УДК 517.9:531.36

С. И. ЖОГАЛЬ

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА—ФОККЕРА—ПЛАНКА ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СЛУЧАЙНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

The sufficient conditions of analytic integration of Kolmogorov — Fokker — Planck equations for the quasilinear oscillatory systems with different types of external periodic forces and unparametric random effect are investigated in this paper.

Исследование влияния случайных возмущений на колебательные системы является исключительно важной и актуальной проблемой. Во многих современных задачах механики, теории управления, радиофизики и электроники основную роль играют воздействия, которые не могут быть описаны детерминированными функциями времени. Под действием этих возмущений в динамических системах будут наблюдаться случайные процессы, изучение которых является предметом статистической динамики.

При решении подобного класса задач весьма эффективным является применение метода марковских диффузионных процессов в сочетании с асимптотическими методами нелинейной механики, особенно для квазилинейных колебательных систем с одной степенью свободы. Однако применение данного метода крайне затруднено вследствие сложности задачи получения аналитического решения соответствующего уравнения Колмогорова—Фоккера—Планка (КФП). В данной работе определяется один, достаточно широкий класс неавтономных квазилинейных колебательных систем, удовлетворяющих полученному нами достаточному условию интегрируемости соответствующих уравнений КФП.

Рассмотрим следующую неавтономную механическую квазилинейную систему с одной степенью свободы:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon f(t, x, \dot{x}) + \sqrt{\varepsilon}\, g(t, x, \dot{x})\dot{\xi}(t), \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, ω — частота собственных колебаний системы, $\dot{\xi}(t)$ — случайный процесс типа «белого шума», f, g — дифференцируемые функции своих аргументов, периодические по t. Используя замену переменных:

$$\begin{gathered} x(t) = a(t)\cos\psi(t), \\ \dot{x}(t) = -\omega a(t)\sin\psi(t), \ \psi(t) = \omega t + \theta(t), \end{gathered} \tag{2}$$

где $a(t)$, $\theta(t)$ — медленно меняющиеся функции времени, и применяя формулу Ито дифференцирования сложной случайной функции, приходим к следующей системе стохастических дифференциальных уравнений, определяющих двухмерный марковский случайный процесс $\{a(t), \theta(t)\}$ [1]:

$$da(t) = \Big[-\frac{\varepsilon}{\omega} f(t, a\cos\psi, -\omega a\sin\psi)\sin\psi + \frac{\varepsilon g^2(t, a\cos\psi, -\omega a\sin\psi)}{2\omega^2 a}\cos^2\psi\Big]dt -$$

$$- \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega} g(t, a\cos\psi, -\omega a\sin\psi)\sin\psi d\xi(t), \tag{3}$$

$$d\theta(t) = \Big[-\frac{\varepsilon}{\omega a} f(t, a\cos\psi, -\omega a\sin\psi)\cos\psi - \frac{\varepsilon g^2(t, a\cos\psi, -\omega a\sin\psi)}{\omega^2 a^2}\times$$

$$\times\sin\psi\cos\psi\Big]dt - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{a\omega} g(t, a\cos\psi, -\omega a\sin\psi)\cos\psi d\xi(t).$$

Соответствующее уравнение КФП для стационарной плотности вероятностей амплитуды и фазы колебаний $w(a, \theta)$ после применения к нему метода усреднения (что вполне оправдано, поскольку система (3) имеет стандартную по Н. Н. Боголюбову форму [2]) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial a}(K_1(a,\theta)w)+\frac{\partial}{\partial\theta}(K_2(a,\theta)w)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(K_{11}(a,\theta)w)+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}(K_{12}(a,\theta)w)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(K_{22}(a,\theta)w),\tag{4}$$

где

$$K_1(a,\theta)=\underset{t}{M}\left[-\frac{1}{\omega}f\sin\psi+\frac{g^2\cos^2\psi}{2\omega^2 a}\right],$$

$$K_2(a,\theta)=\underset{t}{M}\left[-\frac{1}{\omega a}f\cos\psi-\frac{g^2\sin2\psi}{2\omega^2 a^2}\right],$$

$$K_{11}(a,\theta)=\underset{t}{M}\left[\frac{1}{\omega^2}g^2\sin^2\psi\right],\tag{5}$$

$$K_{12}(a,\theta)=\underset{t}{M}\left[\frac{1}{2a\omega^2}g^2\sin2\psi\right],$$

$$K_{22}(a,\theta)=\underset{t}{M}\left[\frac{1}{a^2\omega^2}g^2\cos2\psi\right],$$

$\underset{t}{M}$ — оператор усреднения.

Получение аналитического решения уравнения КФП (4) для систем вида (1) в большинстве практических случает невозможно. Для автономных систем, т. е. в случае, когда

$$f(t,x,\dot{x})=f(x,\dot{x}),$$
$$g(t,x,\dot{x})=g(x,\dot{x}),\tag{6}$$

коэффициенты усредненного уравнения КФП будут зависеть только от амплитуды колебаний a, представляется возможным рассмотрение отдельного уравнения КФП для стационарной амплитуды колебаний, допускающего аналитическое решение [1, 2].

Однако существует широкий класс неавтономных систем вида (1), встречающихся при решении многих практических задач механики и математической физики, для которых удается получить аналитическое решение уравнения КФП (4). Это класс систем, соответствующие уравнения КФП (4) которых обладают условием потенциальности [3].

Рассмотрим частный случай системы типа (1), случайные колебания в которой могут быть описаны следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x}+\omega^2x=\varepsilon h(x,\dot{x})+\varepsilon\sum_{s=0}^{S}P_s\cos(\Omega_s\omega t)x^s+$$

$$+\varepsilon\sum_{k=1}^{K}R_k\cos(\zeta_k\omega t)\dot{x}^k+\sqrt{\varepsilon}\,\sigma\xi(t),\tag{7}$$

где $h(x,\dot{x})$ — дифференцируемая функция своих аргументов, P_s, R_k, σ, Ω_s, ζ_k, ω — положительные постоянные, $\xi(t)$ — «белый шум» единичной интенсивности, $\varepsilon>0$ — малый параметр.

Колебательные системы, подобные (7), подверженные различным типам внешнего периодического воздействия и непараметрическому случайному возмущению, довольно часто являются предметом многих прикладных исследований [4—6]. Класс систем вида (7), для которых выполняются достаточные условия аналитической интегрируемости соответствующего уравнения КФП (4), может быть определен с помощью доказанной нами следующей теоремы.

Теорема. Пусть для системы (7) выполняются условия:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left\{a\, \underset{t}{M}\left[\, h\,(a\cos\psi,\ \ -a\omega\sin\psi\,)\cos\psi\,\right]\right\}=0, \tag{8}$$

$$\Omega_s \neq s-(2n-1),\ n=1,\ 2,\ \dots,\ \left[\ \frac{s}{2}\ \right]. \tag{9}$$

Тогда уравнение КФП (4) будет удовлетворять условию потенциальности:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{K_{11}}\left(K_1-\frac{1}{2}\frac{\partial K_{11}}{\partial a}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{1}{K_{22}}\left(K_2-\frac{1}{2}\frac{\partial K_{22}}{\partial\theta}-\frac{\partial K_{12}}{\partial a}\right)-\frac{2K_{12}}{K_{11}K_{22}}\left(K_1-\frac{1}{2}\frac{\partial K_{11}}{\partial a}\right)\right] \tag{10}$$

и, следовательно, решение $w(a,\ \theta)$ уравнения (4) может быть найдено в квадратурах.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для усредненного уравнения КФП, согласно (5), имеем:

$$K_1(a,\ \theta)=\underset{t}{M}\left[-\frac{1}{\omega}\left\{h\,(a\cos\psi,\ \ -a\omega\sin\psi\,)+\sum_{s=0}^{S}P_s\cos(\Omega_s\omega t)a^s\cos^s\psi+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{K}R_k\cos(\zeta_k\omega t)a^k(-\omega)^k\sin^k\psi\right\}\sin\psi+\frac{\sigma^2}{2a\omega^2}\cos^2\psi\right],$$

$$K_2(a,\ \theta)=\underset{t}{M}\left[-\frac{1}{a\omega}\left\{h\,(a\cos\psi,\ \ -a\omega\sin\psi\,)+\sum_{s=0}^{S}P_s\cos(\Omega_s\omega t)a^s\cos^s\psi+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{K}R_k\cos(\zeta_k\omega t)a^k(-\omega)^k\sin^k\psi\right\}\cos\psi-\frac{\sigma^2}{2a^2\omega^2}\sin2\psi\right], \tag{11}$$

$$K_{11}(a,\ \theta)=\underset{t}{M}\left[\frac{1}{\omega^2}\sigma^2\sin^2\psi\right]=\frac{\sigma^2}{2\omega^2},$$

$$K_{12}(a,\ \theta)=\underset{t}{M}\left[\frac{1}{2a\omega^2}\sigma^2\sin2\psi\right]=0,$$

$$K_{22}(a,\ \theta)=\underset{t}{M}\left[\frac{1}{a^2\omega^2}\sigma^2\cos2\psi\right]=\frac{\sigma^2}{2\omega^2a^2}.$$

Тогда условие потенциальности (10) для системы (7) при выполнении соотношения (8) будет выполняться, если найдутся такие Ω_s, $s=0$, 1, ..., S, и ζ_k, $k=1$, 2, ..., K, что

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sum_{s=0}^{S}P_s\,a^s\,\underset{t}{M}\left(\cos^s\psi\,\sin\psi\,\cos(\Omega_s\,\omega t)\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{K}R_k a^k(-\omega)^k\underset{t}{M}\left(\sin^{k+1}\psi\,\cos(\zeta_k\omega t)\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial a}\left[\sum_{s=0}^{S}P_s\,a^{s+1}\,\underset{t}{M}\left(\cos^{s+1}\psi\,\cos(\Omega_s\,\omega t)\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{K}R_k a^{k+1}(-\omega)^k\underset{t}{M}\left(\cos\psi\,\sin^k\psi\cos(\zeta_k\omega t)\right)\right]. \tag{12}$$

Итак, исходя из соотношения (12), необходимо выяснить, при каких Ω_s и ζ_k будут справедливы следующие условия:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\ \underset{t}{M}\left(\cos^s\psi\,\sin\psi\,\cos(\Omega_s\omega t)\right)\right]=(s+1)\,\underset{t}{M}\left(\cos^{s+1}\psi\,\cos(\Omega_s\omega t)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[\underset{t}{M}(\sin^{k+1}\psi\cos(\zeta_k\omega t))\Big]=(k+1)\underset{t}{M}(\cos\psi\sin^k\psi\cos(\zeta_k\omega t)),$$

$$(\forall s=\overline{0,\ S},\quad \forall k=\overline{1,\ K}).$$

Воспользовавшись формулами для представления $\sin^k\psi$, $\cos^s\psi$ через тригонометрические функции кратных аргументов [7], получаем, что в резонансном случае при $\Omega_s=s-2n+1$, $n\in\left\{0,\ 1,\ ...,\ \left[\frac{s}{2}\right]\right\}$, $\zeta_k=k-2n+1$, $n\in\left\{0,\ 1,\ ...,\ \left[\frac{k}{2}\right]\right\}$:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[\underset{t}{M}(\cos^s\psi\sin\psi\cos(\Omega_s\omega t))\Big]=\frac{1}{2^{s+1}}\Big[\binom{s}{n}-\binom{s}{n-1}\Big]\times$$

$$\times\cos((s-2n+1)\theta)(s-2n+1),$$

$$\underset{t}{M}(\cos^{s+1}\psi\cos(\Omega_s\omega t))=\frac{1}{2^{s+1}}\binom{s+1}{n}\cos((s-2n+1)\theta),$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[\underset{t}{M}(\sin^{k+1}\psi\cos(\zeta_k\omega t))\Big]=\frac{(-1)^{\frac{k+3+2n}{2}}}{2^{k+1}}\binom{k+1}{n}\times$$

$$\times\sin((k-2n+1)\theta)(k-2n+1),\ k-\text{нечетное},$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[\underset{t}{M}(\sin^{k+1}\psi\cos(\zeta_k\omega t))\Big]=\frac{(-1)^{\frac{k+2n}{2}}}{2^{k+1}}\binom{k+1}{n}\times \tag{14}$$

$$\times\cos((k-2n+1)\theta)(k-2n+1),\ k-\text{четное},$$

$$\underset{t}{M}(\cos\psi\sin^k\psi\cos(\zeta_k\omega t))=\frac{(-1)^{\frac{k+2n-1}{2}}}{2^{k+1}}\Big[\binom{k}{n}-\binom{k}{n-1}\Big]\times$$

$$\times\sin((k-2n+1)\theta),\ k-\text{нечетное},$$

$$\underset{t}{M}(\cos\psi\sin^k\psi\cos(\zeta_k\omega t))=\frac{(-1)^{\frac{k+2n}{2}}}{2^{k+1}}\Big[\binom{k}{n}-\binom{k}{n-1}\Big]\times$$

$$\times\cos((k-2n+1)\theta),\ k-\text{четное},$$

где $\binom{s}{n}=\frac{s!}{n!(s-n)!}$.

Исходя из соотношений (14), несложно установить, что условия потенциальности (13) выполняются при любых резонансных соотношениях вида

$$\zeta_k=k-2n+1,\ n=0,\ 1,\ ...,\ \left[\frac{k}{2}\right],\ \forall k=1,\ 2,\ ...,\ K$$

и лишь в одном резонансном случае для Ω_s.

$$\Omega_s=s+1,\ \forall s=0,\ 1,\ ...,\ S,$$

что соответствует утверждению теоремы. Теорема доказана.

Следствие. При выполнении условий теоремы усредненное уравнение КФП (4) будет допускать точное решение

$$w(a,\ 0)=C\exp\left\{2\int\frac{1}{K_{11}}\left(K_1-\frac{1}{2}\frac{\partial K_{11}}{\partial a}\right)da+\frac{K_2}{K_{22}}d\theta\right\}, \tag{15}$$

где C — постоянная нормировки [2].

1. К о л о м и е ц В. Г. // Мат. физика и нелинейная механика. 1987. Вып. 7(41). С. 1.
2. Р у б а н и к В. П. Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием. Мн., 1985.
3. М и т р о п о л ь с к и й Ю. А., Н г у е н В а н Д а о, Н г у е н Д о н г А н ь. Нелинейные колебания в системах произвольного порядка. Киев, 1992.
4. С т р а т о н о в и ч Р. Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М., 1961.
5. Б о л о т и н В. В. Случайные колебания упругих систем. М., 1979.
6. Д и м е н т б е р г М. Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М., 1980.
7. К о р н Г., К о р н Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1984.

Поступила в редакцию 16.09.94

УДК 577.3

Г. В. ГРУШЕВСКАЯ, Г. Г. КРЫЛОВ, А. И. ХМЕЛЬНИЦКИЙ

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМ ИСТОЧНИКОМ, ОПИСЫВАЮЩИХ МОЛЕКУЛЯРНОЕ УЗНАВАНИЕ

The aperiodically singularly disturbed system of ordinary differential equations describing the molecular level immune reaction has been analyzed. The numerical simulations have shown that there are solutions, that correspond to the primary Hopf's bifurcation and subsequent finite number of Feigenbaum's period-doubling bifurcations leading to chaotization of the system.

В последнее время большой интерес вызывают уравнения с сингулярно возмущенными членами. Это связано с тем, что в этих системах возникают качественно новые решения, включающие переход от одного устойчивого решения к другому [1, 2]. Нами анализируется апериодически сингулярно возмущаемая система обычных дифференциальных уравнений, моделирующих иммунный отклик на молекулярном уровне. Функционирование иммунной системы организма характеризуется наличием обратной связи [3]. Причины нелинейного поведения иммунного отклика на молекулярном уровне не выяснены. Целью данной работы является математическое моделирование иммунохимических реакций.

Предполагается, что взаимодействие «антиген — антитело» протекает в две стадии — молекулярное узнавание и кластеризация. На стадии молекулярного узнавания происходит специфическое связывание антигена с антителом с образованием их комплекса. Последующее взаимодействие специфически связанных комплексов «антиген — антитело» приводит, как правило, к формированию пятизвенных замкнутых кластеров. Предположим, что стадия молекулярного узнавания описывается следующей системой химических реакций:

$$Y \xrightarrow{c_1} X, \tag{1}$$

$$X + A \underset{k_1}{\overset{k_0}{\rightleftarrows}} Y', \tag{2}$$

$$X + Y' \underset{k_3}{\overset{k_2}{\rightleftarrows}} 2Y, \tag{3}$$

а стадия кластеризации — системой:

$$2Y \underset{k_5}{\overset{k_4}{\rightleftarrows}} 2Y'', \tag{4}$$

$$2Y'' + Y \underset{k_7}{\overset{k_6}{\rightleftarrows}} 2Y'' + Y''', \tag{5}$$

$$2Y'' + Y''' + Y \underset{k_9}{\overset{k_8}{\rightleftarrows}} 2Y'' + 2Y''', \tag{6}$$