УДК 535.36

# ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА. III

*Д. К. Беридзе*

Исследованы закономерности многократного рассеяния света в бесконечно длинном цилиндре с помощью уравнения диффузии.

1. В работах [1, 2] были исследованы закономерности многократного рассеяния света в бесконечно длинном цилиндре. Опыт показывает [1, 2], что, если на основание цилиндра нормально падают параллельные лучи, то начиная с некоторой глубины цилиндра устанавливается глубинный режим светового поля. Интенсивность кратно рассеянного света ($\Theta = 90°$) ослабляется с глубиной экспоненциально и не зависит от азимута электрического вектора падающего света. Показатель ослабления кратно рассеянного света зависит от показателей рассеяния и поглощения мутной среды и от диаметра цилиндра [1, 2].

Для теоретического анализа этой проблемы необходимо решить уравнение переноса излучения в бесконечном цилиндре. Решение этой задачи в удобном для спектроаналитических целей виде пока еще не получено.

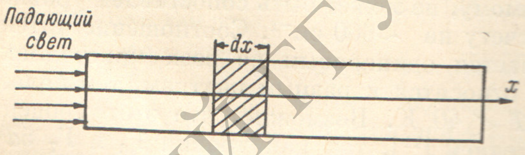


Рис. 1. Схема освещения мутной среды.

Для описания закономерностей многократного рассеяния в бесконечном цилиндре нами используется уравнение диффузии. Тем самым считается, что фотоны имеют возможность диффундировать среди частиц мутной среды так же, как атомы и молекулы в газе. Уравнение диффузии уже применялось в работах [3–6] для исследования многократного рассеяния в мутных средах, однако расчеты были выполнены для полубесконечной среды и плоского слоя.

2. Предположим, что объем, занимаемый мутной средой, имеет цилиндрическую форму, причем ось цилиндра расположена вдоль оси $x$. Примем, что площадь основания цилиндра мала, а длина его вдоль оси $x$ неограниченно велика. Пусть на основание цилиндра ($x = 0$) падает параллельный пучок света (рис. 1). Допустим, что цилиндр погружен в иммерсию, т. е. рассеянный свет полностью уходит за пределы рассеивающей среды. Если радиус цилиндра $r \to \infty$, тогда мутная среда занимает полупространство $x > 0$. Из самых общих физических соображений, подтверждаемых строгим математическим анализом [7], следует, что для света, рассеянного такой средой на достаточно большой оптической глубине $t' = (\sigma + \alpha)\, x'$, средняя кратность рассеяния становится очень большой и устанавливается световой режим, характер которого зависит не от граничных условий, а от свойств самой среды [8, 9]. В частности, устанавливаются некоторые стационарные формы тел, характеризующих угловую зависимость стоксовских параметров $S_i$ (в том числе яркость $S_1$), и убывание яркости $S_1$ происходит по экспоненциальному закону с по-

казателем ослабления $h'_\infty$. В случае слабого удельного поглощения ($\beta = \alpha/\sigma \ll 1$)

$$h'_\infty = \sqrt{\frac{\alpha(\alpha+\sigma)}{q}}, \tag{1}$$

где $q$ — постоянная, зависящая от вида индикатрисы рассеяния элементарного объема.

Можно полагать, что в бесконечно длинном цилиндре также устанавливается глубинный режим светового поля, но в отличие от полубесконечной среды, где затухание света происходит только путем истинного поглощения ($\alpha \neq 0$), в случае бесконечно длинного цилиндра свет затухает также вследствие ухода рассеянных фотонов из среды. Поэтому в данном случае убывание яркости вдоль оси $x$ происходит также при отсутствии поглощения ($\alpha = 0$). Мысленно разделим весь цилиндр (рис. 1) на одинаковые элементарные объемы $dV = Sdx$, где $S$ — площадь поперечного сечения цилиндра, $dx$ — толщина. На каждый элементарный объем $dV$ падает нерассеянный свет, идущий прямо от источника, и свет, обусловленный многократным рассеянием. Рассеянный свет от данного элементарного объема по телесным углам $\omega$ можно охарактеризовать функцией распределения яркости $f(\omega)$. Выясним некоторые свойства функции $f(\omega)$. Каждый элементарный объем излучает свет в пределах передней и задней полусферы. В первом элементе объема ($x = 0$) свет, рассеянный в заднее полупространство, безвозвратно уходит из цилиндра. Напротив, излучение данного элемента в переднее полупространство усиливается излучением второго, третьего и т. д. элементов, поскольку соответствующие количества света от этих элементов могут достигать первого слоя. Отсюда видно, что вблизи переднего края цилиндра функция $f(\omega)$ зависит от $x$ благодаря более сильному излучению в переднюю полусферу. Вдали от переднего края цилиндра при $x > x'$ функция $f(\omega)$ не зависит от $x$ и при $x > x'$ в цилиндре устанавливается стационарное распределение (в пространстве) светового поля.

От переднего края цилиндра $x = 0$ до глубины $x = x'$ существует положительный градиент концентрации рассеянных фотонов (числа рассеянных фотонов в единице объема — $n$) $\partial n/\partial x > 0$ вследствие нарастания многократного рассеяния. Но при $x > x'$ интенсивность многократного рассеяния убывает с увеличением $x$, поэтому градиент концентрации фотонов $\partial n/\partial x < 0$. Для $x = x'$ производная $\partial n/\partial x = 0$.

В соответствии со свойствами симметрии системы (рис. 1) можно считать, что в случае, когда пучок падающего света имеет в сечении окружность, центр которой лежит на оси $x$, функция $n = n(x, y, z)$ симметрична по отношению к $y$ и $z$ и в точках $y = 0$, $z = 0$ проходит через максимум. В случае глубинного режима светового поля ($x > x'$) вид зависимости $n$ от $y$ и $z$ не будет изменяться с увеличением $x$. Следовательно, при $x > x'$ для описания процесса многократного рассеяния света в бесконечном цилиндре можно ограничиться рассмотрением одномерной задачи.

**3.** Составим уравнение непрерывности для рассматриваемой задачи. Обозначим концентрацию фотонов в элементе объема $dV = Sdx$ в момент времени $t$ через $n(x, t)$. Тогда изменение числа фотонов в элементе объема $dV$ за время $dt$ будет равно $(\partial n/\partial t)dtSdx$.

Изменение числа фотонов в элементе объема вызывается следующими процессами: диффузией рассеянных фотонов, если есть градиент их концентрации; уходом фотонов через боковую поверхность цилиндра; истинным поглощением фотонов и образованием фотонов вследствие рассеяния прямого света. Рассмотрим каждый из этих факторов в отдельности.

Наличие градиента концентрации в направлении $x$ приводит к тому, что поток фотонов $J_n(x)$, входящий в элемент объема с толщиной $dx$, не равен потоку $J_n(x + dx)$, выходящему из элемента. Изменение числа фотонов в элементе объема $dV$ за время $dt$, вызванное различием этих потоков, равно $(\partial J_n/\partial x)\, Sdxdt$.

В рассматриваемом случае из рассеивающей среды безвозвратно уходит $n'Sdxdt$ фотонов, а $n''Sdxdt$ фотонов уничтожится вследствие собственного поглощения. Здесь $n'$ — число фотонов, ежесекундно выходящих через боковую поверхность, отнесенное к единице объема, $n''$ — число фотонов, поглощенных в единице объема за единицу времени.

За время $dt$ в элементе объема $dv$ прямой свет образует $N_1Sdxdt$ фотонов, где $N_1$ — число фотонов, рассеянных (однократным рассеянием) по всем направлениям.

Из уравнения баланса числа фотонов в элементе объема $dV$ получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial J_n}{\partial x} - n' - n'' + N_1. \tag{2}$$

В стационарном режиме $\partial n/\partial t = 0$ и из формулы (2) имеем

$$\frac{\partial J_n}{\partial x} + n' + n'' - N_1 = 0. \tag{3}$$

Поток, обусловленный диффузией фотонов, пропорционален градиенту их концентрации [3]

$$J_n = -D\frac{\partial n}{\partial x}, \tag{4}$$

где $D$ — эффективный коэффициент диффузии. Число фотонов, выходящих из элемента объема $dV$ через боковую поверхность, тем больше, чем больше поток фотонов, входящих в него. Поэтому можно принять, что

$$n' = hJ_n, \tag{5}$$

где коэффициент пропорциональности $h$ зависит от оптического диаметра цилиндра. Более подробно смысл величины $h$ будет выяснен в дальнейшем. Число фотонов, поглощенных в единице объема за единицу времени, равно

$$n'' = \frac{1}{t_0} n, \tag{6}$$

где $t_0$ — среднее время жизни фотона; $t_0 = 1/\alpha v$, здесь $v$ — скорость света. Окончательно

$$n'' = \alpha v n. \tag{7}$$

Согласно определению показателя рассеяния,

$$N_1 = N\sigma, \tag{8}$$

где $N$ — число фотонов прямого света, падающих на единицу площади в единицу времени на переднее основание элемента объема $dV$. Если число фотонов $N$ при $x=0$ есть $N_0$, тогда по закону Бугера

$$N = N_0 e^{-(\sigma+\alpha)x}. \tag{9}$$

Из формул (9) и (8) имеем

$$N_1 = N_0 \sigma e^{-(\sigma+\alpha)x}. \tag{10}$$

Подставляя величины $J_n$, $n'$, $n''$ и $N_1$ из формул (4), (6), (7) и (10) в уравнение (3), получим

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + h\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\alpha v}{D} n + \frac{N_0}{D}\sigma e^{-(\sigma+\alpha)x} = 0. \tag{11}$$

Если предположить удельное поглощение $\beta = \alpha/\sigma$ малым, то последний член в уравнении (11) убывает при возрастании $x$ быстрее, чем остальные члены. Всегда можно подобрать оптический диаметр цилиндра так, что начиная от некоторого значения $x$ можно отбросить последний член в уравнении (11) как величину малости второго порядка. Тогда имеем

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + h\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\alpha v}{D} n = 0. \tag{12}$$

Граничными условиями для этого уравнения являются следующие:

$$\left.\begin{array}{ll} n = n(x_0) & \text{при } x = x_0, \\ n = 0 & \text{при } x \to \infty. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Решением уравнения (12) при граничных условиях (13) является

$$n = n_0 e^{-h'(x-x_0)}, \tag{14}$$

где $h'$ — показатель ослабления концентрации диффузных фотонов вдоль оси цилиндра. Если подставить $n(x)$ из (14) в (4), тогда получим поток фотонов, пересекающий единицу площади

$$J_n = J_0 e^{-h'(x-x_0)}, \tag{15}$$

где $J_0 = h' n_0 D$. Формулы (14) и (15) выражают закон убывания концентрации и потока фотонов вдоль оси $x$ при установившемся режиме светового поля.

В работах [1, 2] фототок, регистрируемый приемником, пропорционален $n' = hJ_n$. Таким образом, формула (15) находится в согласии с опытом [1, 2].

Определим $\partial^2 n/\partial x^2$ и $\partial n/\partial x$ с помощью формулы (14), а затем подставим в уравнение (12). Тогда получим

$$h'^2 - hh' - \frac{\alpha v}{D} = 0, \tag{16}$$

откуда

$$h' = \frac{1}{2} h \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4}{h^2} \frac{\alpha v}{D}}\right]. \tag{17}$$

Из двух корней уравнения (16) второй корень $h' < 0$, поэтому он не имеет физического смысла.

Для выяснения физического смысла величины $h'$ рассмотрим формулу (12) в двух частных случаях: а) радиус цилиндра $r \to \infty$, $\alpha \neq 0$ и б) $\alpha = 0$, $r$ имеет конечную величину.

При $r \to \infty$ бесконечно длинный цилиндр (рис. 1) занимает полупространство. Для полупространства утечка фотонов из среды через боковую поверхность не происходит, и в формуле (5) величина $h = 0$. В данном случае из формулы (12) получим уравнение диффузии для полубесконечной среды [3, 4]

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - h'^2_\infty n = 0. \tag{18}$$

Согласно формуле (17), при $h = 0$ имеем

$$h'_\infty = \sqrt{\frac{\alpha v}{D}}. \tag{19}$$

Величину $l_\infty = 1/h'_\infty$ называют диффузионной длиной фотонов [3, 5]. Это среднее расстояние, на которое диффундирует фотон за период своей жизни. Из формулы (19) $l_\infty = \sqrt{D/\alpha v}$. Для неизотропного расстояния эффективный коэффициент диффузии запишем в таком виде:

$$D = \frac{1}{3p} \frac{v}{\sigma + \alpha}, \tag{20}$$

где параметр $p$ имеет постоянное значение и зависит от индикатрисы рассеяния элементарного объема; для изотропного рассеяния $p = 1$.

Подставив значение $D$ из (20) в формулу (19), получим

$$h'_\infty = \sqrt{3p\alpha(\alpha + \sigma)}. \tag{21}$$

Соотношение (21) совпадает с формулой (1), если допустить, что $q = 1/3p$.

Рассмотрим теперь решение уравнения (12) для чистого рассеяния ($\alpha = 0$). При $\alpha = 0$ $h' = h$. Таким образом, $h$ есть показатель ослабления потока фотонов для чистого рассеяния. В данном случае диффузионная длина $l = 1/h$ тем больше, чем больше радиус цилиндра $r$. Если для заданного значения $\sigma$ радиус цилиндра увеличивается на величину $dr$, тогда увеличение диффузионной длины равно

$$dl = \varkappa dr, \tag{22}$$

где $\varkappa$ — коэффициент пропорциональности. Интегрируя (22), получим

$$l = l_0 + \varkappa r, \tag{23}$$

где $l_0$ — значение диффузионной длины при $r \to 0$. При уменьшении $r$ кратность рассеяния уменьшается и при $r \to 0$ диффузный свет обусловлен однократным рассеянием. Поэтому, согласно формуле (5), $h_0 = (n'/J_n)_{r \to 0} = \sigma$, $(l_0 = 1/\sigma)$. Подставив значения $l = 1/h$ и $l_0 = 1/\sigma$ в формулу (23), получим

$$h = \frac{\sigma}{1 + \varkappa \sigma r}. \tag{24}$$


Рис. 2. Соотношение между приращениями диффузионной длины $l = 1/h$ и средней пути фотонов $L$ при увеличении радиуса цилиндра на величину $dr$.

Формула (24) находится в согласии с опытом [1]. Для латексов полистирола параметр $\varkappa$ не зависит от концентрации и размеров частиц полистирола, а также от длины волны рассеянного света $(\varkappa = 0.40 \pm 0.02)$ [1].

На рис. 2 показано соотношение между приращениями диффузионной длины $l = 1/h$ и среднего зигзагообразного пути фотонов $L$ при увеличении радиуса цилиндра на величину $dr$. Используя соотношение (22), из рис. 2 находим

$$\cos \varphi = \frac{dl}{dL} = \frac{\varkappa}{\sqrt{1 + \varkappa^2}}.$$

Откуда для латекса полистирола $(\beta \ll 1, \quad \varkappa = 0.40 \pm 0.02)$ получим $\cos \varphi = 0.37 \pm 0.02$. Таким образом, $\cos \varphi \simeq 1/3$. Наконец, рассмотрим случай, когда в формуле (17) $4\alpha v/h^2 D < 1$. Тогда

$$\left[1 + \frac{4}{h^2}\frac{\alpha v}{D}\right]^{1/2} \simeq 1 + 2\frac{h'^2_\infty}{h^2} = 1 + 6p\frac{\alpha(\alpha + \sigma)}{h^2}.$$

И из формулы (17) получим более простое соотношение

$$h' = h + 3p\frac{\alpha(\alpha + \sigma)}{h}. \tag{25}$$

Выражение (25) совпадает с экспериментально найденной формулой для $h'$ при условии, что $\alpha/\sigma \ll 1$ [2]. Таким образом, применение уравнения диффузии позволяет удовлетворительно описывать экспериментальные данные, приведенные в работах [1, 2].

Автор благодарен Г. В. Розенбергу за ценные указания и обсуждение результатов.

## Литература


[1] Д. К. Беридзе, Г. Р. Джобава. Опт. и спектр., *28*, 504, 1970.
[2] Д. К. Беридзе, Г. Р. Джобава. Опт. и спектр., *31*, 788, 1971.
[3] Л. Кертис. Введение в нейтронную физику, 324. Атомиздат, М., 1965.
[4] Ф. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, 177. ИЛ, М., 1958.
[5] С. С. Цянь. Физическая механика, 452. Изд. «Мир», М., 1965.
[6] Н. М. Бажин, С. М. Баранов. Опт. и спектр., *34*, 963, 1973.
[7] М. А. Масленников. ДАН СССР, *118*, № 2, № 5, 1957; *120*, № 4, 1958.
[8] Г. В. Розенберг. Усп. физ. наук, *60*, 57, 1959.
[9] Г. В. Розенберг. Сб. «Спектроскопия светорассеивающих сред», Минск, 1963.


Поступило в Редакцию 3 июля 1974 г.