S. F. Kamornikov, On a Class of Lattice Semigroup Functors, *Mat. Zametki*, 2011, Volume 89, Issue 3, 355–364

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm6611

Математические заметки

Том 89 выпуск 3 март 2011

УДК 512.542.4

Об одном классе решеточных подгрупповых функторов

С. Ф. Каморников

В работе строится континуум естественных транзитивных решеточных подгрупповых функторов на классе всех конечных групп, не отвечающих никаким наследственным решеточным формациям. Этот результат представляет собой ответ на вопрос 15.39 из "Коуровской тетради", поставленный автором и А. Ф. Васильевым в связи с их теоремой, утверждающей, что на классе разрешимых групп все такие функторы отвечают наследственным локальным решеточным формациям.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Отправной точкой в исследовании решеточных свойств подгрупп конечной группы явилась известная теорема Виландта [1], устанавливающая, что множество всех субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп в любой конечной группе. Развивая этот результат, Кегель в [2] доказал, что множество всех $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп образует решетку в любой конечной группе, если $\mathfrak{F}$ – наследственная, замкнутая относительно расширений формация. Здесь же Кегель поставил задачу нахождения других классов $\mathfrak{F}$ с этим свойством. Параллельно с ним Шеметков в [3] инициировал следующий вопрос: в каких случаях множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы образует решетку? Этот вопрос в несколько другой редакции вошел в "Коуровскую тетрадь" [4; проблема 9.75].

Определение 1. Формация $\mathfrak{F}$ называется *решеточной*, если множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп в любой конечной группе.

В работе [5] с использованием техники теории формаций перечислены все наследственные локальные решеточные формации. Отметим, что эта задача для конечных разрешимых групп независимо решена Баллестером-Болинше, Дёрком и Перец-Рамош в [6].

Наряду с формационными разрабатывались и другие подходы развития отмеченного выше результата Виландта. Один из них предложен в [7]. Он заключается в аксиоматизации основных свойств субнормальных подгрупп (инвариантность при гомоморфизмах, транзитивность, наследственность в подгруппах) и базируется на понятии естественного транзитивного решеточного функтора.

Пусть A, B – группы, $\varphi\colon A \longrightarrow B$ – эпиморфизм. И пусть Ω и Σ – некоторые системы подгрупп из A и B соответственно. Обозначим через Ω^φ множество

$$\{H^\varphi \mid H \in \Omega\}$$

образов в B всех подгрупп из Ω, а через $\Sigma^{\varphi^{-1}}$ – множество

$$\{H^{\varphi^{-1}} \mid H \in \Sigma\}$$

полных прообразов в A всех подгрупп из Σ.

Если R – подгруппа из A, то через $R \cap \Omega$ обозначим множество $\{R \cap H \mid H \in \Omega\}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп, θ – отображение, ставящее в соответствие каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ некоторую непустую систему $\theta(G)$ ее подгрупп. Следуя [8], будем говорить, что θ – *подгрупповой* $\mathfrak{X}$-*функтор* (или, иначе, θ – подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если выполняется следующее условие абстрактности:

$$(\theta(G))^{\varphi} = \theta(G^{\varphi})$$

для любого изоморфизма φ каждой группы G из $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ – класс всех групп ($\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ – класс разрешимых групп), то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называется *просто подгрупповым функтором* (*разрешимым подгрупповым функтором*, соответственно).

Подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор θ называется:

1) *регулярным*, если $(\theta(A))^{\varphi} \subseteq \theta(B)$ и $(\theta(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \theta(A)$ для любого эпиморфизма $\varphi\colon A \longrightarrow B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$;
2) *естественным*, если θ регулярен и, кроме того, $H \cap \theta(G) \subseteq \theta(H)$ для любой $\mathfrak{X}$-подгруппы H группы $G \in \mathfrak{X}$;
3) *транзитивным*, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ всегда из $S \in \theta(H)$ и $H \in \theta(G) \cap \mathfrak{X}$ следует $S \in \theta(G)$;
4) *решеточным*, если всегда из $H, K \in \theta(G)$ следует, что $H \cap K \in \theta(G)$ и $\langle H, K\rangle \in \theta(G)$.

Определение 2. Подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называется ETP-*функтором*, если он одновременно является естественным, транзитивным и решеточным.

Из свойств субнормальных подгрупп следует, что субнормальный функтор sn, выделяющий в каждой группе G множество всех ее субнормальных подгрупп $sn(G)$, является ETP-функтором.

Все разрешимые ETP-функторы описаны в [7]. Как это ни удивительно, но они исчерпываются $\mathfrak{F}$-субнормальными функторами $sn_{\mathfrak{F}}$, где $\mathfrak{F}$ пробегает все разрешимые наследственные локальные решеточные формации, перечисленные в [5], [6].

Теорема 1 [7]. *Пусть θ – разрешимый* ETP-*функтор. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *класс $\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{S} \mid \theta(G)$ – множество всех подгрупп группы $G\}$ – наследственная локальная формация*;
2) *существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{F} = D_0(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$*;
3) *$\theta(G) = sn_{\mathfrak{F}}(G)$ для любой разрешимой группы G.*

Что касается универсума всех конечных групп, то вытекающий из теоремы 1 вопрос о соотношении ETP-функторов и $\mathfrak{F}$-субнормальных функторов сформулирован в [4] под номером 15.39.

Пусть τ – ЕТР-функтор. Существует ли такая наследственная формация $\mathfrak{F}$, что $\tau(G)$ совпадает с множеством всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп в любой конечной группе G? Другими словами, существует ли наследственная решеточная формация $\mathfrak{F}$, для которой $\tau = sn_{\mathfrak{F}}$?

Отрицательный ответ на этот вопрос предлагается в данной работе. Более того, здесь строится континуум ЕТР-функторов, которые не являются $\mathfrak{F}$-субнормальными ни для какой наследственной формации $\mathfrak{F}$.

В работе рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [8], [9].

2. $(\mathfrak{F}, \mathfrak{B})$-субнормальные подгруппы. Центральное место в работе занимает следующее определение, объединяющее понятия $\mathfrak{F}$-субнормальной и $\mathfrak{F}$-достижимой подгрупп.

Определение 3. Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{B}$ – непустые классы групп. Подгруппа H группы G называется $(\mathfrak{F}, \mathfrak{B})$-*субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i и $H_i/H_{i-1} \in \mathfrak{B}$, либо подгруппа H_{i-1} максимальна в H_i и $H_i/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$. Множество всех $(\mathfrak{F}, \mathfrak{B})$-субнормальных подгрупп группы G будем обозначать $sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$, а подгрупповой функтор, выделяющий в каждой группе G все ее $(\mathfrak{F}, \mathfrak{B})$-субнормальные подгруппы, – через $sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}$.

Замечание. 1) Если $\mathfrak{B}$ – класс единичных групп, то, очевидно, подгруппа H группы G является $(\mathfrak{F}, \mathfrak{B})$-субнормальной тогда и только тогда, когда она $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Определение $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы в классе разрешимых групп введено Картером и Хоуксом в [10]. В произвольном случае оно впервые использовалось Шеметковым в [3].

2) Если $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$ – класс всех групп, а $\mathfrak{F}$ – наследственный класс, то подгруппа H группы G является $(\mathfrak{F}, \mathfrak{B})$-субнормальной в том и только в том случае, когда она $\mathfrak{F}$-достижима (или $\mathfrak{F}$-субнормальна в смысле Кегеля в другой терминологии). Понятие $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы впервые предложено Кегелем в работе [2].

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}, \mathfrak{B}$ – непустые гомоморфы. Пусть H и N – подгруппы группы G, причем $N \trianglelefteq G$. Тогда*

1) *если $H \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$, то $HN/N \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G/N)$ и $HN \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$;*
2) *если $N \subseteq H$, то $H \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$, если и только если $H/N \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G/N)$.*

Доказательство. 1) Так как $H \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$, по определению либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ и $H_i/H_{i-1} \in \mathfrak{B}$, либо подгруппа H_{i-1} максимальна в H_i и $H_i/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$. Если $H = G$, то утверждение леммы очевидно. Рассмотрим цепь подгрупп

$$HN/N = H_0N/N \subseteq H_1N/N \subseteq \cdots \subseteq H_nN/N = G/N.$$

Предположим, что $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ и $H_i/H_{i-1} \in \mathfrak{B}$. Тогда, очевидно, $H_{i-1}N \trianglelefteq H_iN$ и, кроме того, из

$$H_iN/N/H_{i-1}N/N \simeq H_1N/H_{i-1}N \simeq H_i/H_{i-1}(H_i \cap N)$$

следует, что $H_i/H_{i-1}(H_i \cap N) \in \mathfrak{B}$ как гомоморфный образ группы H_i/H_{i-1}. Так как $\mathfrak{B}$ – гомоморф, то $H_iN/N/H_{i-1}N/N \in \mathfrak{B}$.

Пусть теперь H_{i-1} – максимальная подгруппа группы H_i и $H_i/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$. Тогда либо выполнено $H_iN/N = H_{i-1}N/N$ и, значит, $H_iN/N/H_{i-1}N/N \in (1) \subseteq \mathfrak{B}$, либо H_iN/N – максимальная подгруппа группы H_iN/N. В последнем случае из

$$\mathrm{Core}_{H_iN/N}(H_{i-1}N/N) \supseteq \mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1})N/N,$$
$$H_iN/N/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1})N/N \simeq H_i/H_i \cap \mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1})N$$

получаем, что $H_iN/N/\mathrm{Core}_{H_iN/N}(H_{i-1}N/N) \in \mathfrak{F}$. Следовательно, имеем $HN/N \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G/N)$. Отсюда из рассмотрения цепи

$$HN = H_0N \subseteq H_1N \subseteq \cdots \subseteq H_nN = G$$

аналогично показывается, что $HN \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$.

Утверждение 2) следует из утверждения 1). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}, \mathfrak{B}$ – непустые наследственные классы, причем $\mathfrak{F}$ – гомоморф. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если H и K – подгруппы группы G, причем $H \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$, то $H \cap K \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(K)$;*
2) *если $H \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(K)$ и $K \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$, то $H \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$;*
3) *если H, $K \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$, то $H \cap K \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$.*

Доказательство. По определению существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ и $H_i/H_{i-1} \in \mathfrak{B}$, либо подгруппа H_{i-1} максимальна в H_i и $H_i/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим цепь подгрупп

$$H \cap K = H_0 \cap K \subseteq H_1 \cap K \subseteq \cdots \subseteq H_n \cap K = K.$$

Если подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i и $H_i/H_{i-1} \in \mathfrak{B}$, то $H_{i-1} \cap K \trianglelefteq H_i \cap K$. Кроме того, из наследственности класса $\mathfrak{B}$ следует, что $(H_i \cap K)H_{i-1}/H_{i-1} \in \mathfrak{B}$. Отсюда ввиду изоморфизма

$$(H_i \cap K)H_{i-1}/H_{i-1} \simeq H_i \cap K/H_{i-1} \cap K$$

следует, что $H_i \cap K/H_{i-1} \cap K \in \mathfrak{B}$.

Пусть теперь H_{i-1} – максимальная подгруппа группы H_i и $H_i/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать ввиду наследственности класса $\mathfrak{F}$, что $H_{i-1} \cap K$ – максимальная подгруппа группы $H_i \cap K$ (в противном случае можно уплотнить участок между подгруппами $H_{i-1} \cap K$ и $H_i \cap K$ до максимальной цепи). Так как класс $\mathfrak{F}$ является наследственным, то из $H_i/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ следует, что $(H_i \cap K)\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1})/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$.

Так как $H_i \cap K \cap \mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \trianglelefteq H_i \cap K$ и $H_i \cap K \cap \mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \subseteq H_{i-1} \cap K$, то $H_i \cap K \cap \mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \subseteq \mathrm{Core}_{H_i \cap K}(H_{i-1} \cap K)$. Ввиду того, что $\mathfrak{F}$ – гомоморф, имеем $H_i \cap K / \mathrm{Core}_{H_i \cap K}(H_{i-1} \cap K) \in \mathfrak{F}$.

Итак, $H \cap K \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(K)$. Утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) следует из определения $(\mathfrak{F},\mathfrak{B})$-субнормальной подгруппы через соединение соответствующих цепей подгрупп. Утверждение 3) есть следствие утверждений 1) и 2). Лемма доказана.

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, факторгруппа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$. В случае, когда $\mathfrak{F}$ – непустая формация, $\mathfrak{B}$ – непустой класс групп, по определению подгруппа H является $(\mathfrak{F},\mathfrak{B})$-субнормальной в G тогда и только тогда, когда либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ и $H_i/H_{i-1} \in \mathfrak{B}$, либо подгруппа H_{i-1} максимальна в H_i и $(H_i)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация, $\mathfrak{B}$ – непустой класс групп. Если $H \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$, то $H^{\mathfrak{F}} \in sn(G)$.*

Доказательство. Так как $H \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$, по определению существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = G$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа H_{i-1} максимальна в H_i и $(H_i)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$, либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ и $H_i/H_{i-1} \in \mathfrak{B}$.

Пусть $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ и $H_i/H_{i-1} \in \mathfrak{B}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то выполнено $H_{i-1}(H_i)^{\mathfrak{F}}/(H_i)^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, а значит, ввиду изоморфизма

$$H_{i-1}(H_i)^{\mathfrak{F}}/(H_i)^{\mathfrak{F}} \simeq H_{i-1}/H_{i-1} \cap (H_i)^{\mathfrak{F}}$$

имеем $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq (H_i)^{\mathfrak{F}}$. Кроме того, подгруппа $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}$ характеристична в H_{i-1}, а $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$. Поэтому $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq H_i$, а значит, $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq (H_i)^{\mathfrak{F}}$.

Пусть теперь H_{i-1} – максимальная подгруппа группы H_{i-1} и $(H_i)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$. Тогда, ввиду наследственности формации $\mathfrak{F}$, $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq (H_i)^{\mathfrak{F}}$. А так как $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq H_{i-1}$ и $(H_i)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$, то $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq (H_i)^{\mathfrak{F}}$.

Рассмотрим цепь подгрупп

$$H^{\mathfrak{F}} = (H_0)^{\mathfrak{F}} \subseteq (H_1)^{\mathfrak{F}} \subseteq \cdots \subseteq (H_n)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}.$$

В этой цепи $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq (H_i)^{\mathfrak{F}}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того, $G^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq G$. Поэтому $H^{\mathfrak{F}} \in sn(G)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация, $\mathfrak{B}$ – непустой наследственный гомоморф, и пусть все композиционные факторы группы G принадлежат $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $H \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$, когда $H \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$.*

Доказательство. Если подгруппа H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то по определению $H \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$ для любого непустого класса $\mathfrak{B}$.

Пусть $H \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$. Тогда существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = G$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ и $H_i/H_{i-1} \in \mathfrak{B}$, либо подгруппа H_{i-1} максимальна в H_i и $(H_i)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$.

Пусть $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ и $H_i/H_{i-1} \in \mathfrak{B}$. Так как $\mathfrak{B}$ – наследственный гомоморф, не нарушая общности рассуждений, можем считать, что H_i/H_{i-1} – простая группа, принадлежащая $\mathfrak{B}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственна и все композиционные факторы группы G принадлежат $\mathfrak{F}$, то $H_i/H_{i-1} \in \mathfrak{F}$. Уплотним участок между H_{i-1} и H_i указанной выше цепи до максимальной цепи. Так как $H_i/H_{i-1} \in \mathfrak{F}$, то все подгруппы из H_i, содержащие H_{i-1}, являются $\mathfrak{F}$-субнормальными в H_i. Ввиду утверждения 2) леммы 2 (при $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$) $H \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$. Лемма доказана.

3. Новые серии ЕТР-функторов. Нам понадобится в дальнейшем следующая лемма, доказательство которой можно найти в [8]. Напомним только, что класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если выполняются следующие условия:

1) из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$ всегда следует $N \in \mathfrak{F}$;
2) из $G = AB$, где $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Формация, являющаяся классом Фиттинга, называется *формацией Фиттинга*.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F}$-*радикалом* группы G (обозначается через $G_{\mathfrak{F}}$) называется наибольшая нормальная подгруппа из G, принадлежащая $\mathfrak{F}$ (она совпадает с произведением всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп из G).

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *формация $\mathfrak{F}$ является решеточной*;
2) *группа $G = \langle A_1, A_2 \rangle$ принадлежит $\mathfrak{F}$, если A_1, A_2 – $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G*;
3) *$\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга и всякая $\mathfrak{F}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G содержится в $\mathfrak{F}$-радикале этой группы.*

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация, $\mathfrak{B}$ – непустой наследственный гомоморф. Если формация $\mathfrak{F}$ является решеточной, то*

1) *формация $\mathfrak{F}$ является формацией Фиттинга*;
2) *каждая $(\mathfrak{F}, \mathfrak{B})$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа любой группы содержится в $\mathfrak{F}$-радикале этой группы.*

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из леммы 5.

2) Предположим, что утверждение 2) не верно. Пусть G – группа наименьшего порядка, обладающая $(\mathfrak{F}, \mathfrak{B})$-субнормальной $\mathfrak{F}$-подгруппой H, не лежащей в $G_{\mathfrak{F}}$.

Очевидно, G – непростая группа. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда ввиду выбора группы G на основании утверждения 1) данной леммы имеем

$$HN/N \subseteq (G/N)_{\mathfrak{F}} = K/N.$$

Если $K \subset G$, то ввиду выбора группы G, $H \subseteq K_{\mathfrak{F}}$, а значит, $H \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Противоречие. Таким образом, $G/N \in \mathfrak{F}$. Отметим, что наличие в G еще одной минимальной нормальной подгруппы приводит к тому, что $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, а так как формация $\mathfrak{F}$ является локальной, то $C_G(N) \subseteq N$.

Пусть $N \notin \mathfrak{F}$. Предположим, что $HN \subset G$. Тогда ввиду выбора группы G на основании леммы 2 имеем $H \subseteq (HN)_{\mathfrak{F}}$. Так как $N \notin \mathfrak{F}$, $(HN)_{\mathfrak{F}} \cap N = 1$. А так как $H \neq 1$, приходим к противоречию с тем, что $C_G(N) \subseteq N$. Значит, $HN = G$. По определению $(\mathfrak{F}, \mathfrak{B})$-субнормальной подгруппы существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = G$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ и $H_i/H_{i-1} \in \mathfrak{B}$, либо H_{i-1} – максимальная подгруппа группы H_i и $(H_i)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$. В частности, либо $H_{n-1} \trianglelefteq G$ и $G/H_{n-1} \in \mathfrak{B}$, либо подгруппа H_{n-1} максимальна в G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{n-1}$.

Если $H_{n-1} \trianglelefteq G$ и $G/H_{n-1} \in \mathfrak{B}$, то $G = H_{n-1} \times N$. Тогда из $C_G(N) \subseteq N$ следует, что $H_{n-1} = 1$, а значит $H = 1$. Пришли к противоречию. Если подгруппа H_{n-1} максимальна в G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{n-1}$, то ввиду $G^{\mathfrak{F}} = N$ и $H_{n-1}N = G$ получаем $H_{n-1} = G$, что противоречит максимальности H_{n-1} в G.

Итак, $N \in \mathfrak{F}$. Тогда все композиционные факторы группы G принадлежат $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 4 $H \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$. На основании лемм 4 и 5 $H \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная решеточная формация, $\mathfrak{B}$ – непустой наследственный гомоморф. Если $H \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$ и $K \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$, то выполнено $\langle H, K\rangle \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$.*

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой лемма не верна. Тогда в G имеются $(\mathfrak{F}, \mathfrak{B})$-субнормальные подгруппы H и K такие, что $\langle H, K\rangle \notin sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$. Если N – минимальная нормальная подгруппа группы G, то ввиду леммы 1 $HN/N \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G/N)$ и $KN/N \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G/N)$. Ввиду выбора группы G $\langle H, K\rangle N/N \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G/N)$, а значит, на основании леммы 1 $\langle H, K\rangle N \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$. Если $\langle H, K\rangle N \subset G$, то ввиду выбора группы G и леммы 2 $\langle H, K\rangle \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(\langle H, K\rangle N)$. Отсюда на основании леммы 2 $\langle H, K\rangle \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$. Пришли к противоречию.

Итак, $\langle H, K\rangle N = G$. Пусть $D = \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$. Ввиду леммы 3 подгруппы $H^{\mathfrak{F}}$ и $K^{\mathfrak{F}}$ субнормальны в G. По теореме Виландта из [1] $D \in sn(G)$. Кроме того, на основании [11] $N \in N_G(D)$.

Поэтому

$$D^G = D^{\langle H,K\rangle N} = (D^N)^{\langle H,K\rangle} = D^{\langle H,K\rangle} \subseteq \langle H, K\rangle.$$

Если $D \neq 1$, то, взяв N в $\langle H, K\rangle$, придем к противоречию. Следовательно, $D = 1$, $H \in \mathfrak{F}$, $K \in \mathfrak{F}$. Тогда ввиду леммы 6 $\langle H, K\rangle \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Так как $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, а формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то $\langle H, K\rangle \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G_{\mathfrak{F}})$. Кроме того, подгруппа $G_{\mathfrak{F}} = HG_{\mathfrak{F}}$ является $(\mathfrak{F}, \mathfrak{B})$-субнормальной в G. Теперь на основании леммы 2 $\langle H, K\rangle \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}(G)$. Снова пришли к противоречию с выбором группы G. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная решеточная формация, $\mathfrak{B}$ – непустой наследственный гомоморф. Тогда $sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}$ –* ETP*-функтор.*

Доказательство. Ввиду лемм 1 и 2 подгрупповой функтор $sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}$ является естественным и транзитивным. На основании леммы 7 и утверждения 3) леммы 2 $sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}$ – решеточный функтор. Теорема доказана.

Учитывая полученное в [5] описание наследственных локальных решеточных формаций, имеем

Следствие 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $\mathfrak{F} = D_0(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$;
2) *существует такое разбиение* $\{\pi_i \mid i \in I\}$ *множества* $\pi(\mathfrak{H})$ *на попарно непересекающиеся подмножества, что* $\mathfrak{H} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$;
3) $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$ *– наследственная локальная формация, являющаяся классом Фиттинга, нормальным в* $\mathfrak{M}^2$;
4) *всякая нециклическая минимальная не* $\mathfrak{M}$*-группа* G *с единичной подгруппой Фраттини является монолитической с неабелевым цоколем* $N = G^{\mathfrak{M}}$, *причем* G/N *– циклическая примарная группа.*

Тогда для любого непустого наследственного гомоморфа $\mathfrak{B}$ *подгрупповой функтор* $sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}$ *является* ETP-*функтором.*

Покажем теперь, что множество ETP-функторов из теоремы 2 шире множества ETP-функторов вида $sn_{\mathfrak{F}}$, где $\mathfrak{F}$ –наследственная формация. Нам понадобится следующая лемма, доказательство которой можно найти в [12].

Лемма 8. *Для каждой группы* G *найдется натуральное число* n *такое, что* G *изоморфно вкладывается в знакопеременную группу* A_n *степени* n.

Напомним еще, что если $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп, то через $E\mathfrak{X}$ обозначается класс всех групп, обладающих субнормальными рядами, все факторы которых принадлежат $\mathfrak{X}$.

Лемма 9. *Пусть* A *– простая группа и*

$$\mathfrak{X} = (1) \cup (H \mid H \text{ изоморфна простой секции группы } A).$$

Тогда $E\mathfrak{X}$ *– наследственный гомоморф.*

Доказательство. Пусть $G \in E\mathfrak{X}$. Тогда по определению существует субнормальный ряд

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_n = G$$

такой, что $G_i/G_{i-1} \in \mathfrak{X}$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Пусть N – нормальная подгруппа группы G. Рассмотрим ряд подгрупп

$$1 = G_0N/N \subseteq G_1N/N \subseteq \dots \subseteq G_nN/N.$$

Так как

$$G_iN/N/G_{i-1}N/N \simeq G_iN/G_{i-1}N \simeq G_i/G_{i-1}(G_i \cap N),$$

то $G_iN/N/G_{i-1}N/N \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathfrak{X}$ – гомоморф.

Пусть H – подгруппа группы G. Рассмотрим ряд

$$1 = H \cap G_0 \subseteq H \cap G_1 \subseteq \dots \subseteq H \cap G_n = H. \qquad (*)$$

Очевидно, $H \cap G_{i-1} \trianglelefteq H \cap G_i$ для любого $i = 1, \dots, n$, и кроме того,

$$(H \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1} \simeq H \cap G_i/H \cap G_{i-1}.$$

Отсюда и из $G_i/G_{i-1} \in \mathfrak{X}$ следует, что все простые секции группы $H \cap G_i/H \cap G_{i-1}$ принадлежат $\mathfrak{X}$. Уплотняя теперь ряд ($*$) до композиционного ряда, получаем, что $H \in E\mathfrak{X}$. Следовательно, класс $E\mathfrak{X}$ является наследственным. Лемма доказана.

Теорема 3. *Для любого непустого наследственного класса $\mathfrak{F}$, отличного от класса всех групп, существует счетное множество наследственных гомоморфов $\mathfrak{B}_i$ таких, что $sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}_i} \neq sn_{\mathfrak{X}}$ для любого $i \in \mathbb{N}$ и любой наследственной формации $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Так как класс $\mathfrak{F}$ является наследственным и $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{G}$, ввиду леммы 8 найдется натуральное число $k \geqslant 5$ такое, что знакопеременная группа A_k степени k не принадлежит $\mathfrak{F}$. Тогда $A_{k+i} \notin \mathfrak{F}$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathfrak{X}_i$ класс

$$(1) \cup (H \mid H \text{ изоморфна простой секции группы } A_{k+i}).$$

Пусть $\mathfrak{B}_i = E\mathfrak{X}_i$. Ввиду леммы 9 $\mathfrak{B}_i$ – наследственный гомоморф для любого $i \in \mathbb{N}$.

Предположим, что для некоторого $i \in \mathbb{N}$ найдется наследственная формация $\mathfrak{X}$ такая, что $sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}_i}(G) = sn_{\mathfrak{X}}(G)$ для любой группы G. Тогда, в частности, выполнено $sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}_i}(A_{k+i}) = sn_{\mathfrak{X}}(A_{k+i})$. При этом из $A_{k+i} \notin \mathfrak{F}$ и простоты группы A_{k+i} следует, что

$$sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}_i}(A_{k+i}) = \{1, A_{k+i}\}.$$

Отсюда и из равенства $sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}_i}(A_{k+i}) = sn_{\mathfrak{F}}(A_{k+i})$ имеем, что $1 \in sn_{\mathfrak{X}}(A_{k+i})$. Это означает по определению, что существует максимальный ряд подгрупп

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = A_{k+i},$$

в котором $G_{j-1} \supseteq (G_j)^{\mathfrak{X}}$ для любого $j = 1, \dots, n$. В частности, $G_{n-1} \in sn_{\mathfrak{X}}(A_{k+i})$. Но тогда $G_{n-1} \in sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}_i}(A_{k+i})$, а значит, $G_{n-1} = 1$, что невозможно, так как A_{k+i} – простая неабелева группа. Следовательно, $sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}_i} \neq sn_{\mathfrak{X}}$ для любого $i \in \mathbb{N}$ и любой наследственной формации $\mathfrak{X}$. Теорема доказана.

Замечание. Как следует из [5], существует континуум наследственных локальных решеточных формаций $\mathfrak{F}$. Для каждой такой формации $\mathfrak{F}$ и любого наследственного гомоморфа $\mathfrak{B}$ ввиду теоремы 2 подгрупповой функтор $sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}$ является ETP-функтором. На основании теоремы 3 из множества всех наследственных гомоморфов можно выбрать, по крайней мере, счетное множество таких $\mathfrak{B}$, что ETP-функтор $sn_{\mathfrak{F},\mathfrak{B}}$ не является $\mathfrak{X}$-субнормальным ни для одной наследственной формации $\mathfrak{X}$. Тем самым теоремы 2 и 3 дают континуум контрпримеров к вопросу 15.39 из [4].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] H. Wielandt, “Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen”, *Math. Z.*, **45**:1 (1939), 209–244.

[2] O. H. Kegel, “Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten”, *Arch. Math. (Basel)*, **30**:3 (1978), 225–228.

[3] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.

[4] *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп*, 16-е изд., доп., Ин-т матем. СО РАН, Новосибирск, 2006.

[5] А. Ф. Васильев, С. Ф. Каморников, В. Н. Семенчук, “О решетках подгрупп конечных групп”, *Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы*, Ин-т матем. АН Украины, Киев, 1993, 27–54.

[6] A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, M. D. Pérez-Ramos, “On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups”, *J. Algebra*, **148**:1 (1992), 42–52.

[7] А. Ф. Васильев, С. Ф. Каморников, “О функторном методе изучения решеток подгрупп конечных групп”, *Сиб. матем. журн.*, **42**:1 (2001), 30–40.

[8] С. Ф. Каморников, М. В. Селькин, *Подгрупповые функторы и классы конечных групп*, Белорусская наука, Минск, 2003.

[9] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, de Gruyter Expositions in Math., **4**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[10] R. Carter, T. Hawkes, “The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group”, *J. Algebra*, **5**:2 (1967), 175–202.

[11] H. Wielandt, “Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen”, *Math. Z.*, **69** (1958), 463–465.

[12] В. С. Монахов, “Классы конечных групп с изоордными биекторами”, *Вопросы алгебры*, 1987, № 3, 76–78.

С. Ф. Каморников
Гомельский филиал Международного института трудовых и социальных отношений, Беларусь
E-mail: sfkamornikov@mail.ru

Поступило
27.10.2008