* изоморфна одной из групп, указанных в теореме 2.1.

Заметим, что следствиями отмеченных результатов Новицкого и Дуки являются результаты Дескинса [6, теорема 3] (см. также выше теорему 1.1) и Спенсера [7, теоремы 5–6].

Группы, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную (обобщенно) модулярную подгруппу. В работе Решко и Харламовой [16] были исследованы группы, все n-максимальные подгруппы которых являются либо модулярными, либо p-субнормальными (подгруппа H из G называется *модулярной*, если $\langle X, H \cap Z \rangle = \langle X, H \rangle \cap Z$ для всех $X \le Z \le G$ и $\langle H, Y \cap Z \rangle = \langle H, Y \rangle \cap Z$ для всех таких подгрупп Y, Z из G, что $H \le Z$). Исследования этой работы были в дальнейшем продолжены в работах [17], [18]. В [17] было доказано, что для всякого $n > 3$ существует такая неразрешимая группа, у которой каждая максимальная $2d$-цепь длины n обладает собственной модулярной подгруппой, а также получена классификация неразрешимых групп, у которых максимальные $2d$-цепи длины 4 содержат собственную модулярную подгруппу. В [18] были описаны группы, у которых максимальные pd-цепи длины n содержат хотя бы одну собственную модулярную подгруппу. Отметим, что в работе Ведерникова и Дуки [19] была найдена точная оценка p-длины групп, каждая максимальная pd-цепь длины n которых содержит собственную модулярную подгруппу.

Обобщением понятия модулярной подгруппы яляется понятие субмодулярной подгруппы, введенное в работе Зиммерманн [20]. Подгруппа H из G называется *субмодулярной* в G, если существует такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \le H_1 \le \cdots \le H_t = G,$$

что H_{i-1} модулярна в H_i для всякого $i = 1, \ldots, t$. Развивая отмеченные выше результаты Дескинса [6] и Асаада [9] (см. раздел 1), Зиммерманн [21] установила разрешимость группы G в случае, когда каждая максимальная цепь длины 3 из G содержит собственную субмодулярную в G подгруппу, а также в случае, когда каждая максимальная цепь длины 7 из G содержит собственную субмодулярную в G подгруппу и $(|G|, 3) = 1$.

Задача Шеметкова для максимальных цепей. Группы, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную K-$\mathfrak{U}$-субнормальную подгруппу. В 2005 году на Гомельском алгебраическом семинаре Шеметковым был поставлен вопрос о строении разрешимых групп, в каждой максимальной цепи длины n которых имеется собственная обобщенно субнормальная подгруппа. Кроме того, Шеметковым была поставлена задача получить полное описание таких групп хотя бы в случае, когда $n = 3$. В связи с этим в упомянутой выше работе Андреевой и Скибы [12] было получено описание групп, каждая максимальная цепь длины два или три которых содержит собственную S-квазинормальную (перестановочную со всеми силовскими подгруппами) подгруппу. Заметим при этом, что авторами была установлена эквивалентность условия существования в каждой максимальной цепи длины три группы собственной S-квазинормальной подгруппы и условия существования в каждой максимальной цепи длины три группы собственной субнормальной подгруппы.

Напомним, что подгруппа H из G называется $\mathfrak{U}$*-субнормальной в смысле Кегеля* [22] или K-$\mathfrak{U}$*-субнормальной* [3] в G, если найдется такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \le H_1 \le \cdots \le H_k = G,$$

что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $H_i / (H_{i-1})_{H_i}$ сверхразрешима, $i = 1, \ldots, k$. В случае, когда в качестве обобщения субнормальной подгруппы рассматривается K-$\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа и $n = 2$, решение задачи Шеметкова получено в работе [23], где доказано, что группа, в каждой максимальной цепи длины два которой существует собственная K-$\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа, либо сверхразрешима, либо является минимальной несверхразрешимой группой с абелевым сверхразрешимым корадикалом. Для случая же $n = 3$ вопрос о строении групп, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную K-$\mathfrak{U}$-субнормальную подгруппу, остается открытым до сих пор.

***Задача* 2.2** [24, § 4, задача 5.10]. *Получить описание групп, каждая максимальная цепь длины* 3 *которых содержит собственную K-$\mathfrak{U}$-субнормальную подгруппу.*

Группы, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную ступенчато субнормальную подгруппу. Расмотрим еще одно интересное обобщение понятия субнормальной подгруппы, введенное в работе В. Го и Скибы [25]. Пусть θ – некоторое теоретико-групповое свойство подгрупп. Тогда подгруппа A из G *ступенчато обладает свойством* θ в G, если G имеет такой нормальный ряд

$$1 = G_0 \le G_1 \le \ldots \le G_t = G,$$

что для каждого $i = 1, \ldots, t$ подгруппа $(A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ обладает свойством θ в G/G_{i-1}. В частности, подгруппа A называется *ступенчато субнормальной* в G, если G имеет такой нормальный ряд

$$1 = G_0 \le G_1 \le \ldots \le G_t = G,$$

что для каждого $i = 1, \ldots, t$ подгруппа $(A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ является субнормальной в G/G_{i-1}. В [25] было установлено, что для фиксированного $n \le 3$ каждая максимальная цепь длины n из G содержит собственную ступенчато субнормальную в G подгруппу в том и только в том случае, когда G разрешима. В общем случае в [25] была поставлена следующая

***Задача* 2.3** ([25, вопрос 5.4] или [24, § 4, задача 5.21]). *Пусть* $\theta_0(X) = \{A \le X \mid |X : N_X(A)|$ – *простое число или квадрат простого числа*$\}$ *для* *любой группы X. Предположим, что для некоторого фиксированного $1 < n \leq 3$ каждая максимальная цепь длины n из G содержит собственную в G подгруппу, ступенчато обладающую свойством θ_0 в G. Верно ли, что в этом случае G разрешима?*

Группы, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную σ-субнормальную подгруппу. Одним из новых активно развивающихся направлений современной теории конечных групп является исследование структуры группы с заданными арифметическими свойствами. Начало этому направлению было положено Скибой в работах [26]–[30], где были введены следующие понятия. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Группа *G* называется: (i) σ-*примарной*, если *G* является σ_i-группой для некоторого $i \in I$; (ii) σ-*разрешимой*, если каждый ее главный фактор σ-примарен; (iii) σ-*нильпотентной*, если *G* является прямым произведением некоторых σ-примарных групп. Под σ-*нильпотентной длиной* σ-разрешимой группы *G* понимается длина самого короткого ряда из *G* с σ-нильпотентными факторами. Подгруппа *A* из *G* называется σ-*субнормальной* в *G*, если найдется такая цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_l = G,$$

что либо A_{i-1} нормальна в A_i, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ σ-примарна для всех $i = 1,\ldots,l$. Рассматривая группы *G* с σ-*высотой Спенсера* $h_\sigma(G) = n$ (каждая максимальная цепь длины *n* из *G* содержит собственную σ-субнормальную подгруппу и по крайней мере одна максимальная цепь длины $n-1$ из *G* не содержит собственных σ-субнормальных погрупп), Скиба в [31] установил, что $h_\sigma(G) = 1$ в том и только в том случае, когда *G* является σ-нильпотентной группой; $h_\sigma(G) = 2$ в том и только в том случае, когда $|\sigma(G)| = |\pi(G)|$ и *G* является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, где

$$\sigma(G) = \{\sigma_i \cap \pi(G) \mid i \in I, \sigma_i \cap \pi(G) \neq \varnothing\};$$

и, наконец, для $h_\sigma(G) \leq 3$ была установлена σ-разрешимость *G*. Более того, в [31] получен следующий результат.

***Теорема* 2.4** [31, теорема 7.19]. *Пусть G – σ-разрешимая группа и σ^0 – такое разбиение множества $\mathbb{P}$, что $\sigma^0 \leq \sigma$. Справедливы следующие утверждения*:

(i) σ-нильпотентная длина *G* не превышает $h_\sigma(G)$;

(ii) *если либо $h_\sigma(G) < |\sigma(G)|$, либо G является σ^0-разрешимой и каждая n-максимальная подгруппа из G, где $n < |\sigma^0(G)|$, является σ-субнормальной в G, то G σ-нильпотентна*;

(iii) *если $n = h_\sigma(G) \leq |\sigma(G)|$, то каждая n-максимальная подгруппа из G σ-субнормальна в G.*

Заметим, что полученные Скибой результаты позволяют обобщить отмеченные выше результаты работ Манна [5, теорема 8] и Спенсера [7, теоремы 1–4] (см. также теорему 2.1 в [1] и теорему 1.2 выше).

3 Группы с заданными ограничениями на длины и индексы максимальных цепей

В работе [11] Янко, развивая результаты Хупперта [32] о группах с нормальными *n*-максимальными подгруппами, исследовал группы, все 4-максимальные подгруппы которых нормальны. В частности, им было доказано, что группа $SL(2,5)$ является единственной неразрешимой и непростой группой, в которой все 4-максимальные подгруппы нормальны. В этой же работе Янко установил, что неабелевы простые группы, у которых длины максимальных цепей не превышают 4, изоморфны группе $PSL(2,p)$ для некоторого простого числа *p*. В дальнейшем в работе [33] Янко доказал, что неабелевы простые группы, у которых длины максимальных цепей не превышают 5, также изоморфны группе $PSL(2,q)$ для некоторого простого числа *q*.

Говорят, что группа *G удовлетворяет условию Жордана – Дедекинда относительно цепей*, если для любой ее подгруппы *H* все максимальные цепи, проведенные к *H*, имеют одну и ту же длину. В работе Берковича [34] были изучены группы, удовлетворяющие ослабленным условиям Жордана – Дедекинда относительно цепей. Одним из результатов, полученных в работе [34], является следующая

***Теорема* 3.1** [34, теорема 2]. *Пусть для всякой подгруппы H из G с $\lambda(H) = 2$ все максимальные цепи из G, проведенные к H, имеют одну и ту же длину. Тогда справедливо одно из следующих условий*:

(a) *G сверхразрешима*;

(b) *если G разрешима, но не сверхразрешима, то G является группой типа A*;

(c) *если G неразрешима, то она изоморфна одной из групп $PSL(2,p)$, где p – такое простое число, что $\lambda(p \pm 1) = 3$ и $p^2 \equiv 9 (\mathrm{mod}\ 80)$.*

В работе Полякова [35] была изучена связь между главными рядами и максимальными цепями *p*-разрешимых групп.

***Теорема* 3.2** [35, теорема]. *Пусть p – простое число. p-ранг p-разрешимой группы G совпадает с максимальным p-рангом G.*

В теореме 3.2 под *p-рангом p*-разрешимой группы *G* [32] понимается показатель наибольшей степени числа *p*, встречающейся среди индексов всех главных рядов из G. Под *максимальным p-рангом* p-разрешимой группы G [32] понимается показатель наибольшей степени числа p, встречающейся среди индексов всех максимальных цепей из G.

Группы с заданными системами $\mathbb{P}$*-субнормальных подгрупп.* Среди современных исследований групп с заданными максимальными цепями подгрупп несомненный интерес представляют исследования, связанные с понятием $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы. Напомним, что собственная подгруппа H из G является $\mathbb{P}$*-субнормальной* в G [36], если найдется максимальная цепь

$$H = H_0 \le H_1 \le \cdots \le H_k = G,$$

где индексы $|H_i : H_{i-1}|$ являются простыми числами для всякого $i = 1,\ldots,k$. Изучению влияния $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп на строение группы посвящены работы Васильева, Васильевой и Тютянова [36]–[38], Княгиной и Монахова [39], [40], Семенчука и Скибы [41], Мурашко [42]. В [36]–[38] авторами были описаны некоторые свойства групп, силовские подгруппы которых являются $\mathbb{P}$-субнормальными. В частности, в [37] было доказано, что все такие группы ϕ-дисперсивны и класс групп, все силовские подгруппы которых являются $\mathbb{P}$-субнормальными, является наследственной насыщенной формацией. В работе [38] Васильев, Васильева и Тютянов получили новые характеризации групп, являющихся произведением $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп. Так, было доказано, что группа, которая представима в виде произведения двух разрешимых $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп, является разрешимой. Кроме того, в этой же работе была установлена $\mathbb{P}$-субнормальность всех силовских подгрупп из G в случае, когда G содержит две $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы, индексы которых в G взаимно просты.

Отметим, что в [36] были поставлены задачи об описании групп, все 2-максимальные или все примарные циклические подгруппы которых являются $\mathbb{P}$-субнормальными. Решение таких задач получено Монаховым и Княгиной в [39]. Установлено, что группы, все вторые максимальные подгруппы которых являются $\mathbb{P}$-субнормальными, либо сверхразрешимы, либо являются минимальными несверхразрешимыми группами с абелевым сверхразрешимым корадикалом. В случае же, когда все примарные циклические подгруппы группы являются $\mathbb{P}$-субнормальными, в [39] получен следующий результат.

***Теорема* 3.3** [39, теорема B]. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– класс групп, у которых все примарные циклические подгруппы являются* $\mathbb{P}$*-субнормальными. Справедливы следующие утверждения*:

(i) $\mathfrak{X}$ *является наследственной насыщенной формацией*;

(ii) *в том и только в том случае* $G \in \mathfrak{X}$, *когда* G *дисперсивна по Оре и каждая бипримарная подгруппа из* G *с циклической силовской подгруппой является сверхразрешимой*;

(iii) *каждая минимальная не* $\mathfrak{X}$*-группа является бипримарной минимальной несверхразрешимой группой, у которой все ненормальные силовские подгруппы цикличны.*

В [40] Княгиной и Монаховым получены новые критерии сверхразрешимости групп с заданными системами $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп.

***Теорема* 3.4** [40, теоремы 3.1, 3.2 и 3.3]. *Следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *G сверхразрешима.*

(2) *Нормализаторы всех силовских подгрупп из G являются* $\mathbb{P}$*-субнормальными в G.*

(3) *Все холловы подгруппы из G являются* $\mathbb{P}$*-субнормальными в G.*

(4) *Все примарные подгруппы из G и все бипримарные нециклические подгруппы из G, все силовские подгруппы которых цикличны, являются* $\mathbb{P}$*-субнормальными в G.*

Напомним, что подгруппа H из G называется $\mathfrak{U}$*-субнормальной* в G, если найдется такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \le H_1 \le \cdots \le H_t = G,$$

что $H_{i-1}/(H_{i-1})_{H_i}$ сверхразрешима для всякого $i = 1,\ldots,t$. Заметим, что если G разрешима, то собственная подгруппа H из G является $\mathfrak{U}$-субнормальной в G в том и только в том случае, когда существует такая максимальная цепь

$$H = H_0 < H_1 < \cdots < H_t = G,$$

что $|H_i : H_{i-1}|$ является простым числом для всех $i = 1,\ldots,t$, т. е. H является $\mathbb{P}$-субнормальной в G, и H является $\mathfrak{U}$-абнормальной в G в том и только в том случае, когда $|L : K|$ не является простым числом для всех подгрупп K и L из G, для которых $H \le K \le L \le G$.

В работе [41] Семенчуком и Скибой был получен следующий результат.

***Теорема* 3.5** [41, теорема A]. *Если каждая неединичная подгруппа из G является либо* $\mathfrak{U}$*-субнормальной, либо* $\mathfrak{U}$*-абнормальной в G, то* $G = DH$, *где* $D = G^{\mathfrak{U}}$ *– сверхразрешимый корадикал группы G, и выполнены следующие условия*:

(i) *H является холловой гашюцевой подгруппой в G. Следовательно, если H нильпотентна, то H является картеровой подгруппой в G*;

(ii) *каждый главный фактор из G ниже D является нециклическим. Следовательно, H – сверхразрешимый нормализатор G в смысле* [43];

(iii) $|G : DG'|$ *является степенью простого числа*;

(iv) *если H – нециклическая группа порядка* p^n, *где p – простое число и* $n > 1$, *то группа D нильпотентна*;

(v) $H\Phi(G)/\Phi(G)$ *является либо группой Миллера – Морено, либо примарной абелевой группой*;

(vi) *каждая собственная подгруппа из G, содержащая D, сверхразрешима.*

Обратно, если G удовлетворяет условиям (i)–(vi), *то каждая неединичная подгруппа из G является либо* $\mathfrak{U}$*-субнормальной, либо* $\mathfrak{U}$*-абнормальной в G.*

Заметим, что в случае, когда каждая неединичная подгруппа из *G* является либо $\mathbb{P}$-субнормальной, либо $\mathbb{P}$-абнормальной в *G*, в [41] доказана разрешимость *G*. Поэтому описание групп, в которых каждая подгруппа либо $\mathbb{P}$-субнормальна, либо $\mathbb{P}$-абнормальна, является следствием теоремы 3.5.

4 Группы, *n*-максимальные подгруппы которых обладают некоторым наследственным теоретико-групповым свойством

Группы с абелевыми n-максимальными подгруппами. Одной из наиболее ранних работ, связанных с изучением максимальных цепей и, в частности, *n*-максимальных подгрупп $(n>1)$, является работа Редеи [44], посвященная описанию неразрешимых группы с абелевыми вторыми максимальными подгруппами. В дальнейшем Берковичем [45] было получено описание неразрешимых групп с абелевыми третьими максимальными подгруппами.

***Теорема* 4.1** [45, следствие]. *Пусть p – простое число. В том и только в том случае все 3-максимальные подгруппы неразрешимой группы G являются абелевыми, когда G изоморфна одной из следующих групп*:

(1) $SL(2,2^p)$, *где* $\lambda(2^p\pm 1)<3$, *кроме случаев, когда* $\lambda(p^n-1)=3$ *или* $p^{2n}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,5)$ *для* $p>2$.

(2) $PSL(2,3^p)$, $SL(2,3^p)$, *где* $\lambda(3^p\pm 1)<4$, $p\neq 1$.

(3) $PSL(2,p)$, *где* $\lambda(p\pm 1)<4$.

(4) $SL(2,p)$, *где* $\lambda(p\pm 1)<4$, $p\neq 7$.

(5) $PGL(2,5)$.

(6) $L\times D$, *где* $L\simeq PSL(2,5)$, $|D|=p$.

Исследованию групп, все *n*-максимальные подгруппы которых являются абелевыми, посвящены также работы Шериева [46], [47] и Драганюка [48]–[50]. Так, в работах [46], [47] с точностью до образующих элементов и определяющих соотношений был изучен класс *p*-групп с абелевыми 2-максимальными подгруппами. В [48] изучено строение примарных групп с абелевыми вторыми максимальными подгруппами. В [49] получено описание *p*-групп с неабелевой подгруппой Фраттини, у которых все 3-максимальные подгруппы являются абелевыми. В дальнейшем Драганюком [50] было получено описание регулярных 2-порожденных подгрупп с абелевыми 3-максимальными подгруппами.

Поскольку каждая подгруппа абелевой группы также является абелевой группой, естественно рассмотреть вопрос о том, какими свойствами обладает группа, каждая *n*-максимальная подгруппа которой обладает некоторым наследственным теоретико-групповым свойством θ.

Группы с нильпотентными n-максимальными подгруппами. Среди исследований групп с нильпотентными *n*-максимальными подгруппами следует, прежде всего, отметить работы Судзуки [51], Янко [52] и Берковича [53]. В работе Судзуки были изучены неабелевы простые группы, все собственные подгруппы максимальных подгрупп (в частности, все 2-максимальные подгруппы) которых нильпотентны. Было установлено, что все такие группы изоморфны группе $PSL(2,5)$. Янко и Беркович в свою очередь получили описание неразрешимых групп с нильпотентными вторыми максимальными подгруппами и доказали, что все такие группы изоморфны либо группе $PSL(2,5)$, либо группе $SL(2,5)$. В разрешимом случае описание групп с нильпотентными вторыми максимальными подгруппами было получено Белоноговым [54].

***Теорема* 4.2** [54, теорема]. *Пусть p, q, r – простые числа. В том и только в том случае все 2-максимальные подгруппы разрешимой группы G являются нильпотентными, когда G – группа одного из следующих типов*:

(1) $G=Q\rtimes P$, $|P|=p^{\alpha}$, $|Q|=q^{\beta}$, $|Q:Q'|=q^{\delta}$, $|Q'|<q^{\delta}$, *всякий элемент из P, порядок которого меньше* $p^{\alpha-1}$, *принадлежит* $C_G(Q)$.

(2) $G=Q\rtimes P$, *P – циклическая группа порядка* p^{α}, $|Q|=q^{\beta}$, $C_G(P)=PZ(G)=P\Phi^2(G)$, $|G:Z(G)|=pq^{2\delta}$.

(3) $G=Q\rtimes P$, $P=\langle a\rangle$ *– циклическая группа порядка* p^{α}, $|Q|=q^{\beta}$, $\Phi(G)=\langle a^p\rangle\times G''$, $|G''|<q^{\delta}$, $G/\Phi(G)$ *является прямым произведением группы типа A и группы порядка q.*

(4) $G=\langle b\rangle(Q\rtimes P)$, $|\langle b\rangle|=1+\varepsilon$, $|P|=p$, $|Q|=q^{\delta+\varepsilon}$, $N_G(P)=\langle b\rangle\rtimes P$, $|Q:Q'|=q^{\delta}$, $0\le\varepsilon\le 1$.

(5) $G=(Q\times R)\rtimes P$, $P=\langle a\rangle$ *– циклическая группа порядка* p^{α}, $|Q|=q^{\delta}$, $|R|=r^{\sigma}$, $a^p\in Z(G)$, $C_G(a)=P$, σ *является показателем числа r по модулю p.*

(6) $G=R\rtimes(P\times Q)$, $|P|=p$, $|Q|=q$, $|R|=r^{\gamma}$, *PR и QR – группы Шмидта.*

(7) $G=H\times R$, $|H|=p^{\alpha}q^{\beta}$, $|R|=r$, *H – группа Шмидта.*

В дальнейшем Манном [55] были изучены простые группы с 3-нильпотентными вторыми максимальными подгруппами. Было установлено, что такие группы G с $(3,|G|)\neq 1$ изоморфны $PSL(2,q)$ для некоторого простого числа q. В свою очередь, Гаген и Янко в работе [56] получили описание простых групп, все 3-максимальные подгруппы которых являются нильпотентными. Оказалось, что все такие группы изоморфны либо $PSL(2,q)$, где $q>3$, либо $Sz(2^3)$.

Заметим, что в случае, когда все n-максимальные подгруппы из G являются группами Шмидта, каждая $(n+1)$-максимальная подгруппа из G нильпотентна. В этой связи, отметим работу Берковича [57], в которой, в частности, были исследованы группы, все n-максимальные подгруппы которых являются группами Шмидта. Было установлено, что для таких групп $n=1$ и группа изоморфна либо $PSL(2,5)$, либо $SL(2,5)$. Отметим, что работе [57] предшествовала публикация Берковича [58], в которой был рассмотрен вопрос о строении групп, каждая n-максимальная подгруппа которых является обобщенной группой Шмидта.

Группы со сверхразрешимыми или дисперсивными n-максимальными подгруппами. В [4, глава VI, проблема 26] Шеметковым была поставлена задача описания разрешимых групп, у которых все вторые максимальные подгруппы сверхразрешимы. Частично такая задача была решена Семенчуком в работе [59]. Семенчук показал, что несверхразрешимая группа G, у которой все 2-максимальные подгруппы сверхразрешимы и $G/\Phi(G)$ непроста, является разрешимой и $|\pi(G)|\leq 4$. Таким образом, для решения задачи Шеметкова в случае, когда $G/\Phi(G)$ – непростая группа, нужно было рассмотреть лишь несверхразрешимые группы, число простых делителей порядка которых не превышает 4. В частности, если $|\pi(G)|=4$, справедлив следующий результат.

***Теорема* 4.3** [59, теорема 1]. *Пусть* $|\pi(G)|=4$, $p_1>p_2>p_3>p_4$ *– различные простые делители* $|G|$, G_{p_1}, G_{p_2}, G_{p_3}, G_{p_4} *– соответствующие им силовские подгруппы из* G *и* $G/\Phi(G)$ *не является простой группой. Если все вторые максимальные подгруппы из G сверхразрешимы, то справедливы следующие утверждения*:

(i) *G дисперсивна по Оре*;

(ii) G_{p_3}, G_{p_4} *– циклические группы*;

(iii) *если* $G_{p_2}G_{p_3}G_{p_4}$ *сверхразрешима, то* G_{p_2} *является циклической*;

(iv) $G_{p_1}/\Phi(G_{p_1})$,

$$G_{p_1}G_{p_2}...G_{p_{i-1}}G_{p_i}/G_{p_1}...G_{p_{i-1}}\Phi(G_{p_i})$$

– главные факторы в G, *где* $i=2,3,4$;

(v) *G имеет точно четыре класса максимальных сопряженных подгрупп.*

В дальнейшем полученное Семенчуком описание было уточнено в работе Левищенко и Кузенного [60], в которой было найдено 34 типа групп со сверхразрешимыми вторыми максимальными подгруппами. Результаты работ [59], [60] нашли развитие в работе Ш. Ли [61], где были описаны неразрешимые группы со сверхразрешимыми 2-максимальными $3d$-подгруппами.

Заметим, что в случае, когда все 3-максимальные подгруппы из G K-$\mathfrak{U}$-субнормальны в G, все 2-максимальные подгруппы из G сверхразрешимы. Поэтому полученное Ковалевой и С. Йи [62], [63] описание групп с K-$\mathfrak{U}$-субнормальными третьими максимальными подгруппами также является развитием результатов работы Семенчука [59].

Хорошо известно, что сверхразрешимые группы являются дисперсивными по Оре. Этот факт нашел применение в отмеченной выше работе Левищенко и Кузенного [60], в которой авторами для классификации групп, все 2-максимальные подгруппы которых сверхразрешимы, было использовано полученное ими ранее строение групп с дисперсивными по Оре 2-максимальными подгруппами [64]. Отметим, что группы с дисперсивными 2-максимальными подгруппами были также рассмотрены в одной из работ Берковича [65].

Некоторые другие результаты о группах с заданными наследственными теоретико-групповыми свойствами для n-максимальных подгрупп. Рассмотрим еще несколько работ, в которых авторами изучались группы с заданными наследственными теоретико-групповыми свойствами для n-максимальных подгрупп. Так, в двух работах Берковича [57], [66] были описаны неразрешимые группы с циклическими 3-максимальными или 4-максимальными подгруппами.

***Теорема* 4.4** [66, следствие 3]. *Пусть G – неразрешимая группа с циклическими третьими максимальными подгруппами. Тогда* $\lambda(G)\leq 6$ *и выполнены следующие условия*:

(1) *если* $\lambda(G)=4$, *то* $G\simeq PSL(2,5)$;

(2) *если* $\lambda(G)=5$, *то G изоморфна одной из групп* $SL(2,5)$, $PSL(2,11)$, $PSL(2,13)$;

(3) *если* $\lambda(G)=6$, *то* $G\simeq PSL(2,p)$, *причем* $\lambda(p-1)=\lambda(p+1)=3$, *где p – простое число и* $p\not\equiv\pm1 \pmod 5$.

Исследованию групп с метациклическими вторыми максимальными подгруппами посвящены работы [67]–[69]. В [67] Левищенко и Семко получили 11 классов несверхразрешимых групп, все 2-максимальные подгруппы которых являются метациклическими. Развивая результаты работы Левищенко и Семко, авторы работы [68] получили 17 типов 2-групп, все вторые максимальные подгруппы которых являются метациклическими и которые содержат хотя бы одну неметациклическую максимальную подгруппу. В дальнейшем в работе [69] с точностью до изоморфизма были определены все такие p-группы (для нечетных простых чисел p), содержащие неметациклическую максимальную подгруппу, все 2-максимальные подгруппы которых являются метациклическими.

Напомним, что группа G называется (A)-*группой*, если каждая подгруппа простого порядка из G является пронормальной (подгруппа H из G называется *пронормальной* в G, если H сопряжена с H^x в $\langle H, H^x \rangle$ для всякого $x \in G$) и либо все силовские 2-подгруппы из G являются абелевыми, либо каждая циклическая подгруппа порядка 4 из G пронормальна в G. Асаадом в работе [70] была получена классификация простых групп, все вторые максимальные подгруппы которых являются (A) -группами.

Отметим также работы, в которых авторы исследовали не π-разложимые группы, все 2-максимальные подгруппы которых являются π-разложимыми. Группа называется π-*разложимой*, если ее можно представить в виде прямого произведения π-группы и π'-группы. Так, в работе Берковича [53] было доказано, что не 2-разложимая неразрешимая группа G, все вторые максимальные подгруппы которой 2-разложимы, изоморфна либо $PSL(2,5)$, либо $SL(2,5)$. В дальнейшем Берковичем [71] были описаны неразрешимые группы G, у которых каждая 2-максимальная подгруппа любой разрешимой подгруппы из G является 2-разложимой. В недавней же работе Белоногова [72] рассмотрена общая ситуация и получено описание не π-разложимых групп, все 2-максимальные подгруппы которых π-разложимы.

5 Замечание о группах с заданными системами максимальных пар

Несомненный интерес среди исследований групп с заданными обобщенно максимальными подгруппами представляют исследования групп с заданными системами максимальных пар. Пусть $K \le H$ – подгруппы из G. Напомним, что пара (K, H) называется *максимальной парой в* G, если K является максимальной подгруппой в H. Очевидно, что если (K, H) – максимальная пара из G, то для некоторого n в G существует максимальная цепь длины n

$$K = H_n < H_{n-1} = H < \cdots < H_1 < H_0 = G.$$

Одной из наиболее значимых публикаций, посвященных изучению групп с заданными максимальными парами, является работа В. Го и Скибы [73]. Исследуя группы, некоторые подгруппы которых покрывают или изолируют заданные системы максимальных пар (подгруппа A из G *покрывает пару* (K, H), если $AH = AK$; подгруппа A *изолирует пару* (K, H), если $A \cap H = A \cap K$), в [73] авторы получили характеризации таких важных классов конечных групп, как классы p-разрешимых, разрешимых, p-нильпотентных, метанильпотентных, p-сверхразрешимых и сверхразрешимых групп.

Отметим, что исследования, начатые в [73], продолжены в работах многих авторов (см., например [74]–[77]), которыми были рассмотрены группы, выделенные системы подгрупп которых обладают свойством обобщенного покрытия-изолирования по отношению к заданным системам максимальных пар.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковалева*, *В.А*. Конечные группы с заданными обобщенно максимальными подгруппами (обзор). I. Конечные группы с обобщенно нормальными n-максимальными подгруппами / В.А. Ковалева // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 4 (29). – С. 48–58.
2. *Doerk*, *K*. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.
3. *Ballester*-*Bolinches*, *A*. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer-Verlag, 2006.
4. *Шеметков*, *Л.А*. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.
5. *Mann*, *A*. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 132. – P. 395–409.
6. *Deskins*, *W.E*. A condition for the solvability of a finite group / W.E. Deskins // Illinois J. Math. – 1961. – Vol. 2. – P. 306–313.
7. *Spencer*, *A.E*. Maximal nonnormal chains in finite groups / A.E. Spencer // Pacific J. Math. – 1968. – Vol. 27, № 1. – P. 167–173.
8. *Spencer*, *A.E*. Finite groups with short nonnormal chains / A.E. Spencer // J. Austral. Math. Soc. – 1972. – Vol. 18, № 1. – P. 111–118.
9. *Asaad*, *M*. Generalization of a theorem of Deskins / M. Asaad // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eotvos Sect. Math. – 1975. – Vol. 18. – P. 177–179.
10. *Guo*, *W*. Finite groups of Spencer height ≤ 3 / W. Guo, D.P. Andreeva, A.N. Skiba // Algebra Colloquium. – 2015. – Vol. 22. – P. 437–444.
11. *Janko*, *Z*. Finite groups with invariant fourth maximal subgroups / Z. Janko // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 82–89.
12. *Андреева*, *Д.П*. Конечные группы с заданными максимальными цепями длины ≤ 3 / Д.П. Андреева, А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 3 (8). – С. 39–49.
13. *Kegel*, *O.H*. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.
14. *Новицкий*, *А.И*. Конечные группы с максимальными цепями подгрупп / А.И. Новицкий // Докл. АН БССР. – 1974. – Т. 18, № 5. – С. 389–390.

15. *Дука*, *Н.Г.* Конечные группы, максимальные цепи подгрупп которых содержат p-субнормальные подгруппы / Н.Г. Дука // Изв. высших уч. заведений. Матем. – 1979. – № 9. – С. 3–10.

16. *Решко*, *К.А.* О p-длине произвольной конечной группы / К.А. Решко, В.И. Харламова // Матем. заметки. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 419–427.

17. *Решко*, *К.А.* О насыщенности максимальных цепей модулярными подгруппами / К.А. Решко, В.И. Харламова // Докл. АН БССР. – 1973. – Т. 17, № 9. – С. 788–789.

18. *Харламова*, *В.И.* Характеризация конечных групп с определенными максимальными цепями / В.И. Харламова, К.А. Решко // Подгрупповое строение конечных групп: тр. Гомельск. семинара. – Минск, 1981. – С. 185–195.

19. *Ведерников*, *В.А.* О конечных группах с обобщенной подгруппой Фраттини / В.А. Ведерников, Н.Г. Дука // IX Всесоюзный алгебраический коллоквиум: резюме научных сообщений. – Гомель: Изд-во Гомельского гос. пед. ун-та, 1968. – С. 44.

20. *Zimmermann*, *I.* Submodular Subgroups in Finite Groups // Math. Z. – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.

21. *Zimmermann*, *I.* On a Theorem of Deskins / I. Zimmermann // Proc. American Math. Soc. – 1989. – Vol. 107, № 4. – P. 895–899.

22. *Kegel*, *O.H.* Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die den subnormalteilerverband each enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 3. – P. 225–228.

23. *Ковалева*, *В.А.* Конечные разрешимые группы, у которых все n-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны / В.А. Ковалева, А.Н. Скиба // Сибир. матем. ж. – 2013. – Т. 54, № 1. – P. 86–97.

24. *Guo*, *W.* Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups / W. Guo. – Heidelberg–NewYork–Dordrecht–London: Springer, 2015.

25. *Го*, *В.* О ступенчатых свойствах подгрупп конечных групп / В. Го, А.Н. Скиба // Сибир. матем. ж. – 2015. – Т. 56, № 3. – С. 487–497.

26. *Skiba*, *A.N.* A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and its Appl. – 2015. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.

27. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

28. *Скиба*, *А.Н.* On σ-properties of finite groups I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.

29. *Скиба*, *А.Н.* On σ-properties of finite groups II / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 70–83.

30. *Скиба*, *А.Н.* On σ-properties of finite groups III / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 52–62.

31. *Skiba*, *A.N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Comm. in Math. and Stat. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309.

32. *Huppert*, *B.* Normalteiler und maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

33. *Janko*, *Z.* Finite simple groups with short chains of subgroups / Z. Janko // Math. Z. – 1964. – Vol. 84. – P. 428–437.

34. *Беркович*, *Я.Г.* Конечные группы, удовлетворяющие ослабленным условиям Жордана-Дедекинда относительно цепей / Я.Г. Беркович // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1966. – С. 14–23.

35. *Поляков*, *Л.Я.* О связи между главными и максимальными рядами в конечных p-разрешимых группах / Л.Я. Поляков // Сибир. матем. ж. – 1967. – Т. VII, № 2. – С. 467–470.

36. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 21–27.

37. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сибир. матем. ж. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

38. *Васильев*, *А.Ф.* О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сибир. матем. ж. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.

39. *Monakhov*, *V.S.* Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche di Mat. – 2013. – Vol. 62, № 2. – P. 307–322.

40. *Kniahina*, *V.N.* On supersolvability of Finite Groups with $\mathbb{P}$-subnormal Subgroups / V.N. Kniahina, V.S. Monakhov // Int. J. Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.

41. *Semenchuk*, *V.N.* On one generalization of finite $\mathfrak{U}$-critical groups / V.N. Semenchuk, A.N. Skiba // J. Algebra and its Appl. – 2016. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.

42. *Мурашко*, *В.И.* Свойства класса конечных групп с $\mathbb{P}$-субнормальными циклическими примарными подгруппами / В.И. Мурашко // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 1. – С. 5–8.

43. *Carter*, *R.* The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – Vol. 5, № 2. – P. 175–202.

44. *Rédei*, *L.* Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen / L. Rédei // Acta Math. – 1951. – Vol. 84. – P. 129–153.

45. *Беркович*, *Я.Г.* Конечные неразрешимые группы с абелевыми третьими максимальными подгруппами / Я.Г. Беркович // Изв. высш. уч. заведений. Матем. – 1968. – Т. 7, № 74. – С. 10–15.

46. *Шериев*, *В.А.* Описание класса конечных p-групп, все дважды максимальные подгруппы которых абелевы. I / В.А. Шериев // Алгебра. Примарные группы. – Красноярск, 1970. – С. 25–53.

47. *Шериев*, *В.А*. Описание класса конечных *p*-групп, все дважды максимальные подгруппы которых абелевы. II / В.А. Шериев // Алгебра. Примарные группы. – Красноярск, 1970. – С. 54–76.

48. *Драганюк*, *С.В*. Конечные *p*-группы с неабелевой подгруппой Фраттини, все 3-максимальные подгруппы которых абелевы ($p > 3$) / С.В. Драганюк. – Киев: Изд-во Киев. гос. пед. ун-та, 1989.

49. *Драганюк*, *С.В*. К вопросу о строении конечных примарных групп, все 2-максимальные подгруппы которых абелевы / С.В. Драганюк // Комплексный анализ, алгебра и топология. – Киев: Изд-во АН УССР. Ин-т мат, 1990. – С. 42–51.

50. *Драганюк*, *С.В*. Конструктивное описание конечных регулярных 2-порожденных групп, все 3-максимальные подгруппы которых абелевы / С.В. Драганюк. – Киев: Изд-во Киев. гос. пед. ун-та, 1991.

51. *Suzuki*, *M*. The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8, № 4. – P. 686–695.

52. *Janko*, *Z*. Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko // Math. Z. – 1962. – Vol. 79. – P. 422–424.

53. *Беркович*, *Я.Г*. О существовании подгрупп у конечной неразрешимой группы / Я.Г. Беркович // Изв. АН СССР. – 1964. – Т. 156, № 6. – С. 1255–1257.

54. *Белоногов*, *В.А*. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В.А. Белоногов // Матем. заметки. – 1968. – Т. 3, № 1. – С. 21–32.

55. *Mann*, *A*. Simple groups having *p*-nilpotent 2*nd*-maximal subgroups / A. Mann // Israel J. Math. – 1968. – Vol. 6, № 3. – P. 233–245.

56. *Gagen*, *T.M*. Finite simple groups with nilpotent third maximal subgroups / T.M. Gagen, Z. Janko // J. Austral. Math. Soc. – 1966. – Vol. 6, № 4. – P. 466–469.

57. *Беркович*, *Я.Г*. Подгрупповая характеризация некоторых конечных групп / Я.Г. Беркович // Докл. АН БССР. – 1996. – Т. 169, № 3. – С. 499–502.

58. *Беркович*, *Я.Г*. Конечные группы, у которых все *n*-е максимальные подгруппы являются обобщенными группами Шмидта / Я.Г. Беркович // Матем. заметки. – 1969. – Т. 5, № 1. – С. 129–136.

59. *Семенчук*, *В.Н*. Разрешимые группы со вторыми максимальными сверхразрешимыми подгруппами / В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – 1985. – Вып. 1. – С. 86–96.

60. *Левищенко*, *С.С*. Конечные группы со сверхразрешимыми 2-максимальными подгруппами / С.С. Левищенко, Н.Ф. Кузенный // Строение групп и свойства их подгрупп. – Киев: Изд-во Киев. гос. пед. ун-та, 1986. – С. 63–73.

61. *Li*, *Sh*. Finite non-solvable groups with supersoluble second maximal 3*d*-subgroups / Sh. Li // Chinese Ann. Math. – 1988. – Vol. 9, № 1. – P. 32–37.

62. *Kovaleva*, *V.A*. Finite biprimary groups with all 3-maximal subgroups $\mathfrak{U}$-subnormal / V.A. Kovaleva, X. Yi // Acta Math. Hung. – 2015. – Vol. 146, №1. – P. 47–55.

63. *Ковалева*, *В.А*. Конечные группы с заданными системами K-$\mathfrak{U}$-субнормальных подгрупп // Укр. матем. ж. – 2016. – Т. 68, № 1. – С. 52–63.

64. *Левищенко*, *С.С*. Конечные группы с условием дисперсивности по Оре для 2-максимальных подгрупп / С.С. Левищенко, Н.Ф. Кузенный. – Киев: изд-во Киев. гос. пед. ин-та, 1986.

65. *Беркович*, *Я.Г*. Конечные группы с дисперсивными вторыми максимальными подгруппами / Я.Г. Беркович // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 158. – С. 1007–1009.

66. *Беркович*, *Я.Г*. О существовании подгрупп у конечной неразрешимой группы II / Я.Г. Беркович // Изв. АН СССР. – 1965. – Т. 29. – С. 527–552.

67. *Левищенко*, *С.С*. Конструктивное описание конечных несверхразрешимых групп, у которых все 2-максимальные подгруппы метациклические / С.С. Левищенко, Н.Н. Семко // Исследование групп с ограничениями для подгрупп. – Киев: Изд-во Киев. гос. пед. ун-та, 1988. – С. 42–51.

68. *Cepulic*, *V*. Second-metacyclic finite 2-groups / V. Cepulic, M. Ivankovic, E. Kovac-Striko // Glasnik Matemat. – 2005. – Vol. 40, № 1. – P. 59–69.

69. *Cepulic*, *V*. Second-metacyclic finite *p*-groups for odd primes / V. Cepulic, O. Pyliavska, E. Kovac-Striko // Glasnik Matemat. – 2006. – Vol. 41, № 61. – P. 275–282.

70. *Asaad*, *M*. Simple groups all of whose second maximal subgroups are (*A*)-groups / M. Asaad // Arch. Math. – 1988. – Vol. 50, № 1. – P. 5–10.

71. *Беркович*, *Я.Г*. Строение группы и строение ее подгрупп / Я.Г. Беркович // Докл. АН СССР. – 1968. – Т. 179, № 1. – С. 13–16.

72. *Белоногов*, *В.А*. Конечные группы, все 2-максимальные подгруппы которых π-разложимы / В.А. Белоногов // Тр. ИММ УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 2. – С. 29–43.

73. *Guo*, *W*. Finite groups with systems of Σ-embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // Science in China, Serias A: Math. – 2011. – Vol. 54, № 9. – P. 1909–1926.

74. *Го*, *В*. О Σ-вложенных и m-добавляемых подгруппах конечных групп / В. Го, В.А. Ковалева, А.Н. Скиба // Докл. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 4. – С. 27–30.

75. *Ковалева*, *В.А*. Критерии *p*-разрешимости и *p*-сверхразхрешимости конечных групп / В.А. Ковалева, Юй-Фэн Лю, В. Го, А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94, № 3. – С. 455–472.

76. *Chen*, *X*. On generalized image-hypercentral subgroups of a finite group / X. Chen, W. Guo, A.N. Skiba // J. of Algebra. – 2015. – Vol. 442. – P. 190–201.

77. *Li*, *B*. On $P_{\mathfrak{F}}$-supplemented subgroups of finite groups / B. Li, Y. Mao, A.N. Skiba // Comm. in Algebra. – 2017. – Vol. 45, № 4. – P. 1657–1667.

Поступила в редакцию 31.05.16.