S. F. Kamornikov, M. V. Sel'kin, On the influence of maximal subgroups of prime power index on the structure of a finite group, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1995, Number 6, 25–29

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1995 МАТЕМАТИКА № 6 (397)

УДК 512.542

С.Ф. КАМОРНИКОВ, М.В. СЕЛЬКИН

О ВЛИЯНИИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП ПРИМАРНОГО ИНДЕКСА НА СТРОЕНИЕ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Хорошо известно, что каждая максимальная подгруппа конечной разрешимой группы имеет примарный индекс. Обращая этот результат, Гуральник [1] показал, что индекс любой максимальной подгруппы конечной группы G примарен в том и только том случае, когда либо группа G разрешима, либо $G/S(G) \simeq PSL(2,7)$ (через $S(G)$ обозначается наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G). Отметим, что доказательство этого результата опирается на классификацию конечных простых групп.

В [2], [3] исследовалась более общая, нежели в [1], ситуация: здесь условие примарности индексов налагается лишь на те максимальные подгруппы группы G, которые не содержат ее некоторую нормальную подгруппу K. При этом показывается, что либо K разрешима, либо $K/S(K) \simeq PSL(2,7)$. В данной работе этот результат обобщается в двух направлениях. Во-первых, требование нормальности подгруппы K ослабляется до субнормальности. Во-вторых, показывается, что отмеченное ограничение на индексы максимальных подгрупп существенно влияет не только на строение подгруппы K, но и на строение самой группы G. Это позволяет в следующем смысле обратить указанный результат из [2], [3].

ТЕОРЕМА. *Пусть K – субнормальная подгруппа конечной группы G. Тогда и только тогда каждая максимальная подгруппа из G, не содержащая K, имеет примарный индекс, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

1) *K разрешима;*

2) *группа $G/S(K^G)$ представима в виде $G/S(K^G) = K^G/S(K^G)\times H/S(K^G)$, причем $K^G/S(K^G) \cong$ $\cong PSL(2,7)$ и $H=H^f$, где $f=\mathrm{form}\,PSL(2,7)$.*

Теорема применяется для изучения свойств пересечения максимальных подгрупп непримарного индекса, что продолжает исследования по этому вопросу, начатые одним из авторов в работах [4]–[6]. В частности, в [6] изучались свойства пересечений максимальных подгрупп, имеющих простой и составной индексы.

В работе рассматриваются только конечные группы. Используемые определения и обозначения стандартны, их можно найти в ([7],с.248). Напомним лишь некоторые. Если f – непустая формация групп, то через G^f обозначается f-корадикал группы G, т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, факторгруппа по которой принадлежит f. Через $\mathrm{form}\,PSL(2,7)$ обозначается пересечение всех формаций, содержащих $PSL(2,7)$. Отметим, что каждая группа из $\mathrm{form}\,PSL(2,7)$ есть прямое произведение групп, изоморфных $PSL(2,7)$. Если K — подгруппа группы G, то $K^G=\langle K^x \mid x\in G\rangle$ – нормальное замыкание K в G.

ЛЕММА. *Пусть K – субнормальная подгруппа группы G. Если каждая максимальная подгруппа из G, не содержащая K, имеет примарный индекс, то*

$$G/S(K^G) = K^G/S(K^G)\times H/S(K^G),$$

причем либо $K^G/S(K^G)=1$, либо $K^G/S(K^G)\cong PSL(2,7)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $K^G=L$. Предположим, что подгруппа K разрешима. Тогда ввиду следствия 7.7.2 из [7] L – разрешимая группа. В этом случае, очевидно, лемма справедлива.

Итак, подгруппа K не является разрешимой. Поэтому существует, по крайней мере, одна максимальная подгруппа группы G, не содержащая L. Пусть M — одна из таких подгрупп. Так как $L=\langle K^x \mid x\in G\rangle$, то найдется такой $x\in G$, что M не содержит K^x. Тогда $M^{x^{-1}}$ не содержит K. По условию леммы $|G:M^{x^{-1}}|=p^\alpha$ для некоторого простого p, но тогда $|G:M|=p^\alpha$. Таким образом, для L все условия леммы выполняются. Поэтому будем считать далее, что $K\lhd G$. Покажем, что

$$G/S(K) = K/S(K)\times H/S(K),$$

где $K/S(K)\cong PSL(2,7)$. Применим индукцию по величине суммы $|G|+|K|$.

Предположим, что $S(K)=R\neq 1$. Тогда факторгруппа $\overline{G}=G/R$ имеет нормальную подгруппу $\overline{K}=K/R$. Если максимальная подгруппа $\overline{M}=M/R$ группы $\overline{G}$ не содержит $\overline{K}$, то максимальная подгруппа M группы G не содержит K. Значит, индекс $|\overline{G}:\overline{M}|=|G:M|$ примарен. Таким образом, для группы $\overline{G}$ и ее нормальной подгруппы $\overline{K}$ выполняются все условия леммы. Так как $|\overline{G}|+|\overline{K}|<|G|+|K|$, то по предположению индукции имеем $\overline{G}=\overline{K}\times\overline{H}$, где либо $\overline{K}=1$, либо $\overline{K}\cong PSL(2,7)$. Отсюда следует, что

$$G/S(K) = K/S(K)\times H/S(K),$$

причем либо $K/S(K)=1$, либо $K/S(K)\cong PSL(2,7)$.

Значит, далее полагаем $S(K)=1$. Предположим, что найдется нормальная в G подгруппа N, которая собственно содержится в K. Очевидно, $S(N)\subseteq S(K)=1$. Кроме того, любая максимальная в G подгруппа M, не содержащая N, не содержит K. Поэтому индекс $|G:M|$ примарен. Так как $|G|+|N|<|G|+|K|$, то ввиду выбора группы G и ее подгруппы K имеем $G=N\times H_1$, где $N\cong PSL(2,7)$. Очевидно, $H_1=C_G(N)$ и поэтому $G=N\times C_G(N)$. В силу тождества Дедекинда $K=N\times(K\cap C_G(N))$, причем $K\cap C_G(N)\lhd G$. Как и для N, показывается, что $F=K\cap C_G(N)\cong$ $\cong PSL(2,7)$ и $G=F\times C_G(F)=N\times F\times C_G(NF)=K\times C_G(K)$. По лемме 3 из [2] диагональ D в $N\times F=K$ является максимальной подгруппой группы K, причем $|K:D|=168$. Поэтому подгруппа $M=D\times C_G(NF)$ максимальна в G и $|G:M|=168$. Очевидно, M не содержит K. Пришли к противоречию с условием леммы.

Итак, K – минимальная нормальная подгруппа группы G. Пусть M – максимальная подгруппа G, не содержащая K. По условию леммы $|G:M|=p^\alpha$, где p – некоторое простое число. Кроме того, $G=MK$ и $p^\alpha=|G:M|=|K:K\cap M|$, т.е. p делит порядок K. Пусть P – силовская p-подгруппа K. Ввиду леммы Фраттини $KN_G(P)=G$, поэтому для максимальной в G подгруппы

S, содержащей $N_G(P)$, индекс $|G:S|=|K:K\cap S|$ будет взаимно прост с p. По условию леммы $|G:S|=q^\beta$, где q – простое число, отличное от p.

Итак, индексы подгрупп $M\cap K$ и $S\cap K$ в K взаимно просты и равны соответственно p^α и q^β. Так как K – минимальная нормальная подгруппа G, то $K=L_1\times L_2\times\ldots\times L_t$ – прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что L_1 не содержится в M. Тогда $|L_1:L_1\cap M| = |L_1(K\cap M):(K\cap M)|$ делит $|K:K\cap M|=p^\alpha$. Таким образом, простая группа L_1 содержит подгруппу $L_1\cap M$ примарного индекса. Так как подгруппы $L_1,L_2,\ldots,L_t$ сопряжены, то можем считать, что L_1 не содержится в S, а поэтому $L_1\cap S$ будет иметь в L_1 примарный индекс q^γ. Следовательно, простая группа L_1 содержит подгруппы $M\cap L_1$ и $S\cap L_1$ взаимно простых примарных индексов. По теореме Гуральника [1] $L_1\cong PSL(2,7)$.

Допустим, что $L_1C_G(L_1)\neq N_G(L_1)$. Тогда $N_G(L_1)/C_G(L_1)\cong \mathrm{Aut}\,L_1\cong PGL(2,7)$. Пусть T – силовская 2-подгруппа группы K. По лемме Фраттини $G=KN_G(T)$. Теперь, основываясь на тождестве Дедекинда, заключаем $N_G(L_1)=K(N_G(L_1)\cap N_G(T))$, т.е. существует элемент $x\in N_G(T)$, который на L_1 индуцирует внешний автоморфизм. Пусть F – максимальная подгруппа группы G, содержащая $N_G(T)$. Если $L_1\subseteq F$, то $K=L_1^G=L_1^{KF}=L_1^F\subseteq F$, что противоречит равенству $G=KF$. Следовательно, $L_1\cap F$ – собственная в L_1 подгруппа, допустимая относительно внешнего автоморфизма, индуцированного элементом x. В этом случае $21=|L_1:L_1\cap F|=|G:F|$, что противоречит условию леммы.

Таким образом, $L_1C_G(L_1)=N_G(L_1)$. Пусть $t>1$. В этом случае ввиду леммы 2 из [2] $G=KC_G(D)$, где D – некоторая диагональ в K. Пусть M – максимальная в G подгруппа, надстроенная над $DC_G(D)$. Тогда $M=(M\cap K)C_G(D)$. Так как $D\subseteq M\cap K$, то по лемме 3 из [2] подгруппа $M\cap K$ имеет в K индекс, равный 168^n для некоторого натурального n. Кроме того, $|G:M|=|K:M\cap K|=168^n$ и M не содержит K – противоречие с условием леммы.

Итак, $t=1$, т.е. $L_1=K$. В этом случае $G=K\times C_G(K)$ и $K\cong PSL(2,7)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть каждая максимальная подгруппа группы G, не содержащая K, имеет примарный индекс. Пусть подгруппа K не является разрешимой. Ввиду леммы имеем

$$G/S(K^G) = K^G/S(K^G)\times H/S(K^G),$$

где $K^G/S(K^G)\cong PSL(2,7)$. Обозначим $K^G=L$. Предположим, что H^f – собственная подгруппа H. Если $H^f\neq 1$, то, переходя к факторгруппе G/H^f, имеем

$$\overline{G}/S(\overline{L}) = \overline{L}/S(\overline{L})\times\overline{H}/S(\overline{L}),$$

где $\overline{G}=G/H^f$, $\overline{L}=LH^f/H^f$, $\overline{H}=H/H^f$. Так как $|\overline{G}|<|G|$, то по индукции $\overline{H}^f=\overline{H}$. Ввиду леммы 1.2 из [7] $\overline{H}^f=(H/H^f)^f=H^f/H^f$. Поэтому $H/H^f=H^f/H^f$, а значит, $H=H^f$ – противоречие.

Следовательно, $H^f=1$, а значит, $H\in f$. В этом случае $S(L)=1$ и $G=K\times H$, где $K\cong PSL(2,7)$, $H\in \mathrm{form}\,PSL(2,7)$. Из строения формации f имеем $H=H_1\times\ldots\times H_t$, где $H_i\cong PSL(2,7)$ для всех $i=1,2,\dots,t$. Пусть D – диагональ группы $G=K\times H_1\times\dots\times H_t$. Пусть $t>1$. Тогда по лемме 3 из [2] $M=DH_1\dots H_{t-1}$ – максимальная подгруппа G, не содержащая K. Индекс этой подгруппы в G равен 168, в противоречие с условием. Значит, $t=1$. Тогда сама подгруппа D максимальна в G. Так как $|G:D|=168$ и D не содержит K, то снова приходим к противоречию. Значит, остается положить $H^f=H$.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть $K \triangleleft\triangleleft G$ и выполняется одно из утверждений 1) или 2) теоремы. Если подгруппа K разрешима, то, очевидно, любая максимальная подгруппа группы G, не содержащая K, имеет примарный индекс.

Значит, подгруппа K не является разрешимой. Обозначим $L=K^G$. Тогда $G/S(L)=L/S(L)\times H/S(L)$, $L/S(L)\cong PSL(2,7)$ и $H=H^f$. Пусть M – максимальная подгруппа группы G, не содержащая L. Если M не содержит $S(L)$, то индекс $|G:M|$ примарен. Поэтому $M\supseteq S(L)$. Если $S(L)\neq 1$, то, переходя к факторгруппе $G/S(L)$, получаем по индукции, что индекс $|G:M|=|G/S(L):M/S(L)|$ примарен. Значит, $S(L)=1$. В этом случае $K=L\cong PSL(2,7)$, $G=K\times H$, $H^f=H$.

Предположим, что M не содержит H. Тогда $N_G(M\cap H)\supseteq\langle M,K\rangle=G$, т.к. M – максимальная подгруппа G и M не содержит K. Если $M\cap H\neq 1$, то по индукции индекс $|G:M|=|G/M\cap H:M/M\cap H|$ примарен. Поэтому полагаем далее, что $M\cap H=1$. Тогда из максимальности M в G имеем $M\cong MH/H\cong KH/H\cong K\cong PSL(2,7)$. Допустим, что $M\cap K\neq 1$, тогда из $K\triangleleft G$ следует $M\cap K\triangleleft M$, что противоречит простоте группы M. Значит, $M\cap K=1$. Но тогда $H\cong HK/K=MK/K\cong M/M\cap K\simeq M\simeq PSL(2,7)$. Пришли к противоречию с условием $H=H^f$.

Значит, M содержит H. Тогда M/H – максимальная подгруппа группы G/H. Так как $G/H\simeq PSL(2,7)$, то либо $|G:M|=8$, либо $|G:M|=7$.

Итак, индекс любой максимальной подгруппы группы G, не содержащей K, примарен. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть K – нормальная подгруппа группы G. Тогда и только тогда каждая максимальная подгруппа из G, не содержащая K, имеет примарный индекс, когда выполняется одно из следующих утверждений:

1) K разрешима;

2) $G/S(K)=K/S(K)\times H/S(K)$, причем $K/S(K)\simeq PSL(2,7)$, $H=H^{\mathrm{form}\,PSL(2,7)}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть K – субнормальная подгруппа группы G. Если каждая максимальная подгруппа группы G, не содержащая K, имеет примарный индекс, то либо K разрешима, либо $K/S(K)\simeq PSL(2,7)$.

Обозначим через $\Delta_{\overline{pr}}(G)$ пересечение всех максимальных подгрупп группы G, имеющих непримарный индекс. Если все максимальные подгруппы группы G имеют примарный индекс, то полагаем $\Delta_{\overline{pr}}(G)=G$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\Delta=\Delta_{\overline{pr}}(G)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

1) Δ разрешима;

2) $G/S(\Delta)=\Delta/S(\Delta)\times H/S(\Delta)$, причем $\Delta/S(\Delta)\simeq PSL(2,7)$, $H=H^{\mathrm{form}\,PSL(2,7)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Guralnick R. *Subgroups of prime power index in simple group* // J. Algebra. – 1983. – V.81. – P.65–76.

2. Монахов В.С., Селькин М.В. *О разрешимости нормальных подгрупп конечных групп* // Матем. заметки. – 1992. – Т.51. – № 3. – С.85–90.

3. Monakhov V.S., Selkin M.V. *Building of normal subgroups depending on maximal subgroups* // Preprint № 1. Gomel State University. – 1993. – 12 p.

4. Селькин М.В. *О максимальных подгруппах конечных групп* // ДАН БССР. – 1974. – Т.18. – № 11. – С.969–972.

5. Селькин М.В. *О влиянии максимальных подгрупп на формационное строение конечных групп* // Конечные группы. – Минск, 1975. – С.151–163.

6. Селькин М.В. *Конечные группы с заданными f–абнормальными максимальными подгруппами* // Конечные группы. – Минск, 1978. – С.143–151.

7. Шеметков Л.А. *Формации конечных групп*. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

Гомельский государственный университет

Поступила 08.07.1993