УДК 535.31

# ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЯ, СФОРМИРОВАННОГО ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

*С. А. Касьянюк*

Предлагается решение методами оптимальной интерполяции задачи восстановления амплитуды освещенности объекта и амплитуды изображения, сформированного оптической системой, по изображениям конечного множества точек.

В статье рассматривается задача оптимального восстановления величины распределения амплитуды освещенности объекта $a(x)$ по значениям величины амплитуды изображения $b(\xi)$ в ограниченном числе точек, например по результатам замера амплитуды изображения в конечном числе точек.

Ограничиваясь для простоты одномерными системами, в которых освещение в плоскости объекта является когерентным и сосредоточенным в конечной области, напишем равенство, связывающее объект $a(x)$ и его изображение $b(\xi)$ [1] (стр. 175)

$$b(\xi) = \int_{\alpha}^{\beta} g(\xi, x)\, a(x)\, dx. \tag{1}$$

Здесь $x$ — координата в одномерном пространстве объектов, $\xi$ — координата в одномерном пространстве изображений $M$, $a(x)$ — амплитуда объекта, $b(\xi)$ — амплитуда изображения, $g(\xi, x)$ — изображающее ядро — отклик системы на точечный объект, $[\alpha, \beta]$ — отрезок, в котором освещенность отлична от нуля. В частности, для идеальной системы формирования изображения с дифракционными ограничениями изображающее ядро для когерентных объектов имеет вид

$$g(\xi, x) = \frac{\sin(\xi - x)}{\xi - x}.$$

Рассмотрим задачу восстановления распределения величины $a(x)$ по значениям величины $b(\xi)$ в точках $\xi_k$, $k = 1, \ldots, n$, $b(\xi_k) = \omega_k$, а следовательно, и восстановления всего изображения $b(\xi)$. Это задача отыскания такой функции $\lambda(x, \omega_1, \ldots, \omega_n) = \lambda(x) \simeq a(x)$, чтобы

$$\mathscr{L}(\xi) = \int_{\alpha}^{\beta} g(\xi, x)\, \lambda(x)\, dx \simeq b(\xi).$$

Для характеристики процесса восстановления величин $a(x)$ и $b(\xi)$ введем величины

$$\left.\begin{aligned} r(\xi, \mathscr{L}) &= \sup |b(\xi) - \mathscr{L}(\xi)|, \\ \rho(\xi) &= \inf r(\xi, \mathscr{L}) \quad \xi \in M, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$T(\mathscr{L}) = \sup_{\xi \in M} r(\xi, \mathscr{L}). \tag{3}$$

Величину $T(\mathscr{L})$ называют нормой погрешности $r(\xi, \mathscr{L})$ на множестве значений $\xi \in M$.

Процесс восстановления $a(x)$ и $b(\xi)$ с помощью $\lambda_0(x)$ назовем оптимальным восстановлением освещения $a(x)$ и изображения $b(\xi)$, если выполняется равенство

$$\rho(\xi) = r(\xi, \mathscr{L}_0), \tag{4}$$

здесь

$$\mathscr{L}_0(\xi) = \int_\alpha^\beta g(\xi, x)\, \lambda_0(x)\, dx.$$

С математической точки зрения рассматриваемая задача является задачей оптимальной интерполяции.

Вопросам оптимальной интерполяции функций посвящены работы [2, 3], часть результатов которых применительно к линейным интегральным операторам мы используем в дальнейшем. В работе [2] доказано, что среди интерполирующих оптимальных функций $\mathscr{L}_0(\xi)$ для (1), когда амплитуда освещенности объекта $a(x)$ удовлетворяет одному из трех ограничений

$$\int_\alpha^\beta |a(x)|^2\, dx \leqslant l^2, \tag{5}$$

$$|a(x)| \leqslant l, \quad x \in [\alpha, \beta], \tag{6}$$

$$\int_\alpha^\beta |a(x)|\, dx \leqslant l, \tag{7}$$

имеются линейные относительно $\omega_k$, $k = 1, \ldots, n$

$$\mathscr{L}_0(\xi) = \sum_{k=1}^n \omega_k D_k(\xi). \tag{8}$$

Более того,

$$\rho(\xi) = \sup_{b(\xi)} |b(\xi)| \tag{9}$$

при условии, что $b(\xi_1) = \ldots = b(\xi_n) = 0$
и

$$\rho(\xi) = \sup_{b(\xi)} \left| b(\xi) - \sum_{k=1}^n \omega_k D_k(\xi) \right|. \tag{10}$$

Таким образом, для отыскания $\rho(\xi)$ достаточно решить задачу математического программирования (9).

Рассмотрим эту задачу для случая, когда амплитуда освещенности объекта $a(x)$ удовлетворяет энергетическому ограничению (5), т. е. рассмотрим задачу отыскания

$$\sup_{a(x)} \left| \int_\alpha^\beta g(\xi, x)\, a(x)\, dx \right|$$

при ограничениях

$$\int_\alpha^\beta g(\xi_k, x)\, a(x)\, dx = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$\int_\alpha^\beta |a(x)|^2\, dx \leqslant l^2.$$

Воспользуемся необходимыми и достаточными условиями [4] совместности системы интегральных относительно $a(x)$ уравнений

$$\int_\alpha^\beta g(\xi, x)\, a(x)\, dx = b(\xi),$$

$$\int_\alpha^\beta g(\xi_k, x)\, a(x)\, dx = 0, \; k = 1, \ldots, n$$

при ограничениях (5), которое сводится к условию неотрицательности всех главных миноров матрицы

$$
\left.\begin{aligned}
&(l^2 A_{ij} - c_i c_j)_{i,\, j=0}^n, \\
&A_{ij} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} g(\xi_i,\, x)\, g(\xi_j,\, x)\, dx,
\end{aligned}\right\} \tag{11}
$$

$$
\xi_0 = x,\ c_0 = b(\xi),\ c_j = 0,\ j = 1,\ \ldots,\ n.
$$

Это приводит к неравенствам

$$
\left.\begin{aligned}
&l^2 \det (A_{ij})_0^n - b^2(\xi) \det (A_{ij})_1^n \geqslant 0, \\
&|b(\xi)|^2 \leqslant l^2 \frac{\det (A_{ij})_0^n}{\det (A_{ij})_1^n},
\end{aligned}\right\} \tag{12}
$$

здесь $\det(A_{ij})$ обозначает определитель матрицы $(A_{ij})$ с элементами $A_{ij}$.

Из неравенства (12) следует, что

$$
\rho(\xi) = l \sqrt{\frac{\det (A_{ij})_0^n}{\det (A_{ij})_1^n}}. \tag{13}
$$

Для отыскания $D_k(\xi)$, удовлетворяющих равенству (10), найдем, следуя [2, 3], величины

$$
\varphi_k(\varepsilon,\ \xi) = \sup_{\substack{b(\xi_i) = \delta_{ik}\varepsilon \\ i=1,\ \ldots,\ n}} b(\xi),
$$

$\delta_{ik}$ — символ Кронекера, и

$$
D_k(\xi) = \left.\frac{\partial \varphi_k(\varepsilon,\ \xi)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.
$$

С этой целью используем необходимые и достаточные условия совместности системы интегральных уравнений

$$
\int\limits_{\alpha}^{\beta} g(\xi,\ x)\, a(x)\, dx = b(\xi),
$$

$$
\int\limits_{\alpha}^{\beta} g(\xi_i,\ x)\, a(x)\, dx = 0,\ \ i = 1,\ \ldots,\ n
$$

при условии (5), которые приводят к неравенствам

$$
\begin{vmatrix}
l^2 A_{00} - b^2(\xi) & l^2 A_{01} & \ldots & l^2 A_{0k} - \varepsilon b(\xi) & \ldots & l^2 A_{0n} \\
l^2 A_{10} & l^2 A_{11} & \ldots & l^2 A_{1k} & \ldots & l^2 A_{1n} \\
\ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
l^2 A_{k0} - \varepsilon b(\xi) & l^2 A_{k1} & \ldots & l^2 A_{kk} - \varepsilon^2 & \ldots & l^2 A_{kn} \\
\ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
l^2 A_{n0} & l^2 A_{n1} & \ldots & l^2 A_{nk} & \ldots & l^2 A_{nn}
\end{vmatrix} \geqslant 0
$$

или

$$
l^4 \det (A_{ij})_0^n - \varepsilon b(\xi) (-1)^k l^2 (\mathfrak{N}_{k0} - \mathfrak{N}_{0k}) - l^2 \varepsilon^2 \mathfrak{N}_{kk} - b^2(\xi) \det (A_{ij})_1^n + 
+ 2\varepsilon^2 b^2(\xi)\, \mathfrak{M}_{kk} \geqslant 0,
$$

где $\mathfrak{N}_{k0}$, $\mathfrak{N}_{0k}$, $\mathfrak{N}_{kk}$ — миноры элементов $A_{k0}$, $A_{0k}$, $A_{kk}$ определителя $\det(A_{ij})_0^n$, $\mathfrak{M}_{kk}$ — минор элемента $A_{kk}$ определителя $\det(A_{ij})_1^n$.

Несложные выкладки показывают, что

$$
\varphi_k(\varepsilon,\ \xi) = \frac{1}{2} [l^2 \det (A_{ij})_1^n - 2\varepsilon^2 \mathfrak{M}_{kk}]^{-1} \{(-1)^{k+1} \varepsilon l^2 (\mathfrak{N}_{k0} + \mathfrak{N}_{0k}) + 
+ l\, [l^4 \det (A_{ij})_0^n \det (A_{ij})_1^n + \varepsilon^2 l^2 (\mathfrak{N}_{k0}^2 + 2\mathfrak{N}_{k0}\mathfrak{N}_{0k} + \mathfrak{N}_{0k}^2 - \mathfrak{N}_{kk} \det (A_{ij})_1^n -
- 2\mathfrak{M}_{kk} \det (A_{ij})_0^n) + 2\varepsilon^4 \mathfrak{M}_{kk}\mathfrak{N}_{kk}]^{1/2}\}
$$

и

$$D_k(\xi) = \frac{(-1)^{k+1}}{2} \frac{\mathfrak{N}_{k0}(\xi) + \mathfrak{N}_{0k}(\xi)}{\det (A_{ij})_1^n}.$$

Таким образом, искомая оптимальная интерполяционная функция имеет вид

$$\mathscr{L}_0(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\omega_k}{2} \frac{\mathfrak{N}_{k0}(\xi) + \mathfrak{N}_{0k}(\xi)}{\det (A_{ij})_1^n} \tag{14}$$

и, как нетрудно видеть, она является интерполяционным в обычном смысле полиномом, удовлетворяющим равенствам

$$\mathscr{L}_0(\xi_k) = \omega_k, \; k = 1, \ldots, n,$$

так как $\mathfrak{N}_{k0}(\xi_j) = \mathfrak{N}_{0k}(\xi_j) = 0, \; j \neq k,$

$$\mathfrak{N}_{k0}(\xi_k) = \mathfrak{N}_{0k}(\xi_k) = (-1)^{k-1} \det (A_{ij})_1^n.$$

Для восстановления величины $a(x)$ получается равенство

$$a(x) = \frac{\rho(\xi)}{\det (A_{ij})_0^n} \begin{vmatrix} g(\xi, x) & g(\xi_1, x) & \ldots & g(\xi_n, x) \\ A_{10} & A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ A_{n0} & A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если $a(x)$ и $b(\xi)$ — комплексные амплитуды объекта и изображения, то предыдущие рассуждения редуцируются на комплексный случай и приводят к аналогичным результатам.

Задача оптимального восстановления при ограничении (6) на $a(x)$ приводит к рассмотрению системы интегральных уравнений

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(\xi, x)\, a(x)\, dx = b(\xi),$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(\xi_k, x)\, a(x)\, dx = 0, \; k = 1, \ldots, n,$$

$$|a(x)| \leqslant l, \quad x \in [\alpha, \beta].$$

При этом оптимальная интерполяция осуществляется на основании следствий общей теории $L$-проблемы моментов [5] (стр. 449) интерполяционной функцией вида

$$\mathscr{L}_0(\xi) = \pm l \left[ \int_{a}^{x_1} g(\xi, x)\, dx + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \int_{x_j}^{x_{j+1}} g(\xi, x)\, dx + (-1)^m \int_{x_m}^{b} g(\xi, x)\, dx \right],$$

где $x_j$, $j = 1, \ldots, m$ удовлетворяют равенствам

$$\int_{a}^{x_1} g(\xi_k, x)\, dx + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \int_{x_j}^{x_{j+1}} g(\xi_k, x)\, dx +$$

$$+ (-1)^m \int_{x_m}^{b} g(\xi_k, x)\, dx = \pm \frac{\omega_k}{l}, \; k = 1, \ldots, n.$$

Оценка погрешности интерполяции из-за громоздкости здесь не приводится, так как ее вычисление не вызывает серьезных затруднений. Величина $a(x)$ для этого случая определяется равенством

$$a(x) = l \operatorname{sign} \left[ A g(\xi, x) + \sum_{k=1}^{n} A_k g(\xi_k, x) \right]$$

с надлежащими $A$, $A_k$.

Задача оптимального восстановления при ограничении (7) на $a(x)$ приводит к интегральным уравнениям

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(\xi, x)\, a(x)\, dx = b(\xi),$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(\xi_k, x)\, a(x)\, dx = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |a(x)|\, dx \leqslant l.$$

Оптимальная интерполяция в этом случае осуществляется на основании следствий общей теории $L$-проблемы моментов [5] (стр. 473) интерполирующей функцией вида

$$\mathscr{L}_0(\xi) = \sum_{j=1}^{r} \gamma_j g(\xi, x_j),$$

где $\gamma_j$ и $x_j$ при $j = 1, \ldots, r$ удовлетворяет равенствам

$$\sum_{j=1}^{r} \gamma_j g(\xi_k, x_j) = \omega_k, \quad \sum_{j=1}^{r} |\gamma_j| = l, \quad k = 1, \ldots, n$$

Этот случай соответствует освещенности объекта в отдельных точках.

В многомерных системах решение аналогично, достаточно одномерные интегралы заменить кратными.

### Литература


[1] Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике. Изд. «Советское радио», М., 1971.
[2] Н. С. Бахвалов. Ж. вычислит. мат. и мат. физ., *11*, 1014, 1971.
[3] К. Ю. Осипенко. Математич. заметки, *12*, 465, 1972.
[4] С. А. Касьянюк. Автоматика и телемеханика, *8*, 169, 1970.
[5] М. Г. Крейн, А. А. Нудельман. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Изд. «Наука», М., 1973.


Поступило в Редакцию 5 ноября 1974 г.