УДК 535.2.01

ВРЕМЕННАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ МОД

А. С. Мазманишвили

Рассмотрена задача о когерентности излучения, состоящего из системы связанных мод, временная эволюция которого может быть описана при помощи стохастического гамильтониана. В P-представлении Глаубера построено уравнение эволюции для оператора плотности, усредненного по стохастическим флуктуациям источника. Получено решение уравнения движения, вычислена производящая функция моментов поля излучения, обсуждена зависимость от числа мод.

1. Статистические свойства поля, образованного набором независимых мод, рассмотрены, например, в [1], где показано, что увеличение числа мод излучения приводит к гауссовой статистике фотонов поля. Целью настоящей работы является исследование статистических свойств поля, образованного набором связанных (полностью или частично) мод излучения. Примером подобной физической ситуации может служить излучение релятивистского тока в циклической магнитной системе — поле синхротронного излучения, состоящее, как известно [2], из набора гармоник. Если ток $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ можно описать определенной функцией координат и времени, то поле находится в когерентном состоянии [3] с пуассоновой статистикой фотонов. Оператор плотности $\rho(t)$ поля, создаваемого током со стохастической компонентой, имеет вид [3]

$$\rho(t) = \int P(\{\beta_k\}, t) \,|\{\beta_k\}\rangle\langle\{\beta_k\}|\, \prod_k d^2\beta_k, \tag{1}$$

где $P(\{\beta_k\}, t)$ — P-функция оператора плотности (квазивероятность), $\{\beta_k\}$ — набор комплексных амплитуд, k — индекс моды.

2. Рассмотрим влияние быстрых флуктуаций тока на статистику фотонов излучения. Относительно быстрых флуктуаций тока $\mathbf{j}_s$ будем предполагать, что $\mathbf{j}_s(t)$ — стационарный нормальный шум с нулевым средним значением и дельтообразной функцией корреляции. Введем матричный элемент

$$r(k_1, k_2, t)\,\delta(t - t') = \langle f_{sk1}(t)\, f_{sk2}(t')\rangle, \tag{2}$$

где $f_{sk}(t)$ — пространственная Фурье-трансформанта $\mathbf{j}_s(\mathbf{r}, t)$. Поскольку комплексная амплитуда $\beta_k(t)$ связана линейным оператором с током $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, удобно составить уравнение временной эволюции отдельно для некогерентной (шумовой) части функции квазивероятности P_s оператора плотности поля, состоящего из мод.

Пользуясь стандартной марковской методикой в однофотонном приближении, получим

$$\dot{P}_s = \sum_{k_1 k_2} r(k_1, k_2) \frac{\partial^2}{\partial\beta_{k_1}\partial\beta^*_{k_2}} P_s, \tag{3}$$

где суммирование распространяется по всем индексам мод. Введем вектор $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{k1}, \ldots, \beta_{kM})$, состоящий из M комплексных компонент (фазор), и эрмитовскую матрицу r, где элемент $r_{mn} = r(k_m, k_n, t)$. Тогда после интегрирования получим

$$R_s(\beta, t \mid 0) = \frac{1}{\pi^M \det R} \exp\left[-\beta R^{-1} \beta^+\right], \tag{4}$$

где $R_{mn}(t) = \int\limits_0^t r_{mn}(t')\, dt'$, а β^+ — эрмитовски сопряженный вектор β'.

Для когерентной части поля имеем

$$\dot{P}_c = -i \operatorname{Sp}[H_c \rho_c], \tag{5}$$

где H_c — гамильтониан, зависящий от регулярной части тока $\mathbf{j}_c(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)\rangle$. После свертки функционала $P_s(\beta, t)$ (4) и решения уравнения (5) получим

$$P(\beta, t) = \frac{1}{\pi^M \det R} \exp\left[-(\beta - \alpha_c) R^{-1} (\beta^+ - \alpha_c^+)\right], \tag{6}$$

где $\alpha_c = \langle \beta \rangle$; $(\alpha_c)_m$ — амплитуда m-й моды в отсутствие стохастических флуктуаций тока.

3. Кроме быстрых флуктуаций, ток $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ может испытывать медленные, нерегулярные флуктуации с частотой $\Omega\ (\Omega \ll \omega)$. Эти флуктуации, не меняя степень когерентности для данного момента времени, влияют на двухвременные корреляционные зависимости. В частности, если время наблюдения T больше времени развития «медленных» флуктуаций, то статистика регистрируемых фотонов изменится, отражая процесс токовых флуктуаций, тем более что для m-й моды излучения флуктуации фазы $\arg \beta_m$ возрастают в m раз. Поэтому когерентная часть оператора плотности будет испытывать релаксацию и тем же методом в однофотонном приближении можно получить

$$\dot{P}_c(\alpha_c, t \mid 0) = 2 \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial \alpha_c} (\mathrm{h} P_c) + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_c \partial \alpha_c^+} (g P_c). \tag{7}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} h_m(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \{\beta_{cm}(t)\, q_m(t)\}, \\ g_{mn}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \{\beta_{cm}(t)\, \beta_{cn}^*(t)\, [q_{mn}(t) - q_m(t)\, q_n(t)]\} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $\beta_{cm}(t)$ — амплитуда m-й моды в отсутствие флуктуаций, $q_m(t) = W_m + (1 - W_m) \exp(-m\Omega t)$ — фактор релаксации моды; W_m — m-я Фурье-трансформанта функции распределения медленных флуктуаций тока; $q_{mn}(t) = W_{mn} + (1 - W_{mn}) \exp(-|m - n|\, \Omega t)$ — межмодовый фактор релаксации, W_{mn} — $(m - n)$-я Фурье-трансформанта. Интегрируя (7), получим

$$P_c(\alpha_c t \mid 0) = \frac{1}{\pi^M \det G} \exp\left[-(\alpha_c - \mathbf{H})\, G^{-1} (\alpha_c^+ - \mathbf{H}^+)\right], \tag{9}$$

где

$$H_m(t) = \beta_{cm}(t)\, q_m(t); \quad G_{mn}(t) = \beta_{cm}(t)\, \beta_{cn}^*(t)\, [q_{mn}(t) - q_m(t)\, q_n(t)].$$

Медленные флуктуации не влияют на число фотонов в модах

$$\langle n(t)\rangle = \langle \alpha_c \alpha_c^+ \rangle = \sum |\beta_{cm}(t)|^2, \tag{10}$$

а проявляются в высших моментах поля. Следуя Лэксу [3], введем производящую функцию

$$Q(\lambda) = \langle \exp(\lambda \beta C \beta^+)\rangle,$$

где C — эрмитовская матрица, явный вид которой конкретизируем ниже. Усредняя P-функцию (6) по распределению (9) и интегрируя, получим

$$\left.\begin{aligned} P_{\text{ср.}}(\beta, t) &= \frac{1}{\pi^M \det(R + G)} \exp\left[-(\beta - \mathbf{H})(R + G)^{-1} (\beta^+ - \mathbf{H}^+)\right], \\ \ln Q(\lambda) &= -\operatorname{Sp} \ln\left[I - \lambda C (R + G)\right] + \lambda \mathbf{H} \left[I - \lambda C (R + G)^{-1} C \mathbf{H}^+,\right. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где I — единичная матрица. Поэтому относительная дисперсия двух первых четных моментов поля равна

$$\gamma = \frac{\langle(\beta C\beta^+)^2\rangle - \langle\beta C\beta^+\rangle^2}{\langle\beta C\beta^+\rangle^2} = \frac{\mathrm{Sp}\,[C\,(R+G)]^2 + 2\mathbf{H}C\,(R+G)\,\mathbf{H}^+}{[\mathrm{Sp}\,C\,(R+G) + \mathbf{H}C\mathbf{H}^+]^2}\,. \tag{12}$$

Интересны случаи, когда $C_{mn} = \delta_{mn}$ и $C_{mn} = 1$. В первом из них имеем

$$\gamma_1 = \frac{\mathrm{Sp}\,(R+G)^2 + 2\mathbf{H}\,(R+G)\,\mathbf{H}^+}{[\mathrm{Sp}\,(R+G) + \mathbf{H}\mathbf{H}^+]^2}\,, \tag{13}$$

а во втором

$$\gamma_2 = 1 - \frac{\left|\sum H_m\right|^4}{\left[\mathrm{Sp}\,(R+G) + \left|\sum H_m\right|^2\right]^2}\,. \tag{14}$$

4. Рассмотрим примеры использования формулы (12). Пусть в первом случае отсутствуют быстрые флуктуации, т. е. $R_{mn} = 0$. Тогда при достаточно малых формфакторах ($W_m \sim 0$)

$$H_m = \beta_{cm}e^{-m\Omega t}\quad iG_{mn} = \beta_{cm}\beta^*_{cn}\left[e^{-(m-n)\Omega t} - e^{-|m-n|\Omega t}\right].$$

Поэтому для времени $t \gg \Omega^{-1}$ имеем (при $C_{mn} = 1$ или $C_{mn} = \delta_{mn}$)

$$\left.\begin{aligned} P_{\text{ср.}}\,(\beta,\ t) &= \prod_m \frac{1}{\pi n_{cm}} \exp\left(-\frac{|\beta_{cm}|^2}{n_{cm}}\right),\\ Q\,(\lambda) &= \prod_m (1 - \lambda n_{cm})^{-1}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

т. е. моды становятся статистически независимыми, а относительная дисперсия γ_M равна (при $C_{mn} = \delta_{mn}$)

$$\gamma_M = \frac{\langle(\beta\beta^+)^2\rangle - \langle(\beta\beta^+)\rangle^2}{\langle(\beta\beta^+)\rangle^2} = 1$$

для любого числа мод.

Если величина формфакторов $W_m \leqslant 1$, так как траектория тока $\mathbf{j}(\mathbf{r},\ t)$ может быть достаточно точно задана определенной функцией координат и времени, то

$$P_{\text{ср.}}\,(\beta,\ t) = \delta^{2M}\,[\beta - \beta_c\,(t)] \tag{16}$$

и $\gamma_M = 0$.

В другом случае, когда присутствуют лишь быстрые флуктуации, имеем $G_{mn} = 0$, $H_m = \beta_{cm}$, а поскольку недиагональные элементы матрицы R_{mn} пренебрежимо малы, то $R_{mn} = n_{sm}\delta_{mn}$, где n_{sm} — число шумовых фотонов, приходящихся на m-ю моду.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} P_{\text{ср.}}\,(\beta,\ t) &= \prod_m \frac{1}{\pi n_{sm}} \exp\left(-\frac{|\beta_m - \beta_{cm}|^2}{n_{sm}}\right),\\ Q\,(\lambda) &= \prod_m \frac{1}{1 - \lambda n_{sm}} \exp\left(\frac{\lambda n_{cm}}{1 - \lambda n_{sm}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

откуда

$$\gamma_M = \left[\sum_m (n_{cm} + n_{sm})^2 - \sum_m n^2_{cm}\right]\left[\sum_m (n_{cm} + n_{sm})\right]^{-2} \tag{18}$$

выражение для относительной дисперсии, которое при $n_{sm} = 0$ переходит в (16). При $n_{cm} = 0$ для чисто шумового поля имеем

$$Q\,(\lambda) = \prod_m (1 - \lambda n_{sm})^{-1}. \tag{19}$$

5. Таким образом, в отличие от статистических свойств поля, образованного набором независимых мод [1], для которых дисперсия γ_M с ростом M

всегда асимптотически стремится к гауссовому значению, дисперсия поля, состоящего из системы связанных мод, может принимать значения от 0 до 1 в зависимости от степени статистической междумодовой связи и количеством мод.

Литература

[1] И. А. Дерюгин, В. Н. Курашов. Опт. и спектр., *29*, 345, 1970.
[2] Р. Глаубер. Сб. «Квантовая оптика и квантовая радиофизика». Изд. «Мир», М., 1966.
[3] G. Lachs. J. Appl. Phys., *38*, 3439, 1967.

Поступило в Редакцию 26 февраля 1974 г.