С. Ф. Каморников, Перестановочность подгрупп и **F**-субнормальность, *Сиб. матем. журн.*, 1996, том 37, номер 5, 1065–1080

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 1996. Том 37, № 5

УДК 512.542

ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ ПОДГРУПП И $\mathfrak{F}$-СУБНОРМАЛЬНОСТЬ*)

С. Ф. Каморников

Введение

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация конечных групп. Подгруппу H группы G назовем *$\mathfrak{F}$-субнормальной* в смысле Кегеля или *$\mathfrak{F}$-достижимой* (ср. с определением $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы [1, 2]), если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ либо H_i нормальна в H_{i-1}, либо $H_{i-1}^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Отображение $r_{\mathfrak{F}} : G \to G^{\mathfrak{F}}$, сопоставляющее каждой конечной группе G ее $\mathfrak{F}$-корадикал, назовем оператором Виландта — Кегеля или *WK-оператором*, если

$$\langle H, K\rangle^{\mathfrak{F}} = \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$$

для любых двух $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп группы G. Будем говорить также, что *формация* $\mathfrak{F}$ в этом случае *индуцирует WK-оператор*.

В [3] автор показал, что отображение $r_{\mathfrak{F}}$ является WK-оператором, если $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация, замкнутая относительно расширений (т. е. $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^2$). Отвечая на вопрос Кегеля из [1], он установил [3], что для таких формаций в произвольной конечной группе G $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа $H = H' = H^{\mathfrak{F}}$ перестановочна с любой другой $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппой группы G. В частности, отсюда следует в дополнение к известной теореме Виландта из [4], что в любой конечной группе каждая перфектная (т. е. совпадающая со своим коммутантом) субнормальная подгруппа перестановочна не только с любой субнормальной, но также и с любой $\mathfrak{S}$-достижимой ($\mathfrak{S}$ — формация всех разрешимых конечных групп) подгруппой этой группы.

В настоящей работе изучаются общие свойства формаций, индуцирующих WK-оператор, строятся новые примеры таких формаций и описываются все разрешимые формации с указанным свойством. Полученные результаты применяются при исследовании вопроса перестановочности $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп. В частности, для формации $\mathfrak{F}$, индуцирующей WK-оператор, доказываются критерии перестановочности таких подгрупп. В этих критериях вопрос перестановочности $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп H и K конечной группы G редуцируется к вопросу перестановочности образов этих подгрупп при некоторых гомоморфизмах группы $\langle H, K\rangle$ в $\mathfrak{F}$-группу. Аналогичный подход при изучении перестановочности субнормальных подгрупп мы наблюдаем у Брюстера [5] и Виландта [6, 7].

*) Работа частично поддержана Международной соросовской программой образования в области точных наук.

§ 1. Определения, обозначения и предварительные сведения

В работе рассматриваются только конечные группы. Используемые определения и обозначения можно найти в [2]. Напомним некоторые из них.

Если G — группа и $\mathfrak{F}$ — непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Будем говорить, что множество всех $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп группы G *образует решетку*, если подгруппы $\langle H, K\rangle$ и $H \cap K$ $\mathfrak{F}$-достижимы для любых $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп H и K группы G. Формацию $\mathfrak{F}$, обладающую тем свойством, что в любой группе все $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы образуют решетку, будем называть в дальнейшем *формацией с решеточным свойством* для $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп. Полное описание наследственных локальных формаций $\mathfrak{F}$, обладающих решеточным свойством для $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп, дает следующая теорема, к которой мы будем неоднократно обращаться.

Теорема 1.1 [8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная локальная формация. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством для $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп, когда она удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{H}$, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$;

2) $\mathfrak{H} = \times_{i\in I}\mathfrak{S}_{\pi_i}$, *где* $\pi_l \cap \pi_k = \varnothing$ *для любых* $k \neq l$ *из* I;

3) $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$ *— наследственная локальная формация, являющаяся радикальным классом, нормальным в* $\mathfrak{M}^2$;

4) *всякая нециклическая минимальная не $\mathfrak{M}$-группа G с $\Phi(G) = 1$ является монолитической с неабелевым монолитом $N = G^{\mathfrak{M}}$, причем G/N — циклическая примарная группа.*

Класс $\mathfrak{F}$ называется *радикальным* классом или *классом Фиттинга*, если он нормально наследствен и из $G = AB$, где A и B — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F} \neq \varnothing$, то через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-радикал группы G, т. е. произведение всех тех нормальных подгрупп из G, которые принадлежат $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой радикальный класс. Подгруппа V группы G называется $\mathfrak{F}$-*инъектором в* G, если для любой субнормальной подгруппы N группы G пересечение $V \cap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в N. Непустой радикальный класс $\mathfrak{F}$ является *нормальным* в классе групп $\mathfrak{X}$ ($\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$), если любая $\mathfrak{X}$-группа обладает нормальным $\mathfrak{F}$-инъектором.

Группа $G \neq 1$ называется *монолитической*, если в ней имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа (монолит).

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Если $\mathfrak{F}$ — класс всех групп, то $\mathfrak{F}_{\pi}$ — класс всех π-групп из $\mathfrak{F}$. В частности, $\mathfrak{S}_{\pi}$ — класс всех разрешимых π-групп.

Нам понадобится далее следующая конструкция классов групп. Пусть I — некоторое подмножество множества натуральных чисел. Пусть $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ — некоторое семейство классов групп. Обозначим через $\times_{i\in I}\mathfrak{X}_i$ класс всех групп G, представимых в виде

$$G = G_{i_1} \times G_{i_2} \times \dots \times G_{i_t},$$

где $i_k \in I$, $G_{i_k} \in \mathfrak{X}_{i_k}$, $k = 1, \dots, t$. Простая проверка показывает, что $\times_{i\in I}\mathfrak{X}_i$ — радикальная локальная формация, если для всех $i \in I$ класс $\mathfrak{X}_i$ является радикальной локальной формацией и $\pi(\mathfrak{X}_i) \cap \pi(\mathfrak{X}_j) = \varnothing$ для всех $i \neq j$ из I.

Лемма 1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H — подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа G;

2) если H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, K — подгруппа из G, то $H \cap K$ — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы K;

3) если H_1 и H_2 — $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы G, то и $H_1 \cap H_2$ — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа G.

Лемма 1.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Если H, N и K — подгруппы группы G, причем N нормальна в G, то справедливы следующие утверждения:*

1) если H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа G, то HN — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа G;

2) если $N \subseteq H$, то H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа G тогда и только тогда, когда H/N — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G/N.

Лемма 1.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Если H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то $H^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа G.*

Доказательство лемм 1.1–1.3 см. в работе [8].

Наряду с понятием $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы мы будем использовать и понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы. Напомним, что для непустой формации $\mathfrak{F}$ подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{F}$-субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $G = K_0 \supset K_1 \supset \dots \supset K_n = H$ такая, что $K_{j-1}^{\mathfrak{F}} \subseteq K_j$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$. Очевидно, каждая $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$-достижимой.

§ 2. Формации, индуцирующие WK-оператор

В этом параграфе исследуются общие свойства формации $\mathfrak{F}$, индуцирующей WK-оператор. В частности, показывается, что такая формация является наследственным классом Фиттинга и обладает решеточным свойством для $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп. Ввиду теоремы 1.1 это позволяет резко ограничить поиск локальных формаций с указанным свойством. Более того, применение известной теоремы Брайса и Косси [9] о локальности разрешимой наследственной радикальной формации приводит к полному описанию разрешимых формаций, индуцирующих WK-оператор.

Лемма 2.1. *Если непустая формация $\mathfrak{F}$ индуцирует WK-оператор, то она наследственна.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{F}^S$ класс всех тех групп, у которых каждая подгруппа принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^S$ — непустое множество. Выберем в $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^S$ группу G наименьшего порядка. Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Так как $G^{\mathfrak{F}} = 1$, то M — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа G. Так как формация $\mathfrak{F}$ индуцирует WK-оператор, то

$$M^{\mathfrak{F}} = \langle M^{\mathfrak{F}}, 1\rangle = \langle M^{\mathfrak{F}}, G^{\mathfrak{F}}\rangle = \langle M, G\rangle^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}} = 1,$$

т. е. $M \in \mathfrak{F}$. Так как $|M| < |G|$, то $M \in \mathfrak{F}^s$. Итак, все максимальные подгруппы группы G принадлежат классу $\mathfrak{F}^S$. Но тогда $G \in \mathfrak{F}^S$. Получили противоречие с выбором группы G. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если непустая формация $\mathfrak{F}$ индуцирует WK-оператор, то $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.*

Доказательство. Ввиду леммы 2.1 $\mathfrak{F}$ наследственна, а потому и нормально наследственна.

Пусть N_1, N_2 — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G. Тогда подгруппы N_1 и N_2 $\mathfrak{F}$-достижимы. Так как формация $\mathfrak{F}$ индуцирует WK-оператор, то

$$(N_1N_2)^{\mathfrak{F}} = \langle N_1, N_2\rangle^{\mathfrak{F}} = \langle N_1^{\mathfrak{F}}, N_2^{\mathfrak{F}}\rangle = 1,$$

т. е. $N_1N_2 \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Пусть группа G представима в виде произведения своих подгрупп H и M. Если H $\mathfrak{F}$-достижима в G и M не содержит композиционных $\mathfrak{F}$-факторов, то H субнормальна в G и $(H \cap M)^{\mathfrak{F}} = H \cap M$.*

Доказательство. Так как H $\mathfrak{F}$-достижима, то существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \dots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $H_{i-1}^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$. Индукцией по m покажем, что $H_m \lhd\lhd G$ и $(H_m \cap M)^{\mathfrak{F}} = H_m \cap M$. Если $m = 0$, то $H = G$. В этом случае утверждение леммы очевидно. Пусть теперь $m > 0$. Предположим, что утверждение леммы верно для всех $k < m$. Тогда, в частности, $H_{m-1} \lhd\lhd G$ и $(H_{m-1} \cap M)^{\mathfrak{F}} = H_{m-1} \cap M$. Допустим, что $H_{m-1}^{\mathfrak{F}} \subseteq H_m$. Из условия леммы легко вытекает, что $M = M^{\mathfrak{F}}$. Поэтому

$$(H_{m-1} \cap M)^{\mathfrak{F}} = H_{m-1}^{\mathfrak{F}} \cap M \subseteq H_m \cap M \subseteq H_{m-1} \cap M.$$

Но по предположению индукции $(H_{m-1} \cap M)^{\mathfrak{F}} = H_{m-1} \cap M$. Следовательно, из последнего включения имеем, что $H_m \cap M = H_{m-1} \cap M$, а значит, $(H_m \cap M)^{\mathfrak{F}} = H_m \cap M$.

Ввиду тождества Дедекинда

$$H_m(H_{m-1} \cap M) = H_{m-1} \cap H_mM = H_{m-1}.$$

С другой стороны,

$$H_m(H_{m-1} \cap M) = H_m(H_m \cap M) = H_m.$$

Значит, $H_m = H_{m-1} \lhd\lhd G$.

Предположим теперь, что $H_m \lhd H_{m-1}$. Тогда из субнормальности подгруппы H_{m-1} в G следует, что $H_m \lhd\lhd G$ и $H_m \cap M \lhd\lhd M$. Так как подгруппа $(H_m \cap M)^{\mathfrak{F}}$ нормальна в $H_m \cap M$ и M не содержит композиционных $\mathfrak{F}$-факторов, то $(H_m \cap M)^{\mathfrak{F}} = H_m \cap M$. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Если непустая формация $\mathfrak{F}$ индуцирует WK-оператор, то она обладает решеточным свойством для $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, у которой $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы не образуют решетку. Ввиду леммы 2.1 формация $\mathfrak{F}$ наследственна. Поэтому на основании леммы 1.1 пересечение любых двух $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп группы G является $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппой. Следовательно, в G существуют по крайней мере две $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы, порождение которых не является $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппой группы G. Пусть этими подгруппами будут подгруппы H и K.

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G. Пусть $L \subseteq \langle H, K\rangle$. Рассмотрим подгруппы HL/L и KL/L группы G/L. Ввиду леммы 1.2 подгруппы HL/L и KL/L $\mathfrak{F}$-достижимы в G/L. Ввиду выбора группы G подгруппа $\langle H,K\rangle/L$ $\mathfrak{F}$-достижима в G/L. Ввиду леммы 1.2 подгруппа $\langle H,K\rangle$ $\mathfrak{F}$-достижима в G. Противоречие.

Значит, подгруппа L не содержится в $\langle H,K\rangle$. Согласно лемме 1.2 подгруппа $\langle H,K\rangle L$ $\mathfrak{F}$-достижима в G. Если $\langle H,K\rangle L$ — собственная подгруппа G, то ввиду выбора группы G подгруппа $\langle H,K\rangle$ $\mathfrak{F}$-достижима в $\langle H,K\rangle L$, а значит, $\langle H,K\rangle$ — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G. Противоречие. Итак, $\langle H,K\rangle L = G$. Так как HL и KL — $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы G и $\mathfrak{F}$ индуцирует WK-оператор, то

$$G^{\mathfrak{F}} = \langle (HL)^{\mathfrak{F}}, (KL)^{\mathfrak{F}}\rangle = \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle L^{\mathfrak{F}}.$$

Пусть $L \in \mathfrak{F}$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} = \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$. Поэтому $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \langle H,K\rangle$. Ввиду леммы 1.1 $\langle H,K\rangle$ $\mathfrak{F}$-достижима в G. Противоречие.

Пусть L не принадлежит $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 1.3 подгруппы $H^{\mathfrak{F}}$ и $K^{\mathfrak{F}}$ субнормальны в G. По теореме Виландта [4] подгруппа $\langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$ также субнормальна в G. Ввиду теоремы Виландта из [10] подгруппа L нормализует $\langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$. Так как подгруппы H и K $\mathfrak{F}$-достижимы в $\langle H,K\rangle$, то ввиду условия леммы $\langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle = \langle H,K\rangle^{\mathfrak{F}}$. Отсюда, в частности, следует, что подгруппа $\langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$ нормальна в $\langle H,K\rangle$. Значит, $\langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$ — нормальная подгруппа группы $\langle H,K\rangle L = G$. Если $\langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle \neq 1$, то, переходя к фактор-группе $G/\langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$, приходим к противоречию. Значит, $\langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle = \langle H,K\rangle^{\mathfrak{F}} = 1$, т. е. $\langle H,K\rangle \in \mathfrak{F}$.

Ввиду леммы 2.3 подгруппа H субнормальна в HL. Поэтому из $H \in \mathfrak{F}$ на основании леммы 2.2 имеем $H \subseteq (HL)_{\mathfrak{F}}$. Отсюда следует, что $HL = (HL)_{\mathfrak{F}}L$.

Так как L — минимальная нормальная подгруппа группы G и L не принадлежит $\mathfrak{F}$, то $HL = (HL)_{\mathfrak{F}} \times L$. Отсюда $HL = H \times L$. Аналогично показывается, что $KL = K \times L$. Таким образом, L нормализует подгруппу $\langle H,K\rangle$. Так как $\langle H,K\rangle L = G$, то подгруппа $\langle H,K\rangle$ нормальна в G. По определению $\langle H,K\rangle$ — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G. Снова пришли к противоречию. Лемма доказана.

Нам понадобятся некоторые дополнительные сведения о наследственной локальной формации $\mathfrak{F}$, обладающей решеточным свойством для $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп. Отметим, что ввиду [8, теорема 1, лемма 4] такая формация является классом Фиттинга. Это дает нам право говорить далее об $\mathfrak{F}$-радикале группы G.

Лемма 2.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная локальная формация, обладающая решеточным свойством для $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп. Тогда любая $\mathfrak{F}$-достижимая $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G содержится в ее $\mathfrak{F}$-радикале $G_{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, обладающая $\mathfrak{F}$-достижимой $\mathfrak{F}$-подгруппой H, не лежащей в $G_{\mathfrak{F}}$. Очевидно, что группа G не является простой. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Ввиду выбора группы G имеем

$$HN/N \subseteq (G/N)_{\mathfrak{F}} = K/N.$$

Если K — собственная подгруппа группы G, то $H \subseteq K_{\mathfrak{F}}$, а значит, $H \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Противоречие.

Таким образом, $G/N \in \mathfrak{F}$. Отметим, что наличие в G еще одной минимальной нормальной подгруппы приводит к тому, что $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как формация $\mathfrak{F}$ является насыщенной, то $C_G(N) \subseteq N$.

Пусть N не принадлежит $\mathfrak{F}$. Предположим, что HN — собственная подгруппа G. Тогда ввиду выбора группы G имеем $H \subseteq (HN)_{\mathfrak{F}}$. Так как $N \notin \mathfrak{F}$, то $(HN)_{\mathfrak{F}} \cap N = 1$. Поскольку $H \neq 1$, приходим к противоречию с условием $C_G(N) \subseteq N$. Значит, $HN = G$. По определению $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы существует цепь $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_t = H$, в которой для любого $i = 1, 2, \dots, t$ либо $G_i \lhd G_{i-1}$, либо $G_{i-1}^{\mathfrak{F}} \subseteq G_i$. В частности, либо $G_1 \lhd G$, либо $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_1$. Так как $G_1 N = G$ и $G^{\mathfrak{F}} = N$, то оба случая приводят к противоречию.

Итак, $N \in \mathfrak{F}$. Тогда все композиционные факторы группы G принадлежат $\mathfrak{F}$. Ввиду [8, лемма 6] подгруппа H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. По [8, лемма 4] она содержится в $\mathfrak{F}$-радикале группы G. Снова пришли к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, представимая в виде $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{H}$, где $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^2$ — непустая наследственная формация, $\mathfrak{H} = \times_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$, причем $\pi_l \cap \pi_k = \varnothing$ для всех $k \neq l$ из I. Пусть H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G. Если K — нормальная подгруппа группы G, то $(HK)^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}} K^{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой лемма неверна, т. е. $(HK)^{\mathfrak{F}} \neq H^{\mathfrak{F}} K^{\mathfrak{F}}$. Так как подгруппа H $\mathfrak{F}$-достижима в HK, то ввиду выбора групп G можем считать, что $G = HK$.

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как подгруппа HL/L $\mathfrak{F}$-достижима в G/L, то из $|G/L| < |G|$ следует, что

$$(HL/L)^{\mathfrak{F}}(KL/L)^{\mathfrak{F}} = (G/L)^{\mathfrak{F}}.$$

Ввиду [2, лемма 1.2] имеем $H^{\mathfrak{F}} K^{\mathfrak{F}} L = G^{\mathfrak{F}} L$. Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то $H^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ и $K^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Если либо $\mathrm{Core}_G(K^{\mathfrak{F}}) \neq 1$, либо $\mathrm{Core}_G(H^{\mathfrak{F}}) \neq 1$, то, выбрав подгруппу L либо в $\mathrm{Core}_G(K^{\mathfrak{F}})$, либо в $\mathrm{Core}_G(H^{\mathfrak{F}})$, получим из $H^{\mathfrak{F}} K^{\mathfrak{F}} L = G^{\mathfrak{F}} L$ равенство $H^{\mathfrak{F}} K^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}} = (HK)^{\mathfrak{F}}$. Противоречие.

Значит, $\mathrm{Core}_G(H^{\mathfrak{F}}) = 1$ и $\mathrm{Core}_G(K^{\mathfrak{F}}) = 1$. Из последнего равенства и нормальности K в G имеем, в частности, что $K \in \mathfrak{F}$. Поэтому $H^{\mathfrak{F}} L = G^{\mathfrak{F}} L$. Допустим, что L не содержится в $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда из $H^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ следует равенство $H^{\mathfrak{F}} \cap L = 1$. Сравнивая порядки подгрупп $H^{\mathfrak{F}} L$ и $G^{\mathfrak{F}} L$, приходим к равенству $H^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}$. Противоречие с выбором группы G.

Итак, $\mathrm{Soc}(G) \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Ввиду леммы 1.3 подгруппа $H^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в G. Отсюда на основании теоремы Виландта [10] имеем $L \subseteq H_G(H^{\mathfrak{F}})$. Теперь $H^{\mathfrak{F}} L = G^{\mathfrak{F}}$ влечет $H^{\mathfrak{F}} \lhd G^{\mathfrak{F}}$. Ввиду изоморфизма $G^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}} \simeq L/L \cap H^{\mathfrak{F}}$ получаем $G^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}} \in \mathrm{form}(L)$. Значит, $H^{\mathfrak{F}}$ содержит нормальную в G подгруппу $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathrm{form}(L)}$. Так как $\mathrm{Core}_G(H^{\mathfrak{F}}) = 1$, то $G^{\mathfrak{F}} \in \mathrm{form}(L)$, т. е. $G^{\mathfrak{F}}$ — характеристически простая группа. Теперь из $K \in \mathfrak{F}$ и $\mathrm{Soc}(G) \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ следует, что $K \in \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{M}$ либо $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{S}_{\pi_i}$ для некоторого $i \in I$. Так как $HK = G$, то H $\mathfrak{H}_1$-достижима в G. Поскольку подгруппа $H^{\mathfrak{H}_1}$ субнормальна в G и все композиционные факторы на участке от $H^{\mathfrak{H}_1}$ до G принадлежат $\mathfrak{H}_1$, из $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1^2$ на основании леммы 2 из [11] вытекает, что $G^{\mathfrak{H}_1} \subseteq H^{\mathfrak{H}_1}$. Так как формация $\mathfrak{H}_1$ наследственна, то $H^{\mathfrak{H}_1} \subseteq G^{\mathfrak{H}_1}$.

Из строения формации $\mathfrak{F}$ следует, что $G/G^{\mathfrak{F}} = A/G^{\mathfrak{F}} \times B/G^{\mathfrak{F}}$, причем $A/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}_1$, $B/G^{\mathfrak{F}}$ — π'-группа, где $\pi = \pi(\mathfrak{H}_1)$. Так как $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}_1$, то $G^{\mathfrak{F}}$ — нормальная холловская π-подгруппа группы B. Значит, $B = G^{\mathfrak{F}} \rtimes B_1$, где B_1 — холловская π'-подгруппа группы B. Так как $G/B \in \mathfrak{H}_1$, то $G^{\mathfrak{H}_1} \subseteq B = G^{\mathfrak{F}} \rtimes B_1$. Включение $G^{\mathfrak{F}} B_1 \subseteq G^{\mathfrak{H}_1}$ очевидно. Значит, $G^{\mathfrak{H}_1} = G^{\mathfrak{F}} \rtimes B_1$.

Аналогично показывается, что $H^{\mathfrak{H}_1} = H^{\mathfrak{F}} \rtimes H_1$, причем $H^{\mathfrak{F}}$ — нормальная холловская π-подгруппа группы H, H_1 — холловская π'-подгруппа H. Так как $H^{\mathfrak{H}_1} = G^{\mathfrak{H}_1}$, то $H^{\mathfrak{F}} \rtimes H_1 = G^{\mathfrak{F}} \rtimes B_1$. Отсюда следует, что $H^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}$. Снова пришли к противоречию. Лемма доказана.

Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой.

Лемма 2.7. *Пусть $G = \langle T, S\rangle$, где T и S — подгруппы группы G. Если $G = H \times K$, причем H и K — холловские подгруппы G, то $H = \langle H \cap T,\ H \cap S\rangle$, $K = \langle K \cap T,\ K \cap S\rangle$.*

Теорема 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, представимая в виде $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{H}$, где $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^2$ — непустая наследственная формация, $\mathfrak{H} = \times_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$, причем $\pi_l \cap \pi_k = \varnothing$ для всех $k \neq l$ из I. Тогда формация $\mathfrak{F}$ индуцирует WK-оператор.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, обладающая некоторыми $\mathfrak{F}$-достижимыми подгруппами H и K, для которых $\langle H, K\rangle^{\mathfrak{F}} \neq \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$. Так как подгруппы H и K $\mathfrak{F}$-достижимы в $\langle H, K\rangle$, то ввиду выбора группы G можем считать, что $G = \langle H, K\rangle$.

Среди всех пар $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп группы G, для которых $\mathfrak{F}$-корадикал порождения не равен порождению $\mathfrak{F}$-корадикалов, выберем пару H, K с наименьшей суммой индексов в группе G. Таким образом, для $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп H и K группы G имеем

$$\langle H, K\rangle^{\mathfrak{F}} \neq \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle,$$

а для любых $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп H_1 и K_1, для которых $|G : H_1| + |G : K_1| < |G : H| + |G : K|$, справедливо равенство

$$\langle H_1, K_1\rangle^{\mathfrak{F}} = \langle H_1^{\mathfrak{F}}, K_1^{\mathfrak{F}}\rangle.$$

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G. Если L не содержится в $G^{\mathfrak{F}}$, то $L \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$. Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то $\langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Ввиду выбора группы G

$$\langle (HL/L)^{\mathfrak{F}}, (KL/L)^{\mathfrak{F}}\rangle = G^{\mathfrak{F}}L/L.$$

Отсюда $\langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle L = G^{\mathfrak{F}}L$. Сравнивая теперь порядки групп $\langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$ и $G^{\mathfrak{F}}$, получаем $\langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle = G^{\mathfrak{F}}$, что противоречит выбору подгрупп H и K.

Значит, любая нормальная подгруппа L группы G содержится в $G^{\mathfrak{F}}$, и $\langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle L = G^{\mathfrak{F}}$. Предположим, что L не содержится хотя бы в одной из подгрупп H и K. Пусть для определенности L не содержится в H. Так как подгруппа HL $\mathfrak{F}$-достижима в G и выполняется неравенство $|G : HL| + |G : K| < |G : H| + |G : K|$, то

$$G^{\mathfrak{F}} = \langle HL, K\rangle^{\mathfrak{F}} = \langle (HL)^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle.$$

Ввиду теоремы 1.1 формация $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством для $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп. Поэтому на основании леммы 2.6 справедливо равенство $(HL)^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}}L^{\mathfrak{F}}$. Значит,

$$G^{\mathfrak{F}} = \langle H^{\mathfrak{F}}L^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle = \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle L^{\mathfrak{F}}.$$

Так как L — минимальная нормальная подгруппа группы G, то из $L^{\mathfrak{F}} \lhd G$ следует, что либо $L \in \mathfrak{F}$, либо $L^{\mathfrak{F}} = L$.

Если $L \in \mathfrak{F}$, то сразу же приходим к противоречию. Значит, $L^{\mathfrak{F}} = L$. Ввиду леммы 1.3 подгруппы $H^{\mathfrak{F}}$ и $K^{\mathfrak{F}}$ субнормальны в G. По теореме Виландта [4] подгруппа $\langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$ также субнормальна в группе G. Поэтому из [10] вытекает, что подгруппа L нормализует $\langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$. Отсюда из равенства $G^{\mathfrak{F}} = \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle L$ следует, что подгруппа $\langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$ нормальна в $G^{\mathfrak{F}}$.

Пусть T — минимальная нормальная подгруппа группы L. Обозначим $\mathfrak{H} = \mathrm{form}(T)$. Так как $G^{\mathfrak{F}}/\langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle \simeq L/L \cap \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle \in \mathrm{form}(T)$, то $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}} \subseteq \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$. Пусть $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}} \neq 1$. Рассмотрим группу $G/(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}}$. Ввиду выбора группы G из $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}} \subseteq \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$ следует, что $G^{\mathfrak{F}}/(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}} = \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle/(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}}$, откуда $G^{\mathfrak{F}} = \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$. Противоречие. Тем самым $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}} = 1$. Это означает, что $G^{\mathfrak{F}} \in \mathrm{form}(T)$, т. е. $G^{\mathfrak{F}}$ — элементарная группа.

Рассмотрим подгруппу $H_1 = \langle H, K^{\mathfrak{F}}\rangle$. Предположим, что $H_1 = G$. Ввиду леммы 1.3 подгруппа $H^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в G. Из элементарности группы $G^{\mathfrak{F}}$ следует, что $H^{\mathfrak{F}}$ — нормальная подгруппа группы $G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G = \langle H, K^{\mathfrak{F}}\rangle = HG^{\mathfrak{F}}$, то из нормальности $H^{\mathfrak{F}}$ в H имеем $H^{\mathfrak{F}} \lhd G$. Если $H^{\mathfrak{F}} \neq 1$, то, переходя к фактор-группе $G/H^{\mathfrak{F}}$, придем к противоречию с выбором подгрупп H и K. Если же $H^{\mathfrak{F}} = 1$, то $H \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$. Действительно, если $H \cap G^{\mathfrak{F}}$ — неединичная группа, то ввиду леммы 2.5 $G_{\mathfrak{F}} \cap G^{\mathfrak{F}}$ — неединичная группа. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ — элементарная группа, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Но тогда ввиду леммы 2.5 $HG^{\mathfrak{F}} = G \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, т. е. $G \in \mathfrak{F}$, что противоречит выбору группы G. Итак, $H \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$. Снова ввиду леммы 2.5 $H \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Отсюда $G = G_{\mathfrak{F}} \times G^{\mathfrak{F}}$. Так как все минимальные нормальные подгруппы группы G лежат в $G^{\mathfrak{F}}$, то $G = G^{\mathfrak{F}}$. Из $HG^{\mathfrak{F}} = G$ и $H \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$ следует, что $H = 1$. Так как $\langle H, K\rangle = G$, то $K = G$. Отсюда, очевидно, $G^{\mathfrak{F}} = \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$. Противоречие с выбором группы G.

Итак, $H_1 = \langle H, K^{\mathfrak{F}}\rangle$ — собственная подгруппа группы G. Так как подгруппы H и K $\mathfrak{F}$-достижимы в H_1, то в силу выбора группы G

$$H_1^{\mathfrak{F}} = \langle H, K^{\mathfrak{F}}\rangle^{\mathfrak{F}} = \langle H^{\mathfrak{F}}, (K^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}}\rangle.$$

Рассмотрим подгруппу $K_1 = \langle H^{\mathfrak{F}}, K\rangle$. Как и для H_1, показывается, что K_1 — собственная подгруппа группы G. Ввиду выбора группы G отсюда имеем $K_1^{\mathfrak{F}} = \langle K, H^{\mathfrak{F}}\rangle^{\mathfrak{F}} = \langle K^{\mathfrak{F}}, (H^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}}\rangle$.

Согласно лемме 1.3 $H^{\mathfrak{F}}$ — субнормальная подгруппа группы $G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ элементарна, то $H^{\mathfrak{F}} \lhd G^{\mathfrak{F}}$. Ввиду леммы 1.1 $H \cap G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы $G^{\mathfrak{F}}$. Рассмотрим подгруппу $H \cap G^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}}$ группы $G^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}}$. На основании леммы 1.2 она $\mathfrak{F}$-достижима. Кроме того, из наследственности формации $\mathfrak{F}$ вытекает, что $H \cap G^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Поэтому в силу леммы 2.5

$$H \cap G^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}} \subseteq (G^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{F}}.$$

Если $H \cap G^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}}$ — неединичная группа, то $(G^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{F}} \neq 1$. Поэтому из элементарности группы $G^{\mathfrak{F}}$ следует, что $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Значит, $L \in \mathfrak{F}$, что противоречит равенству $L^{\mathfrak{F}} = L$. Таким образом, $H^{\mathfrak{F}} = H \cap G^{\mathfrak{F}}$. Аналогично показывается, что $K^{\mathfrak{F}} = K \cap G^{\mathfrak{F}}$.

Предположим, что $H_1 = H$, $K_1 = K$. Тогда $K^{\mathfrak{F}} \subseteq H$ и $H^{\mathfrak{F}} \subseteq K$. Отсюда имеем $K^{\mathfrak{F}} \subseteq H \cap G^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}}$ и $H^{\mathfrak{F}} \subseteq K \cap G^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}}$. Тем самым $H^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}}$. Так как $H^{\mathfrak{F}} \lhd H$, $K^{\mathfrak{F}} \lhd K$, то $H^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}} \lhd \langle H, K\rangle = G$. Если $H^{\mathfrak{F}}$ — неединичная группа, то, переходя к фактор-группе $G/H^{\mathfrak{F}}$, придем к противоречию с выбором группы G. Значит, $H \in \mathfrak{F}$ и $K \in \mathfrak{F}$. Ввиду леммы 2.5 $G \in \mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию.

Итак, либо $H_1 \neq H$, либо $K_1 \neq K$. Отсюда следует, что

$$|G : H_1| + |G : K_1| < |G : H| + |G : K|.$$

Так как формация $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством для $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп, подгруппы H_1 и K_1 $\mathfrak{F}$-достижимы в G. Значит, из выбора подгрупп H и K имеем

$$G^{\mathfrak{F}} = \langle H_1, K_1\rangle^{\mathfrak{F}} = \langle H_1^{\mathfrak{F}}, K_1^{\mathfrak{F}}\rangle = \langle H^{\mathfrak{F}}, (K^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}, (H^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}}\rangle = \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle.$$

Противоречие.

Остается рассмотреть случай, когда $L \subseteq H \cap K$. Пусть $L = L^{\mathfrak{F}}$. Так как $L \subseteq H$, ввиду наследственности формации $\mathfrak{F}$ имеем $LH^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Отсюда $L/L \cap H^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Если L не содержится в $H^{\mathfrak{F}}$, то $L^{\mathfrak{F}}$ — собственная подгруппа L, что противоречит условию $L^{\mathfrak{F}} = L$. Значит, $L \subseteq H^{\mathfrak{F}}$. В этом случае

$$G^{\mathfrak{F}} = \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}} \rangle L = \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}} \rangle.$$

Противоречие с выбором подгрупп H и K.

Пусть $L \in \mathfrak{F}$. Как и выше, показывается, что $G^{\mathfrak{F}}$ — элементарная группа. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Предположим, что H — собственная подгруппа группы $HG_{\mathfrak{F}}$. Тогда из соотношения $|G : HG_{\mathfrak{F}}| + |G : K| < |G : H| + |G : K|$ имеем

$$G^{\mathfrak{F}} = \langle HG_{\mathfrak{F}}, K \rangle^{\mathfrak{F}} = \langle (HG_{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}} \rangle = \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}} \rangle.$$

Противоречие. Поэтому $HG_{\mathfrak{F}} = H$, а значит, $G_{\mathfrak{F}} \subseteq H$. Аналогично показывается, что $G_{\mathfrak{F}} \subseteq K$. Таким образом, $G_{\mathfrak{F}} \subseteq H \cap K$.

Существует лишь конечное число индексов i из I, для которых $\pi(G) \cap \pi_i \neq \varnothing$. Пусть для определенности это будут $1, 2, \ldots, t$. Так как группа $G^{\mathfrak{F}}$ элементарна и принадлежит $\mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}}$ — разрешимая π_i-группа для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ либо $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{M}$.

Пусть сначала $G^{\mathfrak{F}}$ — разрешимая π_i-группа для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $G^{\mathfrak{F}}$ — π_1-группа. Из строения формации $\mathfrak{F}$ вытекает, что

$$G/G^{\mathfrak{F}} = M/G^{\mathfrak{F}} \times S_1/G^{\mathfrak{F}} \times \cdots \times S_t/G^{\mathfrak{F}},$$

где $M/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{M}$, $S_1/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}_{\pi_1}, \ldots, S_t/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}_{\pi_t}$. Пусть среди подгрупп $M/G^{\mathfrak{F}}, S_1/G^{\mathfrak{F}}, \ldots, S_t/G^{\mathfrak{F}}$ хотя бы две являются неединичными. Тогда порядки всех этих подгрупп меньше $|G|$. Так как $H \cap K \supseteq G_{\mathfrak{F}}$, ввиду леммы 2.7

$$M = \langle H \cap M, K \cap M \rangle, \quad S_i = \langle H \cap S_i, M \cap S_i \rangle$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, t$. В силу леммы 1.1 подгруппы $H \cap M$ и $K \cap M$ $\mathfrak{F}$-достижимы в G. Так как подгруппы $(H \cap M)^{\mathfrak{F}}$ и $(K \cap M)^{\mathfrak{F}}$ субнормальны в G, ввиду элементарности группы $G^{\mathfrak{F}}$ подгруппы $(H \cap M)^{\mathfrak{F}}$ и $(K \cap M)^{\mathfrak{F}}$ нормальны в $G^{\mathfrak{F}}$. Отсюда, в частности, следует, что $M^{\mathfrak{F}} = (H \cap M)^{\mathfrak{F}}(K \cap M)^{\mathfrak{F}}$. Аналогично показывается, что $S_i^{\mathfrak{F}} = (H \cap S_i)^{\mathfrak{F}}(K \cap S_i)^{\mathfrak{F}}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$.

По лемме 2.6

$$\begin{aligned} G^{\mathfrak{F}} &= M^{\mathfrak{F}} S_1^{\mathfrak{F}} \ldots S_t^{\mathfrak{F}} = (H \cap M)^{\mathfrak{F}}(K \cap M)^{\mathfrak{F}}(H \cap S_1)^{\mathfrak{F}}(K \cap S_1)^{\mathfrak{F}} \ldots (H \cap S_t)^{\mathfrak{F}}(K \cap S_t)^{\mathfrak{F}} \\ &= ((H \cap M)^{\mathfrak{F}}(H \cap S_1)^{\mathfrak{F}} \ldots (H \cap S_t)^{\mathfrak{F}})((K \cap M)^{\mathfrak{F}}(K \cap S_1)^{\mathfrak{F}} \ldots (K \cap S_t)^{\mathfrak{F}}) \\ &= ((H \cap M)(H \cap S_1) \ldots (H \cap S_t))^{\mathfrak{F}}((K \cap M) \ldots (K \cap S_t))^{\mathfrak{F}}. \end{aligned}$$

Так как $M/G^{\mathfrak{F}}$, $S_1/G^{\mathfrak{F}}, \ldots, S_t/G^{\mathfrak{F}}$ — нормальные холловские подгруппы группы $G/G^{\mathfrak{F}}$, то $H \cap M/G^{\mathfrak{F}}$, $H \cap S_1/G^{\mathfrak{F}}, \ldots, H \cap S_t/G^{\mathfrak{F}}$ — нормальные холловские подгруппы группы $H/G^{\mathfrak{F}}$. Отсюда следует, что $H = (H \cap M)(H \cap S_1) \ldots (H \cap S_t)$. Аналогично показывается, что $K = (K \cap M)(K \cap S_1) \ldots (K \cap S_t)$. Значит, $G^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}} K^{\mathfrak{F}}$. Противоречие.

Итак, одна из подгрупп $M/G^{\mathfrak{F}}, S_1/G^{\mathfrak{F}}, \ldots, S_t/G^{\mathfrak{F}}$ совпадает с группой $G/G^{\mathfrak{F}}$. Возможны три случая: либо $M = G$, либо $S_1 = G$, либо $t = 2$ и $S_2 = G$.

Пусть $M = G$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} = S_1$ — холловская π_1-подгруппа группы G. Поскольку группа $G^{\mathfrak{F}}$ разрешима, она является элементарной абелевой группой. Рассмотрим группу $H/H^{\mathfrak{F}}$. Так как она принадлежит формации $\mathfrak{F}$, имеем

$$H/H^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}} \times R/H^{\mathfrak{F}},$$

где $R/H^{\mathfrak{F}}$ — холловская $\pi(\mathfrak{M})$-подгруппа группы $H/H^{\mathfrak{F}}$. Так как $G^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}}$ абелева, то $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}}$ — нормальная подгруппа группы H. Таким образом, подгруппа $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}}$ нормальна в группе $\langle H, K\rangle = G$. Ввиду леммы 2.5 $G/H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}}$. Обратное включение следует из наследственности формации $\mathfrak{F}$. Противоречие.

Пусть теперь $S_1 = G$. Тогда $G \in \mathfrak{S}_{\pi_1} \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие с выбором группы G.

Пусть $t = 2$ и $S_2 = G$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} = S_1$ — холловская π_1-подгруппа группы G. Более того, $G^{\mathfrak{F}}$ — элементарная абелева подгруппа G. Так как $H/H^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, имеем

$$H/H^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}} \times F/H^{\mathfrak{F}},$$

где $F/H^{\mathfrak{F}}$ — холловская π_2-подгруппа группы $H/H^{\mathfrak{F}}$. Отсюда следует, что $F/H^{\mathfrak{F}}$ нормализует подгруппу $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}}$ группы $G^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}}$. Из абелевости группы $G^{\mathfrak{F}}$ вытекает, что нормализатор $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}}$ содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Значит, $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}}$ — нормальная подгруппа группы H. Аналогично показывается, что подгруппа $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}}$ нормальна в K. Поэтому $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}} \lhd G$. Отсюда легко следует, что $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}$. Противоречие.

Остается рассмотреть случай, когда $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{M}$-группа. Так как $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то

$$G/G^{\mathfrak{F}} = M/G^{\mathfrak{F}} \times S_1/G^{\mathfrak{F}} \times \cdots \times S_t/G^{\mathfrak{F}},$$

где $M/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{M}$, $S_1/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}_{\pi_1}, \ldots, S_t/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}_{\pi_t}$. Если хотя бы две из этих подгрупп являются неединичными, то, рассуждая описанным выше образом, на основании лемм 2.6 и 2.7 приходим к противоречию с выбором группы G.

Итак, одна из подгрупп $M/G^{\mathfrak{F}}, S_1/G^{\mathfrak{F}}, \ldots, S_t/G^{\mathfrak{F}}$ совпадает с группой $G/G^{\mathfrak{F}}$. Возможны лишь два случая: либо $M = G$, либо $t = 1$ и $S_1 = G$.

В первом случае $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{M}$. Поэтому из $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^2$ и $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{M}$ следует, что $G \in \mathfrak{M}$. Противоречие.

Рассмотрим второй случай. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ — холловская $\pi(\mathfrak{M})$-подгруппа группы G, причем группа $G^{\mathfrak{F}}$ элементарна (абелева либо неабелева). Так как $H/H^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то

$$H/H^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}} \times R/H^{\mathfrak{F}},$$

где $R/H^{\mathfrak{F}}$ — холловская π_1-подгруппа группы $H/H^{\mathfrak{F}}$. Отсюда следует, что $R/H^{\mathfrak{F}}$ нормализует $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}}$. Поскольку подгруппа $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в $G^{\mathfrak{F}}$, из элементарности группы $G^{\mathfrak{F}}$ следует, что $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}}$ — нормальная подгруппа группы $G^{\mathfrak{F}}$. Значит, $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}} \lhd H$. Аналогично показывается, что $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}} \lhd K$. Таким образом, $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}}$ — нормальная подгруппа группы G, что приводит к противоречию. Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Непустая наследственная формация $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^2$ индуцирует WK-оператор.*

Следствие 2.2. *Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^2$ — непустая наследственная формация. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{G}_{\pi'(\mathfrak{M})}$ индуцирует WK-оператор. В частности, формация $\mathfrak{G}_\pi \times \mathfrak{G}_{\pi'}$ индуцирует WK-оператор.*

Напомним, что группа G называется π-разложимой, если $G = G_\pi \times G_{\pi'}$ и G_π нильпотентна.

Следствие 2.3. *Формация всех π-разложимых (всех разрешимых π-разложимых) групп индуцирует WK-оператор.*

Следствие 2.4. *Формация $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$, где $\pi_k \cap \pi_l = \varnothing$ для всех $k \neq l$ из I, индуцирует WK-оператор.*

Следствие 2.5 [12]. *Формация $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп индуцирует WK-оператор.*

Опишем теперь все разрешимые формации, индуцирующие WK-оператор.

Теорема 2.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая разрешимая формация. Формация $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда индуцирует WK-оператор, когда представима в виде $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$, где $\pi_k \cap \pi_l = \varnothing$ для всех $k \neq l$ из I.*

Доказательство. Если формация $\mathfrak{F}$ представима как $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$, где $\pi_k \cap \pi_l = \varnothing$ для всех $k \neq l$ из I, то ввиду следствия 2.4 она индуцирует WK-оператор.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ — непустая разрешимая формация, индуцирующая WK-оператор. Ввиду леммы 2.1 формация $\mathfrak{F}$ наследственна. На основании леммы 2.2 она является радикальным классом. Следовательно, ввиду [9, теорема 1] формация является насыщенной, а ввиду [13, теорема 7.25] она будет локальной. Теперь на основании теоремы 1.1 и леммы 2.4 формация $\mathfrak{F}$ представима в виде $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$, где $\pi_k \cap \pi_l = \varnothing$ для всех $k \neq l$ из I. Теорема доказана.

§ 3. WK-операторы и перестановочность $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп

Развивая теорему о перестановочности субнормальных подгрупп, одна из которых перфектна, Виландт [12], применяя развитую им теорию операторов, показал, что в конечной группе субнормальные подгруппы H и K перестановочны, если $(|H : H'|, |K : K'|) = 1$. Однако уже в 1970 г., возвращаясь к этому результату, он заметил в [6], что подгруппы H и K перестановочны тогда и только тогда, когда при любом гомоморфизме группы $\langle H, K \rangle$ в нильпотентную группу образы подгрупп H и K перестановочны. Пять лет спустя Брюстер [5] показал, что условие конечности группы G в теореме Виландта можно отбросить. Таким образом, результаты Виландта и Брюстера редуцируют вопрос перестановочности субнормальных подгрупп к нильпотентному случаю.

Аналогичный подход мы применяем и в теории $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп. В случае, когда формация $\mathfrak{F}$ индуцирует WK-оператор, мы показываем, что достаточно исследовать вопрос перестановочности таких подгрупп в $\mathfrak{F}$-группах. Это позволяет в качестве следствия решить усиленную гипотезу Кегеля (см. [1]), установив для формации $\mathfrak{F}$, индуцирующей WK-оператор, что две $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы H и K группы G перестановочны, если $H = H^{\mathfrak{F}} = H'$.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, индуцирующая WK-оператор. Пусть H и K — $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы G. Если $HK = KH$, то $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}}H^{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. По лемме 1.1 подгруппа H $\mathfrak{F}$-достижима в HK. Поэтому существует цепь

$$HK = H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset H_k = H,$$

в которой либо $H_i \lhd H_{i-1}$, либо $H_{i-1}^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$.

Применим индукцию по k. Пусть $k = 0$. Тогда $K \subseteq H$. Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то $KH^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Из изоморфизма $H^{\mathfrak{F}}K/H^{\mathfrak{F}} \simeq K/K \cap H^{\mathfrak{F}}$ следует, что $K^{\mathfrak{F}} \subseteq H^{\mathfrak{F}}$. Теперь, очевидно, $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}}H^{\mathfrak{F}}$.

Пусть $k > 0$. Так как $H \subseteq H_1 \subseteq HK$ и $HK = KH$, то ввиду тождества Дедекинда $H(H_1 \cap K) = H_1 \cap HK = H_1$. По лемме 2.4 $H_1 \cap K$ — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы HK. В силу тождества Дедекинда

$$H(H_1 \cap K) = H_1 \cap HK = KH \cap H_1 = (K \cap H_1)H = (H_1 \cap K)H.$$

Кроме того, цепь $H_1 = H(H_1 \cap K) \supset H_1 \supset \cdots \supset H_k = H$ содержит $k-1$ членов. Поэтому по индукции $H^{\mathfrak{F}}(H_1 \cap K)^{\mathfrak{F}} = (H_1 \cap K)^{\mathfrak{F}}H^{\mathfrak{F}}$.

Если H_1 — нормальная подгруппа группы HK, то из характеристичности $H_1^{\mathfrak{F}}$ в H_1 следует, что $H_1^{\mathfrak{F}} \lhd HK$. Отсюда, в частности, следует, что подгруппы $H_1^{\mathfrak{F}}$ и $K^{\mathfrak{F}}$ перестановочны. Если $H_1 \supseteq (HK)^{\mathfrak{F}}$, то из условия леммы вытекает, что $\langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle \subseteq H_1$. Поэтому $K^{\mathfrak{F}}$ нормализует подгруппу $H_1^{\mathfrak{F}}$, а значит, $H_1^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}}H_1^{\mathfrak{F}}$.

Итак, подгруппы $H_1^{\mathfrak{F}}$ и $K^{\mathfrak{F}}$ перестановочны. Ввиду леммы 2.1 $(H_1 \cap K)^{\mathfrak{F}} \subseteq K^{\mathfrak{F}}$. Кроме того, из перестановочности подгрупп $H^{\mathfrak{F}}$ и $(H_1 \cap K)^{\mathfrak{F}}$, а также из условия леммы получаем, что

$$H_1^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}}(H_1 \cap K)^{\mathfrak{F}} = (H_1 \cap K)^{\mathfrak{F}}H^{\mathfrak{F}}.$$

Отсюда окончательно имеем

$$H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}}(H_1 \cap K)^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}} = H_1^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}}H_1^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}}(H_1 \cap K)^{\mathfrak{F}}H^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}}H^{\mathfrak{F}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, индуцирующая WK-оператор. Если H и K — $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы G, то справедливы следующие утверждения*:

1) *если $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}}H^{\mathfrak{F}}$, то $H^{\mathfrak{F}}K = KH^{\mathfrak{F}}$*;
2) *если $HK = KH$, то $H^{\mathfrak{F}}K = KH^{\mathfrak{F}}$*;
3) *если $HK^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}}H$, то $H^{\mathfrak{F}}K = KH^{\mathfrak{F}}$*:

Доказательство. 1. Так как $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}}H^{\mathfrak{F}}$, то $H^{\mathfrak{F}}K = H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}}K = \langle H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}}\rangle K$. Ввиду леммы 1.1 подгруппы H и K $\mathfrak{F}$-достижимы в $\langle H, K\rangle$. Поскольку $\mathfrak{F}$ индуцирует WK-оператор, то $\langle H, K\rangle^{\mathfrak{F}} = \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$. Так как K нормализует подгруппу $\langle H, K\rangle^{\mathfrak{F}}$, то $\langle H, K\rangle^{\mathfrak{F}}K = K\langle H, K\rangle^{\mathfrak{F}}$. Снова применяя условие леммы, окончательно имеем

$$H^{\mathfrak{F}}K = K\langle H, K\rangle^{\mathfrak{F}} = KH^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}} = KH^{\mathfrak{F}}.$$

2. Так как $HK = KH$, по лемме 3.1 $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}}H^{\mathfrak{F}}$. Теперь из утверждения 1 вытекает, что $H^{\mathfrak{F}}K = KH^{\mathfrak{F}}$.

3. Так как $HK^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}}H$, то из утверждения 2 вытекает, что $H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}}H^{\mathfrak{F}}$. Теперь ввиду утверждения 1 имеем $H^{\mathfrak{F}}K = KH^{\mathfrak{F}}$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, индуцирующая WK-оператор. Пусть H и K — $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы G. Подгруппы $H^{\mathfrak{F}}$ и K перестановочны, если выполняется одно из условий*:

1) $(H^{\mathfrak{F}})' = H^{\mathfrak{F}}$;
2) *все абелевы композиционные факторы подгруппы H принадлежат формации $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Ввиду леммы 1.3 подгруппы $H^{\mathfrak{F}}$ и $K^{\mathfrak{F}}$ субнормальны в G. Если $(H^{\mathfrak{F}})' = H^{\mathfrak{F}}$, то по теореме Виландта [4] подгруппы $H^{\mathfrak{F}}$ и $K^{\mathfrak{F}}$ перестановочны. Из утверждения 1 леммы 3.2 имеем $H^{\mathfrak{F}}K = KH^{\mathfrak{F}}$.

Пусть теперь все абелевы композиционные факторы подгруппы H принадлежат $\mathfrak{F}$. Рассмотрим цепь

$$H \supseteq H^{\mathfrak{F}} \supseteq H^{\mathfrak{F}^2} \supseteq \cdots \supseteq H^{\mathfrak{F}^n} \supseteq \ldots.$$

Так как группа G конечна, для некоторого натурального m получим $H^{\mathfrak{F}^m} = H^{\mathfrak{F}^{(m+1)}}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{F}$-корадикал подгруппы $H^{\mathfrak{F}^m}$ совпадает с $H^{\mathfrak{F}^m}$. Так как все абелевы композиционные факторы подгруппы H принадлежат формации $\mathfrak{F}$, то условие $(H^{\mathfrak{F}^m})^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}^m}$ равносильно условию $(H^{\mathfrak{F}^m})' = H^{\mathfrak{F}^m}$. Так как подгруппа $H^{\mathfrak{F}^m}$ $\mathfrak{F}$-достижима в G, то из утверждения 1 $H^{\mathfrak{F}^m}K = KH^{\mathfrak{F}^m}$. Ввиду утверждения 3 леммы 3.2 $H^{\mathfrak{F}^{(m-1)}}K^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}}H^{\mathfrak{F}^{(m-1)}}$. Применяя далее утверждение 1 леммы 3.2 $m-1$ раз, получаем $HK^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}}H$. Отсюда ввиду утверждения 3 леммы 3.2 окончательно имеем $H^{\mathfrak{F}}K = KH^{\mathfrak{F}}$. Лемма доказана.

Следствие 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, индуцирующая WK-оператор и содержащая все нильпотентные группы. Тогда для любых двух $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп H и K произвольной группы G справедливо равенство $H^{\mathfrak{F}}K = KH^{\mathfrak{F}}$.*

Следствие 3.2 [3]. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^2$ — наследственная формация, и пусть H и K — $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы G. Если $H = H'$ и $H = H^{\mathfrak{F}}$, то $HK = KH$.*

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, индуцирующая WK-оператор. Пусть H и K — $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы $J = \langle H, K\rangle$. Если все абелевы композиционные факторы подгруппы H принадлежат $\mathfrak{F}$, то следующие утверждения равносильны:*

1) $HK = KH$;

2) $J = HKJ^{\mathfrak{F}}$;

3) *каждый гомоморфизм группы J в $\mathfrak{F}$-группу переводит H и K в перестановочные подгруппы.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Так как $HK = KH$, то $J = HK$. Теперь $J = JJ^{\mathfrak{F}} = HKJ^{\mathfrak{F}}$.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть φ — гомоморфизм группы J в некоторую $\mathfrak{F}$-группу. Ввиду леммы 2.1 формация $\mathfrak{F}$ наследственна. Поэтому $\mathrm{Im}\,\varphi \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathrm{Im}\,\varphi \simeq J/\mathrm{Ker}\,\varphi$, то $\mathrm{Ker}\,\varphi \supseteq J^{\mathfrak{F}}$. Из равенства $J = HKJ^{\mathfrak{F}}$ следует, что $HKJ^{\mathfrak{F}} = KHJ^{\mathfrak{F}}$. Поскольку $J^{\mathfrak{F}} \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$, то $HK\,\mathrm{Ker}\,\varphi = KH\,\mathrm{Ker}\,\varphi$. Отсюда вытекает, что $H^{\varphi}K^{\varphi} = K^{\varphi}H^{\varphi}$.

$3 \Rightarrow 1$. Так как каждый гомоморфизм группы J в $\mathfrak{F}$-группу переводит H и K в перестановочные подгруппы, то, в частности, $HKJ^{\mathfrak{F}} = KHJ^{\mathfrak{F}}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ индуцирует WK-оператор, то $J^{\mathfrak{F}} = \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$. Ввиду леммы 3.3 $H^{\mathfrak{F}}K = KH^{\mathfrak{F}}$ и $J^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}}$. На основании утверждения 3 леммы 3.2 $HK^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}}H$. Поэтому

$$HKJ^{\mathfrak{F}} = HKH^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}} = HK, \quad KHJ^{\mathfrak{F}} = KHH^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}} = KH.$$

Из $KHJ^{\mathfrak{F}} = KHJ^{\mathfrak{F}}$ окончательно имеем $HK = KH$. Теорема доказана.

Следствие 3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, индуцирующая WK-оператор и содержащая все нильпотентные группы. Пусть H и K — $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы $J = \langle H, K\rangle$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $HK = KH$;

2) $J = HKJ^{\mathfrak{F}}$;

3) *каждый гомоморфизм группы J в $\mathfrak{F}$-группу переводит H и K в перестановочные подгруппы.*

Очевидно, что подгруппа H группы G субнормальна в G тогда и только тогда, когда она $\mathfrak{N}$-достижима ($\mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп). Кроме того, ввиду следствия 2.5 формация $\mathfrak{N}$ индуцирует WK-оператор. Поэтому имеем

Следствие 3.4 [12]. *Пусть A и B — субнормальные подгруппы группы G. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $AB = BA$;

2) $\langle A, B\rangle = AB\langle A, B\rangle^{\mathfrak{N}}$;

3) *каждый гомоморфизм группы $\langle A, B\rangle$ в нильпотентную группу переводит A и B в перестановочные подгруппы.*

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Следуя [14], группу будем называть *$\mathfrak{F}$-совершенной*, если $G = G^{\mathfrak{F}}$.

Следствие 3.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, индуцирующая WK-оператор. Если $\mathfrak{F}$-совершенная подгруппа H $\mathfrak{F}$-достижима в группе G и все абелевы композиционные факторы H принадлежат $\mathfrak{F}$, то H перестановочна с любой $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппой группы G.*

Следствие 3.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, индуцирующая WK-оператор и содержащая все нильпотентные группы. Тогда каждая $\mathfrak{F}$-совершенная $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G перестановочна с любой $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппой группы G.*

Ввиду следствия 2.1 наследственная формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^2$ индуцирует WK-оператор. Отсюда имеем

Следствие 3.7. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^2$ — наследственная формация. Если H — $\mathfrak{F}$-совершенная $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G и все абелевы композиционные факторы H принадлежат $\mathfrak{F}$, то H перестановочна с любой $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппой группы G.*

Следствие 3.8. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^2$ — наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы. Тогда $\mathfrak{F}$-совершенная $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G перестановочна с любой другой $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппой группы G.*

Замечание. Свойством $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^2$ обладают, например, формация $\mathfrak{F}$ всех π-разрешимых групп, формация $\mathfrak{F}$ всех π-обособленных групп, формация $\mathfrak{F}$ всех π-отделимых групп (π — некоторое множество простых чисел).

Ввиду следствия 2.4 формация $\mathfrak{F} = \times_{i\in I}\mathfrak{S}_{\pi_i}$, где $\pi_k \cap \pi_l = \varnothing$ для всех $k \neq l$ из I, индуцирует WK-оператор. Значит, имеем

Следствие 3.9. *Пусть $\mathfrak{F} = \times_{i\in I}\mathfrak{S}_{\pi_i}$, где $\pi_l \cap \pi_k = \varnothing$ для всех $l \neq k$ из I. Если H — $\mathfrak{F}$-совершенная $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G и все абелевы композиционные факторы H принадлежат $\mathfrak{F}$, то H перестановочна с любой $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппой группы G.*

Следствие 3.10. *Пусть $\mathfrak{F} = \times_{i\in I}\mathfrak{S}_{\pi_i}$, где $\pi_l \cap \pi_k = \varnothing$ для всех $k \neq l$ из I. Если $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$, то субнормальная подгруппа H группы G, совпадающая со своим коммутантом, перестановочна с любой $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппой группы G.*

Следствие 3.11. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, индуцирующая WK-оператор. Если $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{F}$-совершенная субнормальная подгруппа группы G перестановочна с любой $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппой группы G.*

В случае, когда формация $\mathfrak{F}$, индуцирующая WK-оператор, является локальной, теорема 3.1 может быть несколько улучшена.

Теорема 3.2. *Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, индуцирующей WK-оператор. Пусть H и K — $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы $J = \langle H, K\rangle$, причем все абелевы композиционные факторы группы H принадлежат $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $HK = KH$, когда для всех p из $\pi(\mathfrak{F})$ каждый гомоморфизм группы J в $f(p)$-группу переводит H и K в перестановочные подгруппы.*

Доказательство. Пусть $HK = KH$. Так как f — внутренний экран формации $\mathfrak{F}$, то $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех p из $\pi(\mathfrak{F})$. Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 3.1.

Пусть для всех p из $\pi(\mathfrak{F})$ каждый гомоморфизм группы J в $f(p)$-группу переводит H и K в перестановочные подгруппы. Тогда, в частности, $HKJ^{f(p)} = KHJ^{f(p)}$ для всех p из $\pi(\mathfrak{F})$. Ввиду леммы 2.1 формация $\mathfrak{F}$ наследственна. Кроме того, на основании леммы 2.4 она обладает решеточным свойством для $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп. Поэтому ввиду теоремы 1.1 формация $\mathfrak{F}$ представима в виде $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{H}$, где $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$ — наследственная локальная формация, $\mathfrak{H} = \times_{i\in I}\mathfrak{S}_{\pi_i}$, причем $\pi_k \cap \pi_l = \varnothing$ для всех $k \neq l$ из I. Тогда ввиду [15, лемма 1] $f(p) = \mathfrak{M}$ для всех p из $\pi(\mathfrak{M})$ и $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi_i}$ для всех p из π_i, $i \in I$.

Пусть $J \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $H \in \mathfrak{F}$, $K \in \mathfrak{F}$. Холловская $\pi(\mathfrak{M})$-подгруппа $J_{\pi(\mathfrak{M})}$ группы J принадлежит $\mathfrak{M}$ и нормальна в J. Поэтому $H_{\pi(\mathfrak{M})} = H \cap J_{\pi(\mathfrak{M})}$, $K_{\pi(\mathfrak{M})} = K \cap J_{\pi(\mathfrak{M})}$. Из условия следует, что

$$HKJ^{f(p)} = KHJ^{f(p)}$$

для всех p из $\pi(\mathfrak{F})$. Пусть $p \in \pi(\mathfrak{M})$. Тогда $HKJ^{\mathfrak{M}} = KHJ^{\mathfrak{M}}$. Так как $J \in \mathfrak{F}$, то $J^{\mathfrak{M}} = J_{\pi'(\mathfrak{M})}$. Теперь

$$\begin{aligned} J = HKJ^{\mathfrak{M}} = HJ^{\mathfrak{M}}KJ^{\mathfrak{M}} &= (H_{\pi(\mathfrak{M})} \times H_{\pi'(\mathfrak{M})})J_{\pi'(\mathfrak{M})}(K_{\pi(\mathfrak{M})} \times K_{\pi'(\mathfrak{M})})J_{\pi'(\mathfrak{M})} \\ &= H_{\pi(\mathfrak{M})}J_{\pi'(\mathfrak{M})}K_{\pi(\mathfrak{M})}J_{\pi'(\mathfrak{M})} = H_{\pi(\mathfrak{M})}K_{\pi(\mathfrak{M})}J_{\pi'(\mathfrak{M})}. \end{aligned}$$

Отсюда и из $H_{\pi(\mathfrak{M})}K_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq J_{\pi(\mathfrak{M})}$ следует, что $H_{\pi(\mathfrak{M})}K_{\pi(\mathfrak{M})} = J_{\pi(\mathfrak{M})}$. Аналогично показывается, что $J_{\pi(\mathfrak{M})} = K_{\pi(\mathfrak{M})}H_{\pi(\mathfrak{M})}$. Значит,

$$H_{\pi(\mathfrak{M})}K_{\pi(\mathfrak{M})} = K_{\pi(\mathfrak{M})}H_{\pi(\mathfrak{M})}.$$

Поскольку группа G конечна, существует лишь конечное число индексов i из I, для которых J_{π_i} — неединичная группа. Пусть для определенности этими индексами будут числа $1, 2, \ldots, k$. Описанным выше образом показывается, что $H_{\pi_i}K_{\pi_i} = K_{\pi_i}H_{\pi_i}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Так как

$$J = J_{\pi(\mathfrak{M})} \times J_{\pi_1} \times \cdots \times J_{\pi_k},$$

то

$$\begin{aligned} HK &= (H_{\pi(\mathfrak{M})}H_{\pi_1}\ldots H_{\pi_k})(K_{\pi(\mathfrak{M})}K_{\pi_1}\ldots K_{\pi_k}) \\ &= (H_{\pi(\mathfrak{M})}K_{\pi(\mathfrak{M})})(H_{\pi_1}K_{\pi_1})\ldots(H_{\pi_k}K_{\pi_k}) \\ &= (K_{\pi(\mathfrak{M})}H_{\pi(\mathfrak{M})})(K_{\pi_1}H_{\pi_1})\ldots(K_{\pi_k}H_{\pi_k}) \\ &= (K_{\pi(\mathfrak{M})}K_{\pi_1}\ldots K_{\pi_k})(H_{\pi(\mathfrak{M})}H_{\pi_1}\ldots H_{\pi_k}) = KH. \end{aligned}$$

Пусть теперь группа J не принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Рассмотрим группу $J/J^{\mathfrak{F}}$. Очевидно, что для любого p из $\pi(\mathfrak{F})$ каждый гомоморфизм группы $J/J^{\mathfrak{F}}$ в $f(p)$-группу переводит $HJ^{\mathfrak{F}}/J^{\mathfrak{F}}$ и $KJ^{\mathfrak{F}}/J^{\mathfrak{F}}$ в перестановочные подгруппы. Так как $J/J^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то, как показано выше, подгруппы $HJ^{\mathfrak{F}}/J^{\mathfrak{F}}$ и $KJ^{\mathfrak{F}}/J^{\mathfrak{F}}$ перестановочны. Отсюда следует, что $J = HKJ^{\mathfrak{F}}$. Ввиду теоремы 3.1 окончательно имеем $HK = KH$. Теорема доказана.

Следствие 3.12. *Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, индуцирующей WK-оператор и содержащей все нильпотентные группы. Пусть H и K — $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы $J = \langle H, K\rangle$. Тогда и только тогда $HK = KH$, когда для всех простых p каждый гомоморфизм группы J в $f(p)$-группу переводит H и K в перестановочные подгруппы.*

Следствие 3.13 [7]. *Субнормальные подгруппы A и B группы G перестановочны тогда и только тогда, когда для всех простых p каждый гомоморфизм группы $\langle A, B\rangle$ в p-группу переводит A и B в перестановочные подгруппы.*

Следствие 3.14. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех π-разложимых групп. Пусть H и K — $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы G, причем $\pi(|H : H^{\mathfrak{F}}|) \subseteq \pi$, $\pi(|K : K^{\mathfrak{F}}|) \subseteq \pi'$. Тогда $HK = KH$.*

Следствие 3.15. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \times \mathfrak{G}_{\pi'}$. Пусть H и K — $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы G, причем $\pi(|H : H^{\mathfrak{F}}|) \subseteq \pi$, $\pi(|K : K^{\mathfrak{F}}|) \subseteq \pi'$. Тогда $HK = KH$.*

Следствие 3.16. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех разрешимых π-разложимых групп. Пусть H и K — $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы G, причем $\pi(|H : H'|) \subseteq \pi$, $\pi(|K : K'|) \subseteq \pi'$. Тогда $HK = KH$.*

Следствие 3.17 [12]. *Пусть A и B — субнормальные подгруппы группы G. Если $|A : A'|$ и $|B : B'|$ взаимно просты, то подгруппы A и B перестановочны.*

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору Л. А. Шеметкову за полезные обсуждения и поддержку в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kegel O. H.* Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten // Arch. Math. 1978. Bd 30, N 3. S. 225–228.
2. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
3. *Каморников С. Ф.* Об одной задаче Кегеля // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 5. С. 51–56.
4. *Wielandt H.* Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen // Math. Z. 1939. Bd 45. S. 209–244.
5. *Brewster D. C.* A criterion for the permutability of subnormal subgroups // J. Algebra. 1975. V. 36, N 1. P. 85–87.
6. *Wielandt H.* Subnormale Untergruppen endlicher Gruppen. Vorlesung an der Universität Tübingen, 1971.
7. *Wielandt H.* Über das Erzeugnis paarweise kosubnormaler Untergruppen // Arch. Math. 1980. Bd 35, N 1–2. S. 1–7.
8. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н.* О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. С. 27–54.
9. *Bryce R. A., Cossey J.* Fitting formations on finite soluble groups // Math. Z. 1972. Bd 127, N 3. S. 217–223.
10. *Wielandt H.* Über den Normalisator subnormalen Untergruppen // Math. Z. 1958. Bd 69, N 8, S. 463–465.
11. *Каморников С. Ф.* Перестановочные субнормальные подгруппы конечных групп // Докл. АН БССР. 1989. Т. 33, № 5. С. 396–399.
12. *Wielandt H.* Vertauschbare nachinvariante Untergruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1957. Bd 21, N 1–2. S. 55–62.
13. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1967.
14. *Lennox J. C., Stonehewer S. E.* Subnormal subgroups of groups. Oxford: Clarendon Press, 1987.
15. *Каморников С. Ф.* Пронормальные проекторы конечных групп. Минск: Изд-во «Университетское», 1986. Вып. 2. С. 80–86.

г. Гомель *Статья поступила 30 ноября 1994 г.*