

ВЛИЯНИЕ КОГЕРЕНТНОСТИ НА ИЗОБРАЖЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО УЗКОЙ ЩЕЛИ

Б. Я. Герловин

Показано, что влияние когерентности освещения на изображение бесконечно узкой щели проявляется в изменении зрачковой функции объектива. Обсуждены методы, позволяющие сделать изображение бесконечно узкой щели таким же, как при некогерентном освещении.

В настоящее время по многим соображениям наиболее распространенной характеристикой для оценки качества оптических систем является оптическая передаточная функция (ОПФ), представляющая собой преобразование Фурье от изображения некогерентно светящейся бесконечно узкой щели (а также частотно-контрастная характеристика (ЧКХ), представляющая собой модуль ОПФ), поэтому полезно применение этих характеристик к оценке оптической системы микроскопа. Отличительной особенностью многих микрообъектов является то, что они пропускают свет от вспомогательного источника, направляемый на них с помощью осветительной системы. При этом свет, падающий на объект, является частично когерентным. Основные идеи в исследованиях влияния частично когерентного освещения в микроскопах проходящего света на изображение объекта принадлежат Рождественскому [1]. В настоящее время влиянию частично когерентного света на изображения некоторых характерных объектов посвящено много работ [2-5], однако в них недостаточное внимание уделено изображению бесконечно узкой щели, например, в [5] указывается, что изображение бесконечно узкой щели не зависит от степени когерентности освещающего щель пучка (аналогично изображению бесконечно малого отверстия). Это, вообще говоря, верно только для бесконечно малого отверстия, но не для щели. Наоборот, изображение бесконечно узкой щели, освещенной частично когерентным светом, обладает некоторыми интересными особенностями, которым посвящена настоящая статья.

Предположим, что объект, имеющий пропускание комплексной амплитуды $F(x_0, y_0)$, рассматривается с помощью объектива, который характеризуется функцией пропускания $K(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ (обозначение заимствовано из [6]), равной комплексной амплитуде в точке (x_1, y_1) изображения, обусловленной возмущением с единичной амплитудой и нулевой фазой в точке предмета (x_0, y_0) . Пусть объект освещается вспомогательным источником света, находящимся в фокусе осветительной системы (освещение по Келеру [6]), и функция взаимной интенсивности [6] в плоскости объекта равна $J_0(x_0 - x'_0, y_0 - y'_0)$.

Известна формула для распределения освещенности в изображении [6]

$$I_1(x_1, y_1) = \iiint \int J_0(x_0 - x'_0, y_0 - y'_0) F(x_0, y_0) F^*(x'_0, y'_0) \times \\ \times K(x_1 - x_0, y_1 - y_0) K^*(x_1 - x'_0, y_1 - y'_0) dx_0 dy_0 dx'_0 dy'_0, \quad (1)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Обозначая значком «крыша» над обозначением любой функции преобразование Фурье от этой

функции, из формулы (1) получим, так же как и в [6],

$$I_1(f, g) = \iiint \hat{J}_0(f', g') \hat{F}(f' + f, g' + g) \hat{F}^*(f', g') \times \\ \times \hat{K}(f'' + f' + f, g'' + g' + g) \hat{K}^*(f'' + f', g'' + g') df' dg' df'' dg'' \quad (2)$$

Пусть объект является бесконечно узким, т. е. $F(x_0, y_0) = F(y_0) \delta(x_0)$, тогда $\hat{F}(f, g) = \hat{F}(g) \delta(f) = \hat{F}(g)$. Если $F(y_0)$ равно единице в пределах отрезка $[-a, a]$ и нулю вне этого отрезка, то

$$\hat{F}(g) = \frac{\sin(2\pi ga)}{\pi g} = 2a \operatorname{sinc}(2\pi ga).$$

Если a бесконечно увеличивается, то область изменения g' вблизи нуля, где $\sin c(2\pi g'a)$ заметно отличается от нуля, неограниченно сжимается, поэтому можно считать $\hat{K}(f'' + f', g'' + g')$ постоянной по g' , когда g' меняется в пределах этой области, и равной $\hat{K}(f'' + f', g'')$. Тогда (2) примет вид

$$I_1(f, g) = \iiint \left\{ \int 4a^2 \operatorname{sinc}(2\pi g'a) \operatorname{sinc}[2\pi(g' + g)a] dg' \right\} \times \\ \times \hat{J}_0(f'', g'') \hat{K}(f'' + f' + f, g'' + g) \hat{K}^*(f'' + f', g'') df'' dg'' \quad (3)$$

Введем функцию $H(g) = 2a \int \operatorname{sinc}(2\pi g'a) \operatorname{sinc}[2\pi(g' + g)a] dg'$ и рассмотрим функцию $\hat{I}_2(f, g) = \frac{1}{2a} \hat{I}_1(f, g) = H(g) \iiint \hat{J}_0(f'', g'') \hat{K}(f'' + f' + f, g'' + g) \hat{K}^*(f'' + f', g'') df'' dg''$. Нетрудно показать, что функция $H(g)$ равна $\operatorname{sinc}(2\pi ga)$, поэтому при $a \rightarrow \infty$ $H(0) = 1$ и $H(g) \rightarrow 0$, если $g \neq 0$.

Следовательно, при $g \neq 0$ $\hat{I}_2(f, g) \rightarrow 0$. Введем функцию $\hat{I}(f) = \hat{I}_2(f, 0)$ и сделаем замену переменных: пусть $g'' = g_1$, $f'' + f' = f_1$, f'' не изменяем, тогда

$$I(f) = \iiint \hat{J}_0(f'', g_1) \hat{K}(f_1 + f, g_1) \hat{K}^*(f_1, g_1) df'' df_1 dg_1 = \\ = \iiint \left[\int \hat{J}_0(f'', g_1) df'' \right] \hat{K}(f_1 + f, g_1) \hat{K}^*(f_1, g_1) df_1 dg_1 = \\ = \iint T(g_1) \hat{K}(f_1 + f, g_1) \hat{K}^*(f_1, g_1) df_1 dg_1 \quad (4)$$

где

$$T(g_1) = \int \hat{J}_0(f'', g_1) df'' \quad (5)$$

Согласно теореме Ван-Циттерта—Цернике [6], преобразование Фурье от функции взаимной интенсивности в плоскости объекта $J_0(x_0 - x'_0, y_0 - y'_0)$ равно функции распределения интенсивности в плоскости источника, или, очевидно, в апертурной диафрагме конденсора (АД). Пусть интенсивность в АД тождественно равна единице в пределах области Φ , ограниченной кривыми $\varphi_1(g_1)$ и $\varphi_2(g_1)$ (рис. 1), а вне области Φ пусть интенсивность равна нулю. Тогда из (5) получим

$$T(g_1) = \int_{\varphi_2(g_1)}^{\varphi_1(g_1)} 1 df'' = \varphi_1(g_1) - \varphi_2(g_1) \quad (6)$$

Область изменения g_1 ограничена, так как $\hat{K}(f_1, g_1) = 0$ при g_1 большем, чем радиус зрачка объектива (очевидно, что $\hat{K}(f_1, g_1)$ — зрачковая функция), поэтому влияние когерентности на изображение бесконечно узкой щели определяется «эффективным контуром» АД в пределах полосы, перпендикулярной щели, шириной, равной диаметру зрачка объектива (рис. 2). На этом рисунке контур АД, не оказывающий влияния на изображение, показан штриховой линией, а «эффективный контур» — сплошной.

Выражение (4) отличается от хорошо известного для ОПФ наличием множителя $T(g_1)$ в подынтегральном выражении. Для того чтобы оно описывало ОПФ, необходимо выполнение условия $T(g_1) = \text{const}$. Этого при равномерном освещении АД можно добиться, если, например, «эффективный контур» АД представляет собой две параллельные прямые, как показано на рис. 3, а. Из рис. 3, б видно, что если радиус АД намного больше радиуса зрачка объектива, то также $T(g_1) \approx \text{const}$ (некогерентный случай). Из него же видно, что это приближенное равенство связано с тем, что контур АД круглый. Для произвольного контура это неверно; действительно, выбирая «эффективный контур» таким, как показано на рис. 4, мы при идеальном объективе получим не идеальную кривую ЧКХ (кривая 1 на рис. 5), а кривую 2 на рис. 5, сильно отличающуюся от идеальной,

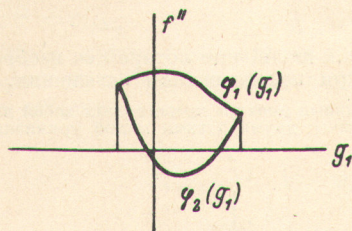


Рис. 1.

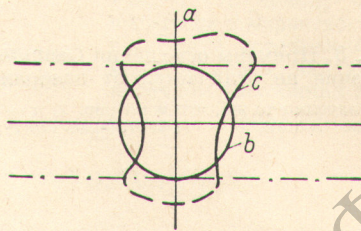


Рис. 2. Совмещенные контуры входного зрачка объектива и апертурной диафрагмы (АД).

несмотря на то что АД с избытком перекрывает зрачок объектива.

Таким образом, из выражения (4), а также из вышеприведенных рассуждений мы заключаем, что частично когерентное освещение бесконечно узкой щели как бы накладывает маску $T(g_1)$ на зрачок объектива, причем $T(g_1)$ меняется только в направлении вдоль щели и может быть любой измеримой функцией (при соответствующем контуре АД). Чтобы пояснить физический смысл этого не вполне очевидного результата, рассмотрим рис. 6.

Пусть конденсор K проектирует (для простоты примем, что с увеличением, равным единице) некогерентный источник L с распределением яркости $B(\xi, \eta)$ в зрачок объектива M . Выделим на источнике L точку S с координатами ξ, η . Эта точка осветит точку S' зрачка с координатами ξ, η , причем освещенность в точке S' пропорциональна $B(\xi, \eta)$.

Пометим теперь между конденсором и зрачком узкую щель Q , расположенную вдоль оси η . Очевидно, что щель Q растянет светлую точку S' в прямую Σ' , перпендикулярную щели, причем освещенность в каждой точке этой прямой одинакова и равна

$$dE(\eta) = C_1 B(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где C_1 — некоторая константа.

Поскольку источник L некогерентный, в освещенность прямой Σ' вносят аддитивный вклад все точки источника, расположенные на прямой $\eta = \text{const}$, таким образом,

$$E(\eta) = C_2 \int B(\xi, \eta) d\xi, \quad (7)$$

где C_2 — некоторая константа. Так как функция распределения яркости по источнику определяется преобразованием Фурье от функции взаимной интенсивности, то, сравнивая (5) и (7), мы видим, что функция $T(g_1)$ равна $E(\eta)$, т. е. она описывает неравномерное освещение зрачка объектива.

Теорема Ван-Циттерта — Цернике верна в том случае, когда величина объекта и источника намного меньше, чем расстояние между ними. В микроскопе это условие почти никогда не выполняется. Поэтому рассмотрим

функцию взаимной интенсивности в случае, когда объект освещается плоским некогерентным источником света, расположенным от него на расстоянии, сравнимом с размерами источника. Пусть плоский источник L (координаты на нем ξ, η) освещает объект O (координаты на нем x, y), распо-

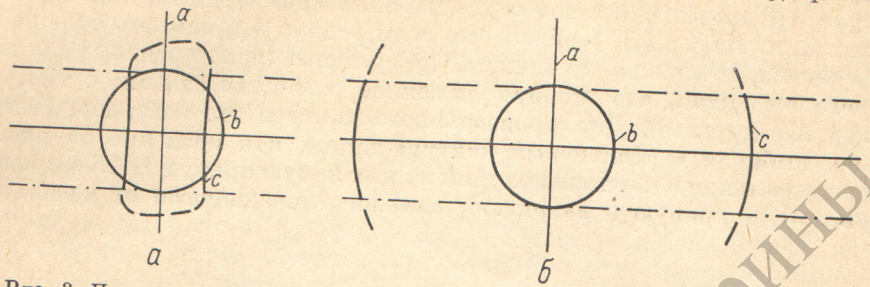


Рис. 3. Примеры освещения бесконечно узкой щели, при которой ее изображение не отличается от изображения при некогерентном освещении.

Обозначения те же, что и на рис. 2. a — «эффективный контур» представляет собой две прямые линии, b — «эффективный контур» ограничен двумя дугами малой кривизны.

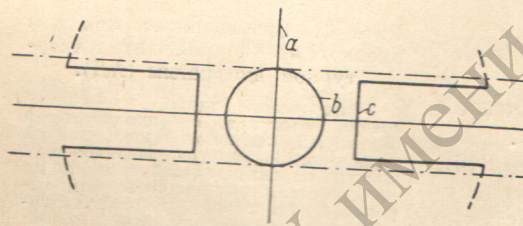


Рис. 4. Пример, демонстрирующий влияние вида «эффективного контура» на изображение бесконечно узкой щели: вид «эффективного контура».

Обозначения те же, что и на рис. 2.

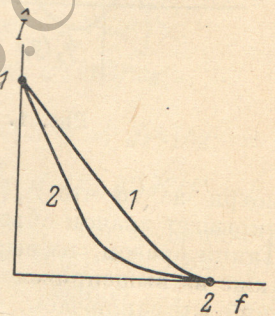


Рис. 5. Частотно-контрастные характеристики безабберационного объектива.

1 — при некогерентном освещении, 2 — при освещении, соответствующем рис. 4.

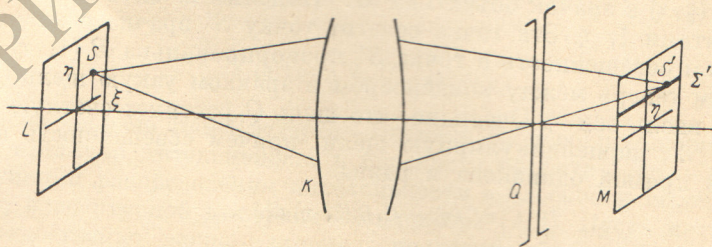


Рис. 6. Освещение входного зрачка объектива.

L — плоскость источника (координаты ξ, η); M — плоскость входного зрачка объектива; K — конденсор, проектирующий плоскость L в плоскость M ; Q — бесконечно узкая щель.

женный на расстоянии f от него (рис. 7). Световое возбуждение в точке P_1 объекта, обусловленное точкой S источника, равно

$$A(\xi, \eta) \Delta(\xi - x_1, \eta - y_1) \frac{\exp[ikr]}{r}.$$

Возбуждение в точке P_2 объекта, обусловленное той же точкой источника, равно

$$A(\xi, \eta) \Delta(\xi - x_2, \eta - y_2) \frac{\exp[ik(r + dr)]}{r + dr}.$$

Здесь $A(\xi, \eta)$ — амплитуда светового возбуждения на единичной сфере, $\Lambda(\xi, \eta)$ — коэффициент наклона, k — волновое число.

Предположим, что объект находится вблизи оси, и его размеры малы по сравнению с размерами источника. Тогда

$$r + dr \approx r, \quad \Lambda(\xi - x, \eta - y) \approx \Lambda(\xi, \eta),$$

$$dr \approx p(x_2 - x_1) + q(y_2 - y_1),$$

где p, q — лучевые компоненты, т. е. если

$$\xi = \rho \cos \vartheta, \quad \eta = \rho \sin \vartheta,$$

то

$$p = \sin \theta \cos \vartheta, \quad q = \sin \theta \sin \vartheta,$$

где $\operatorname{tg} \theta = \rho/f$.

Следуя путем, указанным в [6], получим для функции взаимной интенсивности в плоскости объекта

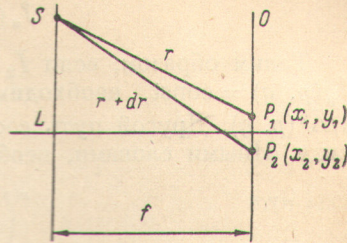


Рис. 7. К выводу формулы частичной когерентности в случае, когда источник L конечных размеров находится на конечном расстоянии f от объекта O .

$$\begin{aligned} J_0(x_2 - x_1, y_2 - y_1) &= \iint |A(\xi, \eta)|^2 \Lambda^2(\xi, \eta) \times \\ &\times \frac{\exp\{ik[p(x_2 - x_1) + q(y_2 - y_1)]\}}{r^2} d\xi d\eta = \\ &= \iint I_3(\xi, \eta) \Lambda^2(\xi, \eta) \frac{\exp\{ik[p(x_2 - x_1) + q(y_2 - y_1)]\}}{r^2} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (8)$$

где $I_3(\xi, \eta)$ — интенсивность в плоскости источника.

Выразим ξ, η через p, q

$$p = \frac{\xi}{\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}}, \quad q = \frac{\eta}{\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}}. \quad (9)$$

Отсюда

$$\xi = f \frac{p}{\sqrt{1 - (p^2 + q^2)}}, \quad \eta = f \frac{q}{\sqrt{1 - (p^2 + q^2)}}. \quad (10)$$

Якобиан этого преобразования равен

$$D = \frac{f^2}{1 - (p^2 + q^2)}. \quad (11)$$

Из рис. 7 и из (10) и (11) получим

$$r^2 = f^2 + \xi^2 + \eta^2 = \frac{f^2}{1 - (p^2 + q^2)} = D. \quad (12)$$

Подставляя (11) и (12) в (8), получим

$$J_0(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \iint \tilde{I}_3(p, q) \tilde{\Lambda}^2(p, q) \exp\{ik[p(x_2 - x_1) + q(y_2 - y_1)]\} dp dq, \quad (13)$$

где $\tilde{I}_3(p, q)$ и $\tilde{\Lambda}(p, q)$ равны соответственно $I_3(\xi, \eta)$ и $\Lambda(\xi, \eta)$, в которых ξ и η выражены через p и q .

Коэффициент наклона, по-видимому, следует полагать равным $\sqrt{\cos \theta}$ (закон Ламберта), тем более что эта величина неплохо согласуется для малых значений θ с Λ , указанной в [6], а именно $(1 + \cos \theta)/2$. Таким образом, функция взаимной интенсивности равна преобразованию Фурье от произведения функции распределения интенсивности на источнике и функции наклона, выраженных через направляющие косинусы луча.

Линии постоянного p или q имеют вид гипербол. Действительно, из (9) нетрудно получить

$$\frac{\xi^2}{f^2} \frac{1}{1 - p^2} - \frac{\eta^2}{f^2} = 1; \quad \frac{\eta^2}{f^2} \frac{1}{1 - q^2} - \frac{\xi^2}{f^2} = 1. \quad (14)$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, как добиться, чтобы функция $T(g_1)$ была постоянной. Если контур АД ограничен кривыми (14), то преобразование Фурье от $J_0(x_0 - x'_0, y_0 - y'_0)$ равно, согласно (13),

$$\mathcal{J}_0(p, q) = \tilde{I}_3(p, q) \tilde{\Lambda}^2(p, q).$$

Таким образом, если $\tilde{I}_3(p, q) = \text{const}$, то, чтобы выполнилось условие $\mathcal{J}_0(p, q) = \text{const}$, необходимо на АД поместить маску с пропусканием $1/\tilde{\Lambda}^2(p, q)$. Другой путь состоит в выборе контура АД в соответствующем виде. Иными словами, необходимо решить уравнение

$$\int_0^{z(p)} \tilde{\Lambda}^2(p, q) dq = C = \text{const}.$$

Если имеет место закон Ламберта, то

$$\tilde{\Lambda}^2(p, q) = \cos \theta = \sqrt{1 - (p^2 + q^2)},$$

тогда

$$\int_0^{z(p)} \sqrt{1 - (p^2 + q^2)} dq = C.$$

Решая интеграл, находим, что $z(p)$ должно удовлетворять уравнению

$$z(p) \sqrt{1 - p^2 - z^2(p)} + (1 - p^2) \arcsin \left[\frac{z(p)}{\sqrt{1 - p^2}} \right] = 2C,$$

которое легко решается численными методами.

Литература

- [1] Д. С. Рождественский. ЖЭТФ, 10, 305, 1940.
- [2] W. N. Charman. J. Opt. Soc. Am., 53, 410, 1963.
- [3] A. Röseler. Optica Acta, 16, 641, 1969.
- [4] K.-J. Rosenbruch, G. Schneider. Optik, 35, 34, 1972.
- [5] R. Röler, R. Krusche, R. van der Heydt. Optik, 29, 30, 1969.
- [6] М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. Изд. «Мир», М., 1970.

Поступило в Редакцию 16 апреля 1974 г.