УДК 535.8 : 535.853.3

ОБ АСТИГМАТИЗМЕ ВОГНУТЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК С НЕПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ШТРИХАМИ

С. А. Стрежнев и *Н. С. Шмидт*

Теоретически исследованы свойства вогнутых сферических решеток с непрямолинейными штрихами. У таких решеток фокальная кривая для сагиттальных лучей представляет собой прямую, пересекающую фокальную кривую для меридиональных лучей, окружность Роуленда, в двух точках. В этих точках наблюдается стигматическое изображение, а вблизи них астигматизм достаточно мал. Рассмотрены условия получения и рассчитаны оптимальные квазистигматические области при установке решеток по автоколлимационной схеме и схеме нормального падения. Показано, что наибольшие квазистигматические области $0 \div 233.2$, $0 \div 466.4$ и $0 \div 932.8$ нм можно получить с решетками соответственно 1200, 600 и 300 штр./мм, установленными по автоколлимационной схеме. Ширина квазистигматических областей решеток в указанных схемах достаточна для проведения спектрографических исследований.

Основным недостатком вогнутых дифракционных решеток, изготовленных на сферических поверхностях, является астигматизм. Известные способы компенсации астигматизма относятся к вогнутым решеткам с прямыми штрихами и связаны главным образом с изменением расстояния между штрихами [1–3] и формы поверхности решетки [4–9]. Как показали исследования [10], путем изменения шага можно исправить астигматизм вогнутых сферических решеток в установке нормального падения и в установке Игля в области длин волн, пригодной для спектрографического исследования. Для решетки с радиусом кривизны 1 м, 300 штр./мм этому условию удовлетворяет область длин волн короче 650 нм, а для решеток 600 штр./мм при нормальном падении от 320 до 420 нм и в автоколлимации короче 450 нм. Аналогичные результаты в указанных установках были получены с вогнутыми решетками, изготовленными на тороидальных поверхностях [11, 12]. Следует отметить, что в отличие от тороидальных решеток фокальная кривая решеток с переменным шагом не является окружностью Роуленда и рассчитывается в каждом конкретном случае.

В работах [13, 14] была показана возможность компенсации астигматизма путем искривления штрихов решеток. Сведения об изготовлении решеток с такими штрихами сообщались в работе [3]. Однако подробных данных о свойствах решеток и способе их изготовления опубликовано не было. Теоретические исследования свойств вогнутых решеток со штрихами круговой формы, нанесенными на эллиптическо-тороидальную поверхность [15], показали, что решетки этого типа по сравнению с решетками, имеющими прямые штрихи, образуют две стигматические точки по одну сторону от нормали к решетке. Благодаря этому астигматизм указанных решеток становится в несколько раз меньше, чем для решеток с прямыми штрихами. Фокальная кривая, круг Роуленда, остается без изменений. Как показано в работе [12], вследствие незначительной асферичности применение решеток на эллипсоидальных поверхностях для схем нормального падения нецелесообразно.

Теоретические исследования астигматизма, выполненные нами на основе принципа Ферма в трактовке, данной Кандлером [16], показали, что квазистигматическая область вогнутых сферических решеток с непрямолинейными штрихами при установках их в спектрографах по схеме Игля и нормального падения шире, чем у решеток с переменным шагом и у тороидальных с прямыми штрихами. Результаты этих исследований приведены в настоящей статье.

Рассмотрим схему нанесения штрихов на вогнутую сферическую поверхность. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы центр кривизны сферической поверхности с радиусом кривизны R совпадал с началом координат O (рис. 1). Пусть проекция штриха на плоскость, перпендикулярную нормали OO' к поверхности решетки, будет представлять дугу окружности радиуса r.

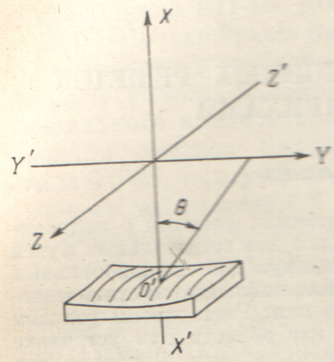

Рис. 1. Схема нанесения непрямолинейных штрихов на вогнутую сферическую поверхность.

Тогда форма штриха на решетке определится как линия пересечения поверхности сферы и кругового цилиндра, задаваемых уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \\ (y - r)^2 + z^2 &= r^2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

С целью упрощения дальнейших вычислений уравнение кругового цилиндра взято для случая центрального штриха.[1] Найдем радиус кривизны штриха ρ и угол Θ, образуемый плоскостью, в которой лежит штрих, с плоскостью ZOO'. Для этого форму штриха в пространстве, определяемую уравнениями (1), запишем в параметрической форме

$$\left.\begin{aligned} x &= -\sqrt{R^2 - 2r^2 + 2r\sqrt{r^2 - z^2}}, \\ y &= z - \sqrt{r^2 - z^2}, \\ z &= z. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Если кривая задана параметрически, то радиус кривизны ее определится по известной формуле

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')}}. \qquad (3)$$

Продифференцировав (2) и подставив производные x', y', z', x'', y'', z'' в (3) при $z \to 0$, получим радиус кривизны нелинейного штриха

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2}}. \qquad (4)$$

Плоскость, в которой лежит штрих, определится уравнением

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

которое с учетом значений x', y', z', x'', y'', z'' можно записать в виде

$$XR - Yr = 0. \qquad (5)$$

[1] Отклонения постоянной на концах штрихов по поверхности решетки от заданного значения, вызванные тем, что штрихи решеток не являются дугами концентрических окружностей, не превышают тысячных долей микрона и не вносят искажений в образование изображения, даваемого решеткой с непрямолинейными штрихами.

Отсюда Θ — угол между плоскостью штриха и плоскостью ZOO' — определится как

$$\Theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{R}{r}. \tag{6}$$

С учетом (6) радиус кривизны штриха (4) запишется в иной форме

$$\rho = R \cos \Theta. \tag{7}$$

Используя выражение (7), найдем уравнение вторичной фокальной кривой вогнутой сферической решетки с непрямолинейным штрихом. Введем следующие обозначения (рис. 2). Пусть O, C, O', т. е. точечный источник, центр решетки и изображение источника, даваемого решеткой, лежат в одной плоскости. PC — верхняя часть нелинейного штриха решетки в центре ее, DC — нормаль к решетке в точке C. Θ, как указывалось

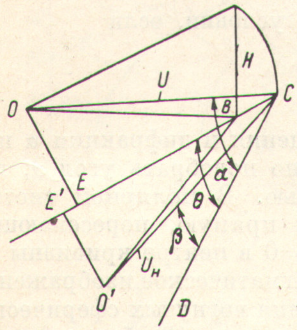

Рис. 2. Схема образования изображения вогнутой сферической решеткой с непрямолинейными штрихами.

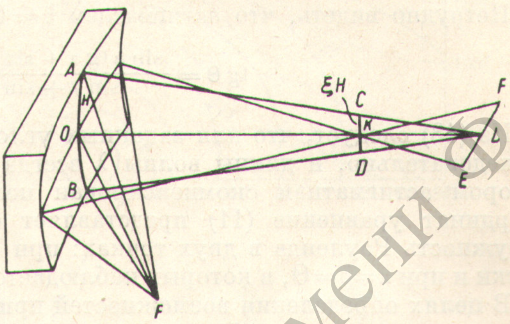

Рис. 3. Схема образования меридионального CD и сагиттального EF изображений точечного источника F вогнутой сферической решеткой с непрямолинейными штрихами.

выше, — угол, образуемый плоскостью, в которой лежит штрих, с сагиттальной плоскостью, проходящей через DC. OP — луч, падающий на решетку под углом α. Расстояние от источника O до центра решетки C пусть будет $U = OC$. $O'P$ — дифрагированный в точке P луч — составляет угол β с нормалью DC к решетке. $O'C = U_н$ — расстояние между решеткой и изображением точечного источника в меридиональной плоскости. Величина $U_н$ может быть найдена из условия экстремума оптического пути $OP + O'P$ [16]. Предполагаем, что падающий луч дифрагирует в точке P высотой $h = PB$ над горизонтальной плоскостью, проходящей через центр решетки. Если образуется изображние источника, то условие экстремума оптического пути $OP + O'P$ луча запишется в форме

$$\frac{d}{dh}(OP + O'P) = 0. \tag{8}$$

Из $\Delta\Delta$ OPB, OBE, $O'PB$, $O'BE'$, предполагая, что α, β и Θ, расположенные с одной стороны от нормали, положительные, и учитывая стрелку кривизны штриха $BC = h^2/2\rho$, можно найти OP и $O'P$

$$\left.\begin{aligned} OP &= \sqrt{h^2 + U^2 \sin(\alpha - \Theta) + \left[U \cos(\alpha - \Theta) - \frac{h^2}{2\rho}\right]^2}, \\ O'P &= \sqrt{h^2 + U_н^2 \sin(\Theta - \beta) + \left[U_н \cos(\Theta - \beta) - \frac{h^2}{2\rho}\right]^2}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Дифференцируя OP и $O'P$ по h и пренебрегая величинами второго порядка малости, при подстановке в уравнение (8) получим

$$\frac{1}{U} + \frac{1}{U_н} = \frac{\cos(\alpha - \Theta) + \cos(\Theta - \beta)}{\rho}. \tag{10}$$

Для случая нахождения источника и изображения на окружности Роуленда $U=R\cos\alpha$ и с учетом (7) и (10) получим выражение для расстояния от центра решетки до изображения в меридиональной плоскости

$$U_н=\frac{R\cos\alpha\cos\Theta}{[\cos(\alpha-\Theta)+\cos(\Theta-\beta)]\cos\alpha-\cos\Theta}. \tag{11}$$

Используя (11), можно также получить выражение для астигматизма вогнутых сферических решеток с нелинейными штрихами. Астигматизм определяется длиной ξ меридионального изображения, образованного решеткой единичной высоты, когда источник точечный. Если решетка имеет длину штрихов $AБ=H$, то длина астигматического изображения будет $CD=\xi H$ (рис. 3). Для случая расположения меридионального изображения на цилиндре Роуленда ($OK=U_v=R\cos\beta$, $OL=U_н$) с учетом (11) из $\Delta\Delta ABD$ и CDL можно найти, что

$$\xi=\cos\beta\,[\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha+\sin\beta\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\Theta(\sin\alpha+\sin\beta)]. \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что астигматизм $\xi=0$ при условии, если

$$\operatorname{tg}\Theta=\frac{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha+\sin\beta\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}. \tag{13}$$

Из (13) следует, что для заданных углов падения и дифракции α и β, а следовательно, и длины волны λ всегда можно подобрать угол Θ, при котором астигматизм скомпенсирован полностью. В полярной системе координат уравнение (11) представляет собой прямую, пересекающую окружность Роуленда в двух точках: при $\alpha=\beta=0$ в центре кривизны решетки и при $\alpha=\beta=\Theta$, в которых наблюдается стигматическое изображение.

В целях определения возможностей применения вогнутых сферических решеток с непрямолинейными штрихами по формуле (12) был проведен расчет величины астигматизма для значений углов падения и дифракции α и β и угла Θ, изменяющихся от 0 до $\pm 90°$. Одновременно с этим были получены числовые данные радиуса кривизны r в зависимости от длины волн, при которых получается стигматическое изображение. Расчет производился по формулам (13) и

$$r=\frac{R}{\operatorname{tg}\Theta}, \tag{14}$$

полученной из (6) и

$$k\lambda=a(\sin\alpha+\sin\beta) \tag{15}$$

для стандартных значений радиусов кривизны решеток, равных 0.5, 1, 2, 3, 6 и 10 м, с числом штрихов 1200 на 1 мм в первом порядке спектра ($k=\pm 1$).

На рис. 4, *а* в качестве примера представлены кривые зависимости астигматизма ξ в единицах длины штриха от углов падения и дифракции для $\Theta=10°$. Кривые соединяют точки равного астигматизма. Численные значения астигматизма приведены рядом с кривыми. Пунктирными линиями на рис. 4 показаны длины волн при дифракции от решеток 1200 штр./мм для всех углов падения и дифракции. Как видно из рис. 4, *а*, при значениях α и β и угле Θ, отличных от нуля, для сферической решетки с непрямолинейными штрихами существует кривая нулевого астигматизма. В предельном случае для $\Theta=0$ выражение (12) и вид кривых равного астигматизма (рис. 4, *б*) полностью совпадают соответственно с аналогичным выражением для астигматизма $\xi=\cos\beta\,(\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha+\sin\beta\ \operatorname{tg}\beta)$ и кривыми равного астигматизма вогнутой сферической решетки с прямыми штрихами [17], для которой астигматизм скомпенсирован только при углах α и β, равных нулю для точки, неинтересной в спектроскопическом отношении.

Рассмотрение данных расчета показало, что с решеткой, имеющей непрямолинейные штрихи с радиусом кривизны r от десятков сантиметров до нескольких метров, в принципе можно скомпенсировать астигматизм при углах падения и дифракции, изменяющихся в достаточно широких пределах. Однако, как будет показано ниже, наибольшая квазистигматическая область может быть получена только при углах падения и дифракции, изменяющихся от 0 до 15°.

Рассмотрим более подробно условия компенсации астигматизма и получения оптимальной квазистигматической области при установке

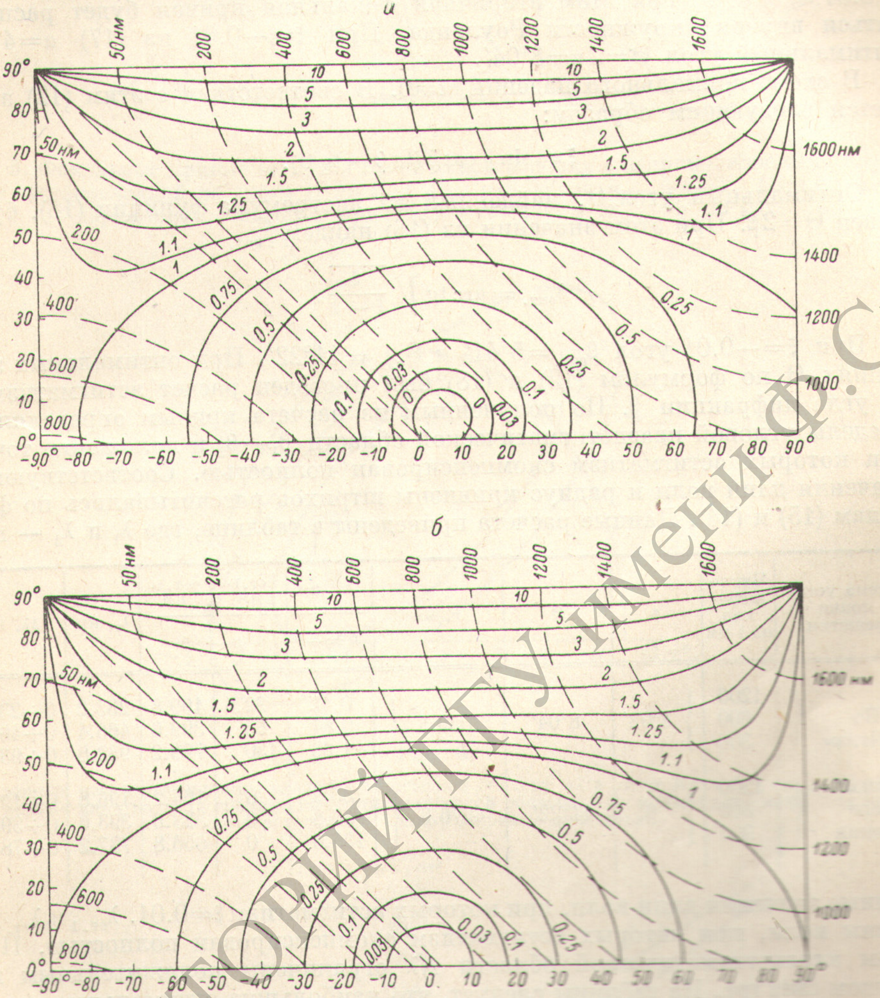

Рис. 4. Кривые равного астигматизма вогнутой сферической решетки с непрямолинейными штрихами в единицах длины штриха при углах падения и дифракции, изменяющихся от 0 до $\pm 90°$.

а — $\theta = 10°$, *б* — $\theta = 0°$; случай (*б*) относится к обычной сферической решетке с прямолинейными штрихами.

решетки с непрямолинейными штрихами в спектрографе по схеме Игля и нормального падения. Для исследования свойств решеток в этих условиях были выбраны решетки со стандартным радиусом кривизны, равным 1000.35 мм, с числом штрихов 300, 600 и 1200 на 1 мм, с размерами заштрихованной поверхности 60×50 мм ($H = 50$ мм), чтобы иметь возможность сравнить их свойства со свойствами решеток тех же параметров, описанных в [10, 11]. Коэффициент астигматизма ξ при расчетах выбирался, как в [10, 11], равным 0.01, исходя из условия разделения изображения ступенек 9-ступенчатого ослабителя, имеющего высоту ступеньки и расстояние между ступеньками ~0.5 мм (ξH на рис. 3). В схеме Игля $\alpha = \beta$. Из (12) выражение для ξ будет иметь вид

$$\xi = \sin 2\alpha \, (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \theta). \qquad (16)$$

Оптимальный угол $\Theta=2\alpha$ найдем, продифференцировав (16) по α и приравняв $\partial\xi/\partial\alpha=0$. Подставляя $\Theta=2\alpha$ в (16) и преобразуя полученное уравнение, найдем, что

$$\alpha_{\text{опт.}} = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\xi}{\xi-2}}. \tag{17}$$

Выражение (17) имеет смысл только при определенных значениях ξ $-0.01 \leqslant \xi < 0$, при этом вторичная фокальная кривая будет располагаться внутри окружности Роуленда. При $\xi=-0.01$ из (17) $\alpha=4°02'$, оптимальный угол $\Theta=2\alpha=8°04'$.

В схеме нормального падения $\alpha=0$. В соответствии с этим (12) запишется следующим образом:

$$\xi = \sin\beta\cos\beta\,(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\Theta). \tag{18}$$

Оптимальный угол Θ, найденный из экстремума функции (18), будет равен $\Theta=2\beta$. При этом значении из (18) найдем $\beta_{\text{опт.}}$

$$\beta_{\text{опт.}} = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\xi}{\xi-1}}. \tag{19}$$

При $\xi=-0.01$ угол $\beta_{\text{опт.}}=5°41'$ и $\Theta_{\text{опт.}}=11°22'$. При оптимальных значениях Θ по формулам (12) и (18) был проведен расчет астигматизма ξ от угла дифракции β. По полученным из расчета кривым определялись пределы угловой квазистигматической области $\beta_1-\beta_2$ и положение точек, при которых астигматизм скомпенсирован полностью. Соответствующие значения длин волн и радиус кривизны штрихов рассчитывались по формулам (15) и (14). Данные расчета приведены в таблице, где λ_1 и λ_2 — граничные значения длин волн, при которых астигматизм $\xi=0.01$. $\lambda_{\text{ст.}1}$ и $\lambda_{\text{ст.}2}$ — длины волн, при которых астигматизм скомпенсирован полностью. Пределы квазистигматической области $\Delta\lambda$ ограничены положительным порядком спектра. Из таблицы следует, что наибольшие оптимальные квазистигматические области $0\div233.2$, $0\div466.4$ и $0\div932.8$ нм можно получить с решетками соответственно 1200, 600 и 300 штр./мм, установленными по схеме Игля. Ширина этих областей не зависит от радиусов кривизны вогнутой поверхности решетки. На рис. 5 приведена в полярной системе координат вторичная фокальная кривая решеток с непрямолинейными штрихами, установленными по схеме Игля и нормального падения, рассчитанная для оптимальных значений α и Θ. Как следует из рис. 5, вторичная фокальная кривая представляет собой прямую, пересекающую окружность Роуленда в двух точках: в схеме Игля в положительной области при угле дифракции, близком к оптимальному, и в отрицательной — вблизи нормали к решетке; в схеме нормального падения — в центре кривизны сферической решетки и при $\beta=\Theta_{\text{опт.}}=11°22'$. Для выяснения изменения ширины квазистигматической области по спектру был проведен расчет ширины квазистигматической области $\Delta\lambda$ тех же решеток 1200 штр./мм, указанных в таблице, в зависимости от угла падения α при $\Theta_{\text{опт.}}=8°04'$ для схемы Игля и от Θ для схемы нормального падения. Расчет проводился по формулам (12) и (18). По полученным кривым астиг-

Схема установки решетки	Число штрихов на 1 мм	α	Θ	r, мм	λ_1, нм	$\lambda_{\text{ст.}1}$, нм	$\lambda_{\text{ст.}2}$, нм	λ_2, нм	$\Delta\lambda$, нм
					$k=-1$	$k=+1$			
По Иглю	1200	4°02′	8°04′	7059.5	0.42	32.5	199.8	233.2	$0\div233.2$
	600				0.84	65	399.6	466.4	$0\div466.4$
	300				1.68	130	799.2	932.8	$0\div932.8$
Нормального падения	1200	0	11°22′	4976.9	33.9	0	164.2	196.8	$0\div196.8$
	600				67.8	0	328.6	393.6	$0\div393.6$
	300				135.6	0	656.8	787.2	$0\div787.2$

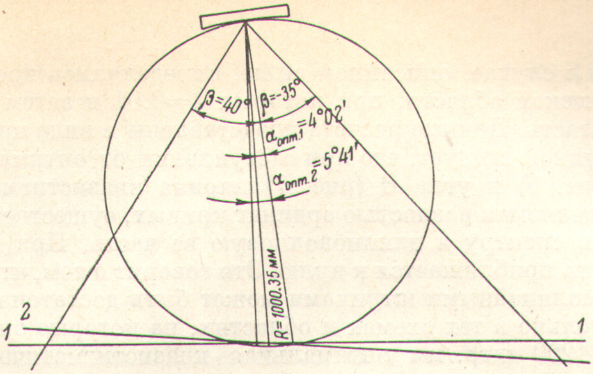

Рис. 5. Фокальные кривые вогнутой сферической решетки с непрямолинейными штрихами, установленной по схеме Игля при $\Theta_{\text{опт.}}=8°04'$ и $\alpha_{\text{опт.}}=4°02'$, (*1*) и по схеме нормального падения при $\Theta_{\text{опт.}}=11°\,22'$ и $\alpha_{\text{опт.}}=5°\,41'$ (*2*).

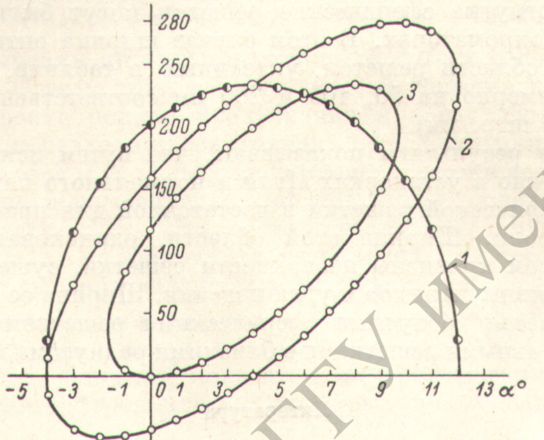

Рис. 6.

1 — кривая изменения ширины квазистигматической области $\Delta\lambda$ в схеме Игля от угла падения α, *2* — кривая длин волн на границе квазистигматической области, *3* — кривая длин волн, для которых астигматизм скомпенсирован полностью.

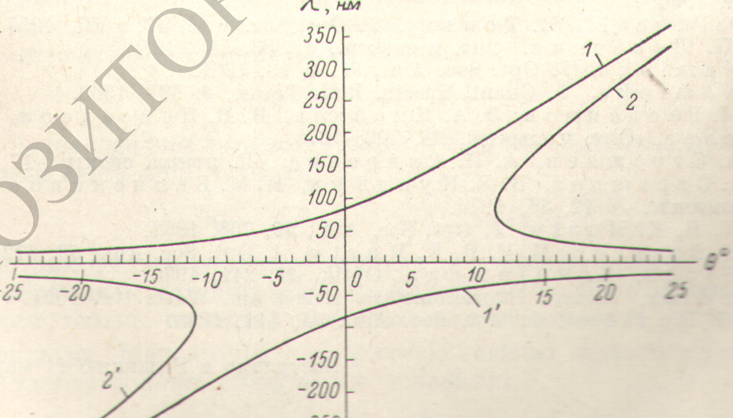

Рис. 7. Кривы изменения ширины квазистигматической области $\Delta\lambda$ в схеме нормального падения от угла Θ. При $\Theta_{\text{опт.}}=11°22'$ достигается наибольшая квазистигматическая область (см. таблицу).

1 и *1′* — кривые длин волн, для которых $\xi=+0.01$; *2* и *2′* — кривые длин волн, для которых $\xi=-0.01$.

матизма, как и в случае, описанном выше, определялись пределы угловой квазистигматической области, при которых $\xi=0.01$ и затем по (15) находилась сама область. Данные расчета представлены в виде кривых на рис. 6 и 7. Из рисунков следует, что при отступлении от оптимального значения угла α (рис. 6) и угла Θ (рис. 7) ширина квазистигматической области $\Delta\lambda$, определяемая разностью ординат кривых, существенно сужается, перемещаясь по спектру в длинноволновую ее часть. При определенных углах эта область приближается к нулю. Это говорит о том, что вогнутая решетка с непрямолинейными штрихами может быть достаточно эффективно использована только в тех схемах и областях, на которые она рассчитана. Для решеток 1200 штр./мм оптимальная квазистигматическая область лежит в основном в вакуумной ультрафиолетовой области спектра (см. таблицу); для решеток 600 штр./мм она занимает ультрафиолетовую и часть видимого участка спектра и у решеток 300 штр./мм она простирается от ультрафиолетовой до ближней ИК области спектра. Ширина этих областей пригодна для проведения спектрографических исследований. Расчет показал, что вогнутые сферические решетки могут быть также использованы и в монохроматорах. В этом случае ширина оптимальной квазистигматической области решеток, указанных в таблице, несколько увеличивается (примерно на 50, 100 и 200 нм соответственно для решеток 1200, 600 и 300 штр./мм).

Приведенные результаты показывают, что путем искривления штрихов решеток можно в установках Игля и нормального падения исправить астигматизм сферической решетки в достаточной для практических целей области длин волн. Ширина этой области, одинаковая для решеток с любым радиусом кривизны поверхности решетки, существенно зависит от радиуса кривизны штрихов и угла падения. Ширина ее больше области, которая достигается вогнутыми сферическими решетками с переменным шагом и тороидальными решетками с близкими радиусами кривизны [10, 11].

Литература

[1] A. Cornu, C. R. Acad. Sci., Paris, *80*, 645, 1875; *116*, 1215, 1421, 1893; *117*, 1032, 1893.
[2] I. Sakayanagi, Sci. Light, *16*, 129, 1967.
[3] Jobin Yvon. Diffraction Gratings. Accoueil France, 1969.
[4] H. Haber. J. Opt. Soc. Am., *40*, 153, 1950.
[5] W. E. Behring, J. M. Iackom, S. G. Miller. J. Opt. Soc. Am., *44*, 229, 1954.
[6] I. D. Purcell, R. Tousey. J. Opt. Soc. Am., *47*, 1057, 1957.
[7] Ю. П. Щепеткин. Опт. и спектр., *4*, 383, 513, 1958.
[8] T. Namioka. J. Opt. Soc. Am., *51*, 4, 13, 1961.
[9] T. Namioka. J. Quant. Spectr. Rad. Trans., *2*, 697, 1962.
[10] Ф. М. Герасимов, Э. А. Яковлев, И. В. Пейсахсон, Б. В. Кошелев. Опт. и спектр., *28*, 790, 1970.
[11] С. А. Стрежнев, А. И. Андреева. Ж. прикл. спектр., *17*, 156, 1972.
[12] С. А. Стрежнев, В. В. Куинджи, Н. М. Белясников. Опт.-мех. промышл., № 12, 46, 1974.
[13] M. V. R. K. Murty. J. Opt. Soc. Am., *52*, 768, 1962.
[14] G. H. Spencer, M. V. R. K. Murty. J. Opt. Soc. Am., *52*, 672, 1962.
[15] M. Singh, K. Majumdar. Optik, *31*, 241, 1970.
[16] Candler, Modern Interferometers. Hilger and Watts Itd, 1951.
[17] H. G. Beutler. J. Opt. Soc. Am., *35*, 311, 1945.

Поступило в Редакцию 11 марта 1974 г.