О ВЛИЯНИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ — ДУФФИНГА

С.П. Жогаль[1], **С.И. Жогаль**[2], **Р.И. Коржик**[1],

[1] Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
zhogal@gsu.by
[2] Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

Система связанных автоколебательных осцилляторов ван дер Поля — Дуффинга является одной из базовых моделей теории колебаний, иллюстрирующей явление синхронизации и сопутствующие эффекты [1]. При исследовании дополнительно вводится запаздывание по времени δ_1 и δ_2 в первый и второй осцилляторы соответственно. Математическая модель системы имеет вид:

$$\ddot{x} - (\lambda_1 - x^2(t-\delta_1))\dot{x}(t-\delta_1) + \beta x^3(t-\delta_1) + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \varepsilon(x-y) + \mu(\dot{x}-\dot{y}) = 0,$$

$$\ddot{y} - (\lambda_2 - y^2(t-\delta_2))\dot{y}(t-\delta_2) + \beta y^3(t-\delta_2) + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \varepsilon(y-x) + \mu(\dot{y}-\dot{x}) = 0. \qquad (1)$$

После последовательности преобразований при допущении, что в нулевом приближении коэффициенты связи μ, ε и параметры неизохронности β и неидентичности $\rho = (\lambda_1 - \lambda_2)/2$ малы по сравнению с единицей, получим систему уравнений для амплитуд r_1 и r_2 колебаний парциальных звеньев системы

$$\dot{r}_1 = r_1\cos\delta_1 - r_1^3\cos\delta_1, \quad \dot{r}_2 = r_2\cos\delta_2 - r_2^3\cos\delta_2. \qquad (2)$$

Этим уравнениям отвечает установившееся движение по одинаковым орбитам радиуса $r_1 = r_2 = 1$. Перейдем теперь к возмущенным движениям. В первом приближении можно положить $r_1 = 1 + \tilde{r}_1$ и $r_2 = 1 + \tilde{r}_2$, где тильдой отмечены малые возмущения соответствующих переменных. Подставим сначала эти соотношения в уравнения амплитуд системы с ненулевыми коэффициентами. Пренебрегая членами высшего порядка, получим

$$\dot{\tilde{r}}_1 = -2\tilde{r}_1\cos\delta_1 + \rho\cos\delta_1 + 3\beta\sin\delta_1 + \varepsilon\sin\varphi + \mu(\cos\varphi - 1),$$

$$\dot{\tilde{r}}_2 = -2\tilde{r}_2\cos\delta_2 - \rho\cos\delta_2 + 3\beta\sin\delta_2 - \varepsilon\sin\varphi + \mu(\cos\varphi - 1), \qquad (3)$$

где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность фаз парциальных звеньев системы. Обратим внимание, что возмущения амплитуд сильно демпфированы, поэтому их значения очень быстро выходят на стационарный уровень. Этот факт позволяет вычислить возмущения, определяющие стационарные орбиты осцилляторов:

$$\tilde{r}_1 = \frac{\mu(\cos\varphi - 1) + 3\beta\sin\delta_1 + \varepsilon\sin\varphi + \rho\cos\delta_1}{2\cos\delta_1},$$

$$\tilde{r}_2 = \frac{\mu(\cos\varphi - 1) + 3\beta\sin\delta_2 - \varepsilon\sin\varphi - \rho\cos\delta_2}{2\cos\delta_2}. \qquad (4)$$

Подставим теперь выражения $r_1 = 1 + \tilde{r}_1$ и $r_2 = 1 + \tilde{r}_2$ в фазовое уравнение системы

$$\dot{\varphi} = \tilde{r}_2\sin\delta_2 - \tilde{r}_1\sin\delta_1 + \rho\sin\delta_2 + \rho\sin\delta_1 + 2\varepsilon(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1)\cos\varphi + 2\mu\sin\varphi + \Delta, \qquad (5)$$

с учетом соотношений (4) получим

$$\dot{\varphi} = \frac{\mu(\cos\varphi - 1) + 3\beta\sin\delta_2 - \varepsilon\sin\varphi - \rho\cos\delta_2 + \cos\delta_2}{\cos\delta_2}\sin\delta_2 -$$

$$-\frac{\mu(\cos\varphi-1)+3\beta\sin\delta_1+\varepsilon\sin\varphi+\rho\cos\delta_1+\cos\delta_1}{\cos\delta_1}\sin\delta_1-((1-\rho)\sin\delta_2-(1+\rho)\sin\delta_1)+$$

$$+3\beta(3\beta(\sin\delta_2-\sin\delta_1)-2\varepsilon\sin\varphi-\rho(\cos\delta_2+\cos\delta_1)+\cos\delta_2-\cos\delta_1)+2\varepsilon\cos\varphi\times$$

$$\times\left(\frac{\mu(\cos\varphi-1)(\cos\delta_1-\cos\delta_2)+3\beta(\sin\delta_2\cos\delta_1-\sin\delta_1\cos\delta_2)}{\mu(\cos\varphi-1)(\cos\delta_2+\cos\delta_1)+\varepsilon\sin\varphi(\cos\delta_2-\cos\delta_1)+2\rho\cos\delta_1\cos\delta_2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon\sin\varphi(\cos\delta_2+\cos\delta_1)-2\rho\cos\delta_1\cos\delta_2}{\mu(\cos\varphi-1)(\cos\delta_2+\cos\delta_1)+\varepsilon\sin\varphi(\cos\delta_2-\cos\delta_1)+2\rho\cos\delta_1\cos\delta_2}\right)-2\mu\sin\varphi+\Delta.$$

Это и есть искомое фазовое уравнение. Его анализ позволяет выяснить характер динамики относительной фазы слабо связанных осцилляторов в зависимости от всех существенных факторов: диссипативной связи, инерционной связи, параметров неизохронности, неидентичности и запаздываний.

Литература

1. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. *Нелинейные колебания.* М.: Физматлит, 2002. 292 с.

2. Кузнецов А. П., Станкевич Н. В., Тюрюкина Л. В. *Связанные осцилляторы ван дер Поля и ван дер Поля — Дуффинга: фазовая динамика и компьютерное моделирование* // Изв. вузов «Прикладная нелинейная динамика». 2008. № 4. Т. 16. С. 101–136.

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ — ПУССЕНА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.И. Кашпар

Институт технологии металлов НАН Беларуси, Могилев, Беларусь
alex.kashpar@tut.by

Исследуется задача [1–3] :

$$\ddot{\mathbf{X}}=\mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{X}}+\dot{\mathbf{X}}\mathbf{B}(t)+\lambda(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}+\mathbf{X}\mathbf{B}_1(t))+\lambda(\mathbf{A}_2(t)\dot{\mathbf{X}}+\dot{\mathbf{X}}\mathbf{B}_2(t))+\mathbf{F}(t), \qquad (1)$$

$$\mathbf{X}(0,\lambda)=\mathbf{M},\quad \mathbf{X}(\omega,\lambda)=\mathbf{N},\quad \mathbf{X}\in\mathbb{R}^{n\times m}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{A}_i(t)$, $\mathbf{B}_i(t)$ $(i=1,\ 2)$ — матрицы класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей; $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ — заданные вещественные матрицы; $\omega>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

В данной работе, являющейся продолжением и развитием [1–3], разработан алгоритм построения решения задачи (1), (2) на основе метода [4, гл. I] и метода Пуанкаре (малого параметра) применительно к соответствующей эквивалентной интегральной задаче

$$\mathbf{X}=\mathbf{M}+\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}+\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}),\quad \mathbf{Y}=\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}+\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}),$$

где

$$\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t)=\int_0^t\mathbf{U}(\tau)(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M}))\mathbf{V}(\tau)\,d\tau,\quad \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t)=\mathbf{U}(t)(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M}))\mathbf{V}(t);$$

$\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathbf{\Phi}$ — интегральные операторы [5], конструируемые по методике [4]; $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ — фундаментальные матрицы уравнений $\dot{\mathbf{U}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{U}$, $\dot{\mathbf{V}}=\mathbf{V}\mathbf{B}(t)$.