Максименко Н. В. [1], Кучин С. М. [2]
[1] Профессор, доктор физико – математических наук,
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель
[2] Аспирант, кафедра теоретической физики,
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

СТАТИЧЕСКАЯ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ МЕЗОНОВ В КВАРКОВОЙ МОДЕЛИ

1. Введение.

Вычисление электромагнитных характеристик связанных систем дает возможность исследовать взаимодействия между частицами составной системы. Электрическая поляризуемость является одной из таких характеристик. В нерелятивистской квантовой механике в моделях с кулоновским и осцилляторным потенциалами вычислены электрические поляризуемости, используя уравнение движения в однородном электрическом поле.[2,342;3,708].

Электромагнитные характеристики адронов с учетом их кварковой структуры могут быть определены на основе уравнения движения составной системы во внешнем электромагнитном поле.

Современные методы решения уравнений для связанных систем недостаточны для точных вычислений, но дают возможность получить волновую функцию основного состояния рассматриваемой системы. Приближенное решение сводится к нахождению поправок к волновой функции.

Нахождение поправок к волновым функциям методом Рэлея – Шредингера требует знания всех собственных функций невозмущенного уравнения. В случае потенциального взаимодействия, однако, можно предложить метод [1,149], в котором используются решения невозмущенного уравнения лишь при одном значении энергии. Результат для поправки к волновой функции произвольного дискретного состояния выражается в терминах невозмущенной волновой функции этого состояния и, в отличие от теории возмущений Рэлея – Шредингера, не требует знания всего спектра невозмущенной задачи.

В данной работе, мы, используя теорию возмущений Я.Б. Зельдовича, найдем поправку к волновой функции относительного движения связанной системы, находящейся во внешнем электрическом поле и вычислим поляризуемость π - мезона в рамках нерелятивистской кварковой модели для кулоновского потенциала взаимодействия между кварком и антикварком.

2. Теория возмущений Я.Б. Зельдовича.

Метод теории возмущений Я. Б. Зельдовича уже применялся для нахождения поправок к волновым функциям, когда возмущение является сферически – симметричным. Однако, если связанная система находится, например, во внешнем электрическом поле, то возмущение, в качестве которого рассматривается электрическое дипольное взаимодействие, зависит не только от r, но и от угла θ между радиус – вектором системы $\vec{r}$ и внешним полем $\vec{E}$. Разработаем метод, используя теорию возмущений Я. Б. Зельдовича, для нахождения поправки к волновой функции системы, когда возмущение зависит также и от угла. В этом случае уравнение Шредингера запишем в виде:

$$\left(\hat{H}_0 + \hat{V}\right)\psi_n = E_n\psi_n \tag{2.1}$$

Будем искать приближенное решение последнего уравнения в виде рядов:

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \ldots \tag{2.2}$$

$$\psi_n = \psi_n^{(0)} + \psi_n^{(1)} + \psi_n^{(2)} + \ldots \tag{2.3}$$

Подставляя (2.2) и (2.3) в (2.1) и ограничиваясь линейными по возмущению членами, в первом порядке теории возмущений получим:

$$\left(\hat{H}_0 - E_n^{(0)}\right)\psi_n^{(1)}(\vec{r}) + \hat{V}(\vec{r})\psi_n^{(0)}(r) = E_n^{(1)}\psi_n^{(0)}(r) \tag{2.4}$$

В выражении (2.4) и далее, обозначение $\vec{r}$ в потенциале возмущения или в волновой функции указывает зависимость от r и $\cos\theta$.

В этом случае, поправка первого порядка к энергии $E_n^{(1)} = 0$, тогда уравнение (2.4) можно записать в виде:

$$\left(\vec{\nabla}^2 - 2\mu U_0(r) + 2\mu E_n^{(0)}\right)\psi_n^{(1)}(\vec{r}) - 2\mu \hat{V}(\vec{r})\psi_n^{(0)}(r) = 0, \tag{2.5}$$

где $U_0(r) = 2\mu U_н(r) + \dfrac{l(l+1)}{r^2}$;

Так как $\psi_n^{(1)}(\vec{r}) \sim \hat{V}(\vec{r})$, то вводя обозначения $r\psi_n^{(1)}(r) = \chi_n^{(1)}(r)$; $r\psi_n^{(0)}(r) = \chi_n^{(0)}(r)$ и сокращая на $\cos\theta$, получим уравнение:

$$\frac{d^2}{dr^2}\chi_n^{(1)} - \left(2\mu U_0(r) + \frac{2}{r^2}\right)\chi_n^{(1)} + 2\mu E_n^{(0)}\chi_n^{(1)} - 2\mu \hat{V}(r)\chi_n^{(0)} = 0 \tag{2.6}$$

Из теории дифференциальных уравнений [5,170] известно, что общее решение неоднородного уравнения (2.6) находится как сумма общего решения соответствующего линейного однородного уравнения и какого – нибудь частного решения данного неоднородного уравнения. Также известно, что решение неоднородного уравнения (2.6) может быть выражено в терминах двух линейно независимых решений $\overline{\chi}_n(r)$ и $\overline{\varphi}_n(r)$ соответствующего однородного уравнения (2.4), где $\overline{\chi}_n(r)$ и $\overline{\varphi}_n(r)$ - фундаментальная система решений уравнения (2.4). Если известна фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения, то общее решение неоднородного уравнения может быть всегда найдено с помощью метода вариации произвольных постоянных.

Общее решение уравнения (2.6) будем искать в виде

$$\chi_{nl}^1(r) = C_1(r)\,\overline{\chi}_n(r) + C_2(r)\overline{\varphi}_n(r) \tag{2.7}$$

где $C_1(r)$ и $C_2(r)$ - пока неизвестные функции, которые определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} &C_1'(r)\overline{\chi}_n(r) + C_2'(r)\overline{\varphi}_n(r) = 0 \\ &C_1'(r)\overline{\chi}_n'(r) + C_2'(r)\overline{\varphi}_n'(r) = 2\mu V(r)\chi_n^0(r) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Относительно $C_1'(r)$, $C_2'(r)$ система (2.10) является системой двух линейных неоднородных алгебраических уравнений, причем главный определитель этой системы

$$\Delta = W[\overline{\chi}_n(r), \overline{\varphi}_n(r)] \neq 0 \tag{2.9}$$

Поэтому система (2.8) имеет единственное решение, которое мы найдем методом Крамера, в итоге получим:

$$\begin{aligned} C_1'(r) &= -\frac{2\mu V(r)\chi_n^0(r)\overline{\varphi}_n(r)}{W(r)} \\ C_2'(r) &= \frac{2\mu V(r)\chi_n^0(r)\overline{\chi}_n(r)}{W(r)} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Откуда

$$\begin{aligned} C_1(r) &= -\int \frac{2\mu V(r)\chi_n^0(r)\overline{\varphi}_n(r)}{W(r)}dr + C_3 \\ C_2(r) &= \int \frac{2\mu V(r)\chi_n^0(r)\overline{\chi}_n(r)}{W(r)}dr + C_4 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Следовательно, учитывая также, что вронскиан не зависит от r, решение неоднородного уравнения (2.6) представим в виде:

$$\begin{aligned} \chi_{nl}^1(r) &= C_1\overline{\chi}_n(r) + C_2\overline{\varphi}_n(r) - \\ &- \frac{\overline{\chi}_n(r)}{W}\int \frac{2\mu V(r)\chi_n^0(r)\overline{\varphi}_n(r)}{W(r)}dr + \frac{\overline{\varphi}_n(r)}{W}\int \frac{2\mu V(r)\chi_n^0(r)\overline{\chi}_n(r)}{W(r)}dr \end{aligned} \tag{2.12}$$

Линейно независимое с $\chi_{nl}^0(r)$ решение $\varphi_{nl}^0(r)$ найдем по формуле Абеля, получим:

$$\overline{\varphi}_n(r) = W\overline{\chi}_n(r)\int \frac{1}{(\overline{\chi}_n(r))^2}dr \tag{2.13}$$

Подставляя данное выражение в (2.12), получим:

$$\begin{aligned} \chi_{nl}^1(r) &= C_1\overline{\chi}_n(r) + C_2\overline{\varphi}_n(r) - \overline{\chi}_n\int 2\mu V(r)\chi_n^0(r)\overline{\chi}_n(r)dr\int \frac{1}{(\overline{\chi}_n(r))^2}dr + \\ &+ \overline{\chi}_n(r)\int \frac{1}{(\overline{\chi}_n(r))^2}dr\int 2\mu V(r)\chi_n^0(r)\overline{\chi}_n(r)dr \end{aligned} \tag{2.14}$$

C_1 и C_2 - произвольные постоянные, а вронскиан, без ограничения общности, положен равным единице.

Таким образом, мы видим, что последние два слагаемых в (2.14) представляют частное решение неоднородного уравнения (2.6), а первые два слагаемых – общее решение соответствующего однородного уравнения.

Рассмотрим уравнение (2.6). Запишем соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{d^2}{dr^2}\chi_{nl}^{(1)} - \left(2\mu U_0(r) + \frac{2}{r^2}\right)\chi_{nl}^{(1)} + 2\mu E_{nl}^{(0)}\chi_{nl}^{(1)} = 0 \qquad (2.15)$$

Объединяя в уравнении (2.15) члены вида $\frac{1}{r^2}$ и обозначая $l(l+1)+2 = s(s+1)$, можем переписать его в виде:

$$\frac{d^2}{dr^2}\chi_{ns}^{(1)} - \left(2\mu U_0(r) + \frac{s(s+1)}{r^2}\right)\chi_{ns}^{(1)} + 2\mu E_{ns}^{(0)}\chi_{ns}^{(1)} = 0 \qquad (2.16)$$

Уравнение (2.16) совпадает с уравнением для невозмущенной задачи при замене l на s, где

$$s = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + 2} \qquad (2.17)$$

3. Определение поляризуемости заряженных π - мезонов.

Применим рассмотренный выше метод для нахождения поправки к волновой функции связанной системы, находящейся во внешнем электрическом поле.

Волновая функция основного состояния имеет вид:

$$\psi_0(r) = \left(\frac{\alpha^3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(-\alpha\cdot r), \alpha^2 = \frac{3}{4 < r^2 >} \qquad (3.1)$$

где $< r^2 >$ - среднеквадратичный радиус мезона.

Для рассматриваемого случая, собственные функции в уравнении (2.15) имеют вид:

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = e^{-\gamma\rho}\rho^s\sum_{p=0}^{k} a_p\rho^p P_{lm}(\cos\theta)e^{im\varphi} \qquad (3.2)$$

где $\gamma = \frac{1}{k+s+1}; \rho = \alpha\cdot r$

При $l=0$, учитывая, что $r\psi_n^{(0)}=\chi_n^{(0)};V(r)=-\frac{1}{2}\vec{E}(\hat{e}_1-\hat{e}_2)r$ и не учитывая нормировочных множителей, из (3.2) находим, что

$$\chi_n(r)=\frac{\exp(\alpha\cdot r)}{r};\chi_n^0(r)=r\exp(-\alpha\cdot r) \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (2.14), находим:

$$\begin{aligned}\chi_{nl}^1 &= -C_1\frac{1+2\alpha\cdot r+2\alpha\cdot r^2}{4\alpha^3 r}\exp(-\alpha\cdot r)+C_2\frac{\exp(\alpha\cdot r)}{r}+\\ &+\mu\vec{E}(\hat{e}_1-\hat{e}_2)\frac{\exp(-\alpha\cdot r)}{8\alpha^5 r}\left(6\alpha^2r^2+4\alpha^3r^3+2\alpha^4r^4+6\alpha\cdot r+3\right)\end{aligned} \tag{3.4}$$

Учитывая нормировочный множитель и условие ограниченности волновой функции, окончательно получаем:

$$\psi_n^{(1)}=\left(\frac{\mu\vec{E}(\hat{e}_1-\hat{e}_2)r^2\cos\theta}{4\alpha}+\frac{\mu\vec{E}(\hat{e}_1-\hat{e}_2)r\cos\theta}{2\alpha^2}\right)\psi_n^{(0)} \tag{3.5}$$

Поправка к волновой функции, найденная данным методом, совпадает с поправкой к волновой функции, найденной в работе [7,62].

Отметим, что при нахождении поправки к волновой функции использовалось значение $s=-2$, так как значение $s=1$ приводит к волновым функциям, не удовлетворяющим условиям ограниченности.

Статическую поляризуемость определим из следующего выражения:

$$-\frac{\alpha_0\vec{E}^2}{2}=-\int\psi_0^*\vec{D}\vec{E}\psi^{(1)}\cdot d\vec{r} \tag{3.6}$$

$$\vec{D}\vec{E}=\frac{1}{2}(\hat{e}_1-\hat{e}_2)(\vec{r}\vec{E}) \tag{3.7}$$

- электрическое дипольное взаимодействие системы с внешним полем E. В этой формуле $\hat{e}_i$ - операторы заряда кварков, действующие на зависящую от унитарного спина часть волновой функции, которые для $\pi^{\pm}$ - мезонов имеют вид[4,63]:

$$\Psi^{\pi^+}(\xi)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[\left|\bar{d}\uparrow u\downarrow\right\rangle-\left|\bar{d}\downarrow u\uparrow\right\rangle\right] \tag{3.8}$$

$$\boxed{\Psi^{\pi^-}(\xi)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[\left|\bar{u}\uparrow d\downarrow\right\rangle-\left|\bar{u}\downarrow d\uparrow\right\rangle\right]} \tag{3.9}$$

где $\bar{u}, \bar{d}$ - антикварки.

Умножая теперь найденную пространственную часть волновой функции (3.5) на часть, относящуюся к обычному и унитарному спину мезона (3.8 – 3.9), подставляем ее в (3.6) и после интегрирования находим вклады в поляризуемости $\pi^{\pm}$ - мезонов:

$$\alpha_0^{\pi^{\pm}} = \frac{me^2 < r_{\pi^{\pm}}^{2} >^2}{9\hbar^2} \qquad (3.10)$$

Окончательные результаты расчетов электрических поляризуемостей $\pi^{\pm}$ - мезонов приведены в следующей таблице [6]:

R,10^{-13} *см*	Эксперименты	$\alpha_0(\pi^{\pm})$,10^{-4} *фм*^{3}
0,663± 0,006	Amendolia 1986 $\pi \cdot e \to \pi \cdot e$	1,976 ± 0,145
0,663± 0,023	Dally 1982 $\pi \cdot e \to \pi \cdot e$	1,997 ± 0,348
0,711± 0,009± 0,016	Bebek 1978 $eN \to e\pi \cdot N$	2,642 ± 0,466
0,678± 0,004± 0,008	Quenzer 1978 $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$	2,167 ± 0,234
0,740± 0,031	Liesenfeld 1999 $ep \to e\pi^+ n$	3,113 ± 0,630
0,65± 0,05± 0,06	Eschrich 2001 $\pi \cdot e \to \pi \cdot e$	2,185 ± 1,349
0,672± 0,008	Среднее значение	2,087 ± 0,177

Заключение.

Таким образом, вышеизложенная методика позволяет находить поправки к волновым функциям связанных систем, находящихся во внешнем электрическом поле, что, в свою очередь, позволяет численно рассчитывать электромагнитные характеристики мезонов, таких, например, как электрическая поляризуемость. Результат для поправки к волновой функции дискретного состояния выражается в терминах невозмущенной волновой функции этого состояния и, в отличие от теории возмущений Рэлея – Шредингера, не требует знания всего спектра невозмущенной задачи. Полученные в данной работе численные значения электрической поляризуемости находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными [8,1350;9,137]. Однако, как в теоретических предсказаниях, так и в экспериментальных данных имеется относительно большой разброс на данную величину. Это подтверждает необходимость экспериментального определения поляризуемости с большей точностью.

Литература:

1. А.И. Базь, Я.Б. Зельдович, А.М. Переломов. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. – М: Наука, 1971. 544

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). – М: Физматгиз, 1989, с. 702.

3. Петрунькин В.А. Электрическая и магнитная поляризуемости адронов. ЭЧАЯ, том 12, вып. 3, 1981, с. 692-753.

4. Я. Коккедэ. Теория кварков. – М: Мир, 1971. – 341.

5. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. – М.: Высш. шк., 1989. – 383 с.

6. http://pdg.lbl.gov

7. Кучин С.М., Вакулина Е.В. Оценка вклада валентных кварков в электрическую поляризуемость мезонов в нерелятивистской кварковой модели. Труды и материалы XII международной научно – методической конференции «Актуальные проблемы науки и образования», Брянск, 2009. с. 62 – 73.

8. Mark II Collaboration: Boyer, J. and [et al.]. Two photon production of pion pairs / Mark II Collaboration: Boyer, J. and [et al.] // Phys. Rev. – 1990. – V. D42. – P. 1350 – 1367.

9. Donoghue, J. F. Photon – photon scattering, pion polarizability and chiral symmetry / J. F. Donoghue, B. R. Holstein // Phys. Rev. – 1993. – V. D48. – P. 137 – 146.