ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ WOLFRAM MATHEMATICA ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Дерюжкова О.М.
Доцент кафедры теоретической физики, к.ф.-м..н., доцент УО «Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины», Республика Беларусь, г. Гомель

Андреев В.В.
Зав. кафедрой теоретической физики, д.ф.-м..н., доцент УО «Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины», Республика Беларусь, г. Гомель

Максименко Н.В.
Профессор кафедры теоретической физики, д.ф.-м..н., профессор УО «Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины», Республика Беларусь, г. Гомель

Аннотация. В работе продемонстрированы возможности системы Wolfram Mathematica для исследования поведения одномерного пружинного маятника, на который действует вынуждающая сила.

Ключевые слова: Wolfram Mathematica, колебательные процессы, вынуждающая сила, аналитическое решение.

Непрерывное развитие науки ведет к тому, что все яснее становятся общие закономерности и связи качественно различных физических явлений. Единый подход в описании колебательных процессов различной природы играет все большую роль в современной науке и технике. Нелинейная динамика, используя различные математические и физические модели, устанавливает общие свойства колебательных процессов в реальных системах, определяет связь между параметрами и характеристиками системы без учета природы колебаний. К колебаниям относят любые движения, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. Они свойственны абсолютно всем явлениям природы и проявляют себя, выполняя определённые функциональные обязанности (колесо, маятник, колебательный контур и др.) или демонстрируя определенные физические свойства (вибрация машин, неустойчивость сооружений, вихревые потоки и др.). Все виды колебаний тесно связаны с огромным количеством технических процессов и физических явлений. В физике особо выделяются колебания двух видов – механические и электромагнитные, а также их электромеханические комбинации. Все колебания обладают одинаковыми характеристиками, такими как: амплитуда – максимальное отклонение от положения равновесия колеблющейся величины, измеряется в метрах; период – время одного полного колебания, через которое повторяются характеристики системы, измеряется в секундах; частота – количество колебаний за единицу времени, она обратно пропорциональна периоду колебаний; фаза колебаний характеризует состояние системы. При изучении колебательных процессов используют два подхода: кинематический (базируется на анализе закона движения или траектории при различных начальных условиях) и динамический (основан на решении дифференциального уравнения, которому подчиняются все движения колебательной системы, независимо от начальных условий) [1].

Система Wolfram Mathematica (WM) [2] благодаря уникальным возможностям языка и алгоритмам анализа и обработки данных в полной мере способна реализовать все возможные подходы в изучении колебательных процессов. Применение системы WM для моделирования колебаний дает возможность визуализировать результаты вычислений, провести анализ и систематизацию полученных данных.

Лучший способ продемонстрировать возможности системы WM состоит в решении конкретных физических задач, показав способности этой системы отображать расчетные данные во многих формах. Рассмотрим с использованием WM поведение простейшего колебательного процесса: одномерного пружинного маятника.

Состояние одномерного пружинного маятника, на который действует вынуждающая сила описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + b\sin(\omega t), \qquad b = F_0 / m, \;\; \omega_0^2 = k / m \;, \tag{1}$$

где k – жесткость пружины, m – масса груза, ω_0 – собственная частота колебаний маятника, ω – частота колебаний вынуждающей силы.

WM позволяет решить это уравнение в аналитическом виде с произвольными начальными условиями с помощью оператора DSolve (рис. 1).

```
In[140]:=
ClearAll["Global`*"];
очистить всё
solv =
  DSolve[{x''[t] + ω0² x[t] - b Sin[ω t] == 0, x[0] == x0, x'[0] == v0},
  решить дифференциальные урав···  синус
    x, t] // FullSimplify;
          упростить в полном объёме
Print[Style["Решение уравнения (1) x(t) = ", 20, Bold, Blue]];
печа··· стиль                                 жир··· синий
First[x[t] /. solv] // FullSimplify
первый          упростить в полном объёме

Решение уравнения (1) x(t) =

x0 Cos[t ω0] + b (-ω0 Sin[t ω] + ω Sin[t ω0]) / ((ω² - ω0²) ω0) + v0 Sin[t ω0] / ω0
косинус
```

Рис. 1. Аналитическое решение дифференциального уравнения (1)
для пружинного маятника

Аналитическое решение достаточно легко может быть преобразовано в вычислительную работу по исследованию влияния различных комбинаций характеристик маятника (собственная частота, частота вынуждающей силы, время) на изменение поведения. Для этого применяют операторы Plot (построение графика), Manipulate и ряд основных команд.

```
In[258]:=
(* Начальные условия *)
x0 = 1; b = 1; v0 = 1;
f[t_, ω_, ω0_] = First[x[t] /. solv] // FullSimplify;
               первый                 упростить в полном объёме
Plot[f[t, 1.01, 1.0], {t, 0, 50},
график функции
 AxesLabel → {Style["t, сек", Bold, Italic, 14],
 обозначения н··· стиль          жир··· курсив
   Style["x(t), м", Bold, Italic, 14]},
   стиль            жир··· курсив
 PlotLabel → Style["ω=1.01 Гц ,     ω0= 1 Гц ", Italic, Bold, 14]]
 пометка гр···  стиль                        курсив  жирный шрифт
```

Out[260]=

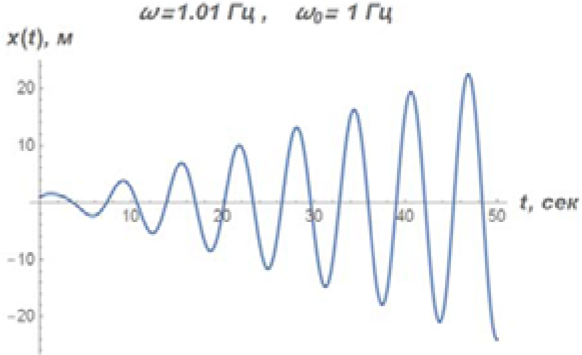

Рис. 2. Графическое отображение решения уравнения (1)
для пружинного маятника при $\omega \approx \omega_0$

На рисунке 2 представлен результат использования оператора Plot в случае, когда частота колебаний вынуждающей силы ω практически совпадает с собственной частотой колебаний пружинного маятника ω_0. Как следует из рисунка 2, амплитуда колебаний с течением времени увеличивается, что соответствует хорошо известному явлению резонанса.

Результат, полученный с помощью команды Manipulate, представляет собой объект, содержащий один или несколько элементов управления, которые можно использовать для изменения значений одного или нескольких параметров. При этом не требуется «пересчитывать» уравнение для других значений параметров, как при использовании оператора Plot. Оператор Manipulate создает объект, который представляет собой динамическую визуализацию (анимацию) поведения $x(t)$ при различных значениях частот ω и ω_0. На рисунке 3 продемонстрирован статический «срез» поведения $x(t)$ для $\omega = 0{,}5$ Гц, $\omega_0 = 1{,}4$ Гц и промежутка времени $t = 50$ с.

In[265]:=

```
Manipulate[Plot[f[t, ω, ω0], {t, 0, 50},
  AxesLabel → {Style["t, сек", Bold, Italic, 14],
    Style["x(t), м", Bold, Italic, 14]}],
 {{ω, 0.5, "Частота  ω"}, 0, 4},
 {{ω0, 1.4, "Собственная частота ω₀"}, 0, 4}]
```

Out[265]=

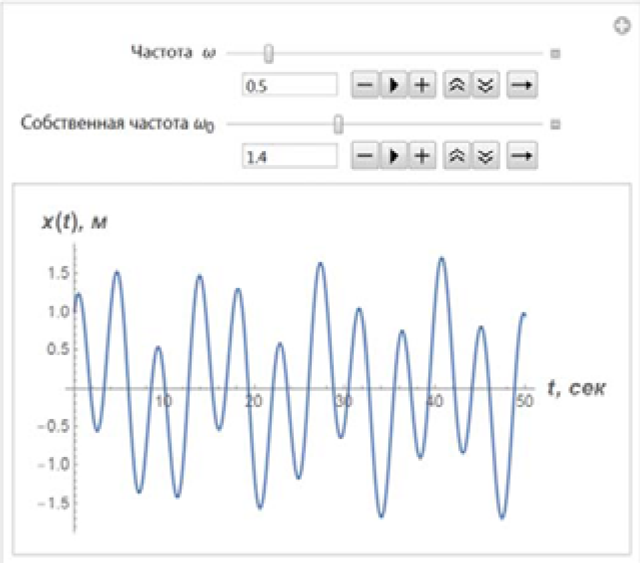

Рис. 3. Графическое отображение решения уравнения (1)
с помощью Manipulate

Данные примеры не исчерпывают всех возможностей WM для моделирования колебаний и других физических процессов. В этой среде можно проводить исследования сложных колебательных систем с различными начальными и граничными условиями. Большой объем высокопроизводительных вычислительных алгоритмов (решение уравнений всех видов) делает WM мощным универсальным инструментом для моделирования, решения, анализа и структурирования задач из любой области физики и техники.

Список литературы:

1. Горелик Г.С. Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику. 3-е изд. М.: Физматлит, 2007. 656 с.
2. Wolfram S. The Mathematica book. Addison-Wesley, 1999. 359 p.