

О ДИФРАКЦИОННЫХ ПОТЕРЯХ ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРОВ. II

М. М. Попов и Т. М. Попова

Матричное представление оператора Фокса и Ли, полученное в первой части этой работы, используется для вычисления дифракционных потерь устойчивых симметричных резонаторов. Приводятся результаты расчета на ЭВМ дифракционных потерь при различных значениях параметров резонатора.

В работе [1] получено матричное представление оператора Фокса и Ли, позволяющее вычислять дифракционные потери открытых резонаторов. Настоящая статья является продолжением этой работы и посвящена вычислению дифракционных потерь устойчивых симметричных двухзеркальных резонаторов. Расчеты проводились на ЭВМ М-222 на основе описанного в [1] алгоритма.

Симметричный резонатор, образованный двумя бесконечными цилиндрическими зеркалами (двумерный случай), характеризуется параметрами: l — длина резонатора, r — радиус кривизны зеркал, $2a$ — поперечный размер зеркал и называется устойчивым, если $|g| < 1$, где $g = 1 - (l/r)$. Для устойчивых симметричных резонаторов матричное представление оператора Фокса и Ли K , предложенное в [1], может быть получено следующим образом (сравни с [1]).

В случае симметричного резонатора оператор K можно представить в виде

$$K = \chi \hat{\sigma} \chi, \quad (1)$$

где χ — срезающая функция, равная единице на зеркале и нулю вне его, $\hat{\sigma}$ — унитарный оператор, порождаемый интегральным уравнением Фокса и Ли для резонатора с «бесконечными зеркалами». Если исходный резонатор устойчив, то спектр оператора $\hat{\sigma}$ дискретный, т. е. существует множество функций $\psi_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, интегрируемых с квадратом модуля на оси $-\infty < x < \infty$, и таких, что $\hat{\sigma} \psi_m = \exp(i\sigma_m) \psi_m$. Собственные функции ψ_m (иначе называемые решениями Флоке параболического уравнения, см. формулы (3)–(6) работы [1]) образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве L_2 на оси $-\infty < x < \infty$. В этом базисе оператор $\hat{\sigma}$ является диагональным и на любую функцию $f(x) \in L_2$ действует по формуле

$$(\hat{\sigma}f)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{i\sigma_m} (f, \psi_m) \psi_m(x), \quad (2)$$

где $(f, \psi_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \bar{\psi}_m(x) dx$ — коэффициент Фурье.

Используя формулы (1), (2), в базисе, образованном собственными функциями оператора $\hat{\sigma}$, получаем следующее выражение для матрицы оператора K :

$$K_{mn} = \sum_{p=0}^{\infty} \chi_{mp} e^{i\sigma_p} \chi_{pn}. \quad (3)$$

В равенстве (3) через κ обозначена матрица оператора умножения на срезающую функцию χ (который является проектором на подпространство функций, тождественно равных нулю вне зеркала), ее элементы определяются формулой

$$\kappa_{pn} = (\chi \psi_n, \psi_p). \quad (4)$$

Очевидно, κ — бесконечная эрмитовская матрица.

Наряду с оператором K , определяемым формулой (1), рассмотрим оператор $\tilde{K} = \hat{\sigma}\chi$. Покажем, что их собственные значения совпадают.

Пусть $\tilde{K}u_n = \lambda_n u_n$, умножая обе части этого равенства на χ и учитывая, что $\chi = \chi^2$, получаем $K\tilde{u}_n = \lambda_n \tilde{u}_n$, где $\tilde{u}_n = \chi u_n$. Обратно, пусть $Kv_n = \lambda_n v_n$. Собственная функция v_n , очевидно, финитная функция, равная нулю вне апертуры зеркала, т. е. $\chi v_n = v_n$. Определим функцию \tilde{v}_n формулой $\tilde{v}_n = \hat{\sigma}v_n$; она уже не обращается в нуль вне зеркала (можно убедиться, что $\tilde{v}_n(x)$ — целая функция на плоскости комплексной переменной x). Теперь $\tilde{K}\tilde{v}_n = \hat{\sigma}\chi\hat{\sigma}v_n = \hat{\sigma}(\chi\hat{\sigma}v_n) = \lambda_n \tilde{v}_n$.

Отметим, что матричные элементы оператора K являются бесконечными рядами (3), тогда как матрица оператора \tilde{K} имеет вид

$$\tilde{K}_{mn} = e^{i\sigma_m} \kappa_{mn}. \quad (5)$$

Приведем явные формулы для σ_m и элементов матрицы κ (4). Положим $\varphi = \arg(g + i\sqrt{1-g^2})$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ и $z = \sqrt{1-g^2} (k/l) a$, где k — волновое число, тогда

$$\sigma_m = kl + \pi - \varphi \left(m + \frac{1}{2} \right), \quad (6)$$

$$\kappa_{mn} = \exp \left[i \frac{\pi}{2} (n - m) \right] A_{mn}(z). \quad (7)$$

В равенстве (7) вещественная симметричная матрица $A(z)$ определяется выражением

$$A_{mn}(z) = (\pi^{2m+2n} m! n!)^{-1/2} \int_{-z}^z e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) d\xi, \quad (8)$$

в котором $H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$ — полиномы Эрмита, $m, n = 0, 1, 2, \dots$

Из формул (3), (5)–(8) следует, что в рассматриваемом базисе матрицы операторов K и \tilde{K} зависят от двух комбинаций φ и z параметров l, r, a исходного резонатора.

§ 1. Зависимость дифракционных потерь от φ

Дифракционные потери энергии α_n за один проход в резонаторе определяются формулой $\alpha_n = 1 - |\lambda_n|^2$, где λ_n есть n -е собственное значение оператора K . Можно убедиться, используя явные формулы (3), (6)–(8) для матрицы K_{mn} , что при фиксированном z потери α_n являются симметричной функцией параметра φ относительно $\varphi = \pi/2$ (конфокальный резонатор), поэтому достаточно рассматривать интервал $0 < \varphi \leq \pi/2$.

Матрицы операторов \tilde{K} и K распадаются на два (бесконечных) блока, соответствующих симметричным и антисимметричным по переменной x собственным колебаниям резонатора. В настоящей работе вычисляются дифракционные потери симметричных собственных колебаний, которым в формулах (6)–(8) отвечают только четные значения m и n .

Вычисление элементов матрицы $A(z)$, потребовавшее наибольшего количества машинного времени, проводилось при $z = 1, 2, 3, 4$. При $0 \leq 2m \leq 18$ значения функций Эрмита $e^{-1/2\xi^2} H_m(\xi)$, входящих в интеграл (8), вычислялись с использованием рекуррентной формулы [2], а для $2m \geq 12$ функции Эрмита заменялись двумя членами квазикласси-

ческой асимптотики, пригодной в области осцилляции этих функций вдали от точки поворота. Уже при $2m=12$ точка поворота $\xi=5$ и лежит вне пределов интегрирования в (8). В промежуточной области $12 \leq 2m \leq 18$ контролировалось совпадение результатов вычисления этими двумя способами элементов матрицы $A(z)$. Диагонализация матриц K и \tilde{K} конечного порядка, и тем самым вычисление дифракционных потерь осуществлялось с помощью программы Someig, описанной в работе [3]. Эта программа позволяет вычислять собственные значения и собственные векторы комплексных неэрмитовых матриц.

При $z=2$ для конфокального резонатора ($\varphi = \pi/2$) сравнивались дифракционные потери трех первых симметричных мод резонатора, вычисленные по матрицам \tilde{K}_{2m2n} и K_{2m2n} одного и того же порядка (14×14). При этом для обеспечения достаточной точности при вычислении матричных элементов K_{2m2n} по формуле (3) использовалась матрица A_{2m2n} (2) 21-го порядка. Результаты вычисления приведены в последних двух столбцах таблицы. В первом столбце таблицы приведены результаты Слепяна и Поллака [4], а во втором — взятые из работы [5] результаты вычислений, основанных на разложении ядра уравнения Фокса и Ли в ряд Фурье по функциям Эрмита. Для рассматриваемого конфокального резонатора последний метод, называемый в [5] kernal expanction, приводит¹ к матрице, совпадающей с матрицей \tilde{K} . Различие в пятом знаке после запятой в величине дифракционных потерь во втором и третьем столбцах таблицы обусловлено различной точностью вычисления элементов матрицы A_{2m2n} (2). В работе [5] они вычислены, по-видимому с большей точностью, поскольку там не использовались асимптотические формулы для функций Эрмита.

$\alpha_n, \%$	Слепян и Поллак	Kernal expanction 14 × 14	\tilde{K} 14 × 14	K 14 × 14
	1	2	3	4
α_0	0.411	0.416	0.417	0.547
α_2	48.093	47.781	47.784	53.987
α_4	99.117	99.133	99.134	99.418

Примечание. $z=2, \varphi = \pi/2$.

Если считать вычисления Слепяна и Поллака [4] наиболее точными, то оказывается (см. таблицу), что собственные значения оператора Фокса и Ли (и тем самым дифракционные потери) лучше аппроксимируются собственными значениями матрицы \tilde{K} , чем матрицы K одного и того же (конечного) порядка. Поэтому в дальнейших вычислениях использовалась матрица (5).

Ограничившись матрицей \tilde{K}_{2m2n} 14-го порядка, изучалась зависимость дифракционных потерь от φ (шаг по φ равен 0.1) при фиксированном значении параметра z для $z=1, 2, 3, 4$. Результаты вычисления для первых симметричных мод при $z=2$ и $z=3$ приведены соответственно на рис. 1 и 2.² Для значений $\varphi > \pi/2$ графики на этих рисунках нужно продолжить симметрично относительно оси $\varphi = \pi/2$.

Обнаруженная зависимость дифракционных потерь от φ при разных z носит следующий характер. При $z=1$ потери $\alpha_0(\varphi)$ наиболее добротной моды качественно имеют тот же вид, что и $\alpha_2(\varphi)$ при $z=2$. При $z=2$ функция $\alpha_0(\varphi)$ имеет минимум при $\varphi = \pi/2$. Далее, при $z=3$ и $z=4$ появляются относительные минимумы у дифракционных потерь наиболее добротных мод также в точках $\varphi = \pi/3$ и $\varphi = 2\pi/3$ (рис. 2).

¹ Подробнее о соотношении между методом kernal expanction [5] и используемом нами см. следующий параграф настоящей работы.

² При $z=3$ величина потеря $\alpha_0(\varphi)$ наиболее добротной моды находится на пределе точности вычислений. Качественно $\alpha_0(\varphi)$ имеет тот же вид, что и $\alpha_2(\varphi)$.

Проиллюстрируем скорость сходимости вычислительного процесса на примере $z=2$, $\varphi = \pi/2 - 0.3$. Значения α_0 , вычисленные по матрице \tilde{K} 11, 12, 13 и 14-го порядков, равны в процентах соответственно 1.005, 1.006, 0.996, 1.003, т. е. практически уже не зависят от порядка матрицы. Значения α_2 при этом равны соответственно 46.023, 45.691, 46.235, 46.095. Сходимость оказывается не монотонной, она практически не зависит от φ .

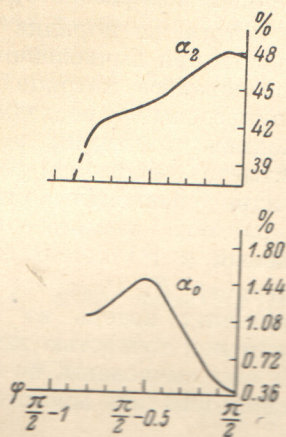


Рис. 1. $z=2$.

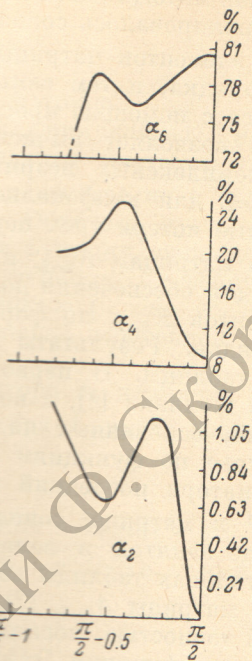


Рис. 2. $z=3$.

§ 2. Обсуждение результатов

Параметры z и φ возникают естественным образом, если резонатор с конечными зеркалами описывать в терминах собственных функций унитарного оператора $\hat{\sigma}$, соответствующего резонатору с «бесконечными зеркалами». При монотонном убывании φ от значения $\varphi = \pi/2$ величина $g=1-(l/r)$ монотонно возрастает. Если при этом z остается постоянным, то должен увеличиваться размер $2a$ зеркала в соответствии с формулой $z = \sqrt{\frac{k}{l}} a \sqrt{\sin \varphi}$. Это объясняет быстрое убывание дифракционных потерь мод с малой добротностью при $\varphi \leq (\pi/2) - 0.7$ (рис. 1, 2). Отметим, что, положив формально $\varphi=0$, по формулам (3) и (5) получаем матрицу оператора проектирования χ на подпространство функций, равных нулю вне зеркала, тогда как оператор Фокса и Ли является вполне непрерывным. Обусловлено это тем, что при $\varphi=0$ ($g=1$) резонатор оказывается неустойчивым. Спектр $\hat{\sigma}$ в этом случае непрерывный и формула (2) оказывается несправедливой. Используемое матричное представление оператора K , таким образом, не описывает переход от устойчивых резонаторов к неустойчивым.

Для значений $\varphi=2\pi(m/n)$, где m, n — целые (т. е. соизмеримых с π), оператор $\hat{\sigma}$ имеет n различных собственных значений, каждому из которых соответствует бесконечное множество собственных функций. Учитывая это вырождение и привлекая соображения геометрического характера,³ можно было бы ожидать, что дифракционные потери $\alpha_n(\varphi)$ имеют относительный минимум при $\varphi=2\pi(m/n)$, по крайней мере для небольших n . Проведенные вычисления показывают, что минимумы возникают при $\varphi = \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$ для наиболее добротных мод, причем при $\varphi = \pi/3$,

³ См. [6], где устанавливается геометрический смысл дифракционных потерь конфокального резонатора в терминах геометрии гильбертова пространства.

$2\pi/3$ глубина минимума приблизительно вдвое меньше, чем в конфокальном резонаторе ($\varphi = \pi/2$).

В заключение остановимся на методе kern. экр. [5]. Вывод матричного представления, приведенной в работе [5], основан на разложении ядра $K(x, y)$ интегрального уравнения Фокса и Ли в ряд Фурье

$$K(x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} B_{mn} \Phi_m(x) \Phi_n(y), \quad (9)$$

где $\Phi_n(x) = \exp\left[ig - 1\right] \frac{x^2}{2} H_n(x)$.

Строго говоря, этот вывод является некорректным по следующей причине. Функции $\Phi_n(x)$, $\Phi_m(y)$ ($m, n=0, 1, 2, \dots$) образуют базис в пространстве функций, интегрируемых с квадратом модуля на плоскости xy (т. е. в $L_2(R^2)$), однако ядро $K(x, y) = c \exp\left[i\left(g \frac{x^2+y^2}{2} - xy\right)\right]$ и не принадлежит этому пространству. Поэтому ряд Фурье (9) не сходится в среднем (т. е. в смысле $L_2(R^2)$) к функции $K(x, y)$. Для конфокального резонатора ($g=0$) функции $\Phi_n(x)$ суть собственные функции унитарного оператора \hat{c} , ядром которого является $K(x, y)$. В этом случае, несмотря на отсутствие сходимости в среднем ряду (9), замена ядра $K(x, y)$ оператора \hat{c} этим рядом приводит к правильной формуле (2), вытекающей из спектрального разложения \hat{c} . Поэтому для конфокального резонатора матричное представление, полученное в [5], совпадает с матрицей оператора \hat{K} .

Для устойчивых резонаторов при $g \neq 0$ такого совпадения нет, поскольку используемые в [5] функции $\Phi_m(x)$ не являются собственными функциями оператора \hat{c} . В случае неустойчивых резонаторов вообще формула (2) не имеет места. Матричное представление оператора Фокса и Ли, которое может быть получено и в этом случае [1], характерно тем, что матрица оператора \hat{c} уже не будет диагональной.

Авторы благодарны Л. Т. Савиновой за помощь при отладке программы Someig, Н. Я. Кирпичниковой и В. А. Скобелеву за консультации по программированию.

Литература

- [1] М. М. Попов. Опт. и спектр., 36, 561, 1974.
- [2] В. И. Смирнов. Курс высшей математики. 3, ч. 2. Изд. «Наука», 1969.
- [3] P. J. Eberlein, J. Boothroyd. Numerische Mathematik, 11, 1—12, 1968.
- [4] D. Slepian, H. O. Pollak. Bell Syst. Tech. J., 40, 43, 1961.
- [5] R. L. Sanderson, W. Streifer. Appl. Opt., 8, № 1, 131, 1969.
- [6] М. М. Попов. ДАН, 219, № 1, 1974.

Поступило в Редакцию 26 марта 1974 г.