УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_69

О РАДИКАЛАХ ФАКТОРИЗУЕМЫХ КОНЕЧНЫХ $\mathfrak{X}$-ГРУПП

А.Ф. Васильев

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON RADICALS OF FACTORIZED FINITE $\mathfrak{X}$-GROUPS

A.F. Vasil'ev

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Пусть $\mathfrak{X}$ – насыщенная *S*-замкнутая формация конечных разрешимых групп, содержащая класс $\mathfrak{N}^k$ всех групп, нильпотентная длина которых не превосходит *k*, где $k \geq 3$. В работе получено конструктивное описание всех формаций Фиттинга $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{X}$ таких, что для любой $\mathfrak{X}$-группы $G = AB$ выполняется $A_{\mathfrak{F}} \cap B_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Ключевые слова: *конечная группа*, *нильпотентная длина*, *ди-$\mathfrak{F}$-группа*, *$\mathfrak{F}$-радикал*, *формация Фиттинга*, *радикальная формация с условием Монахова в классе $\mathfrak{X}$*.

Для цитирования: *Васильев*, *А.Ф.* О радикалах факторизуемых конечных $\mathfrak{X}$-групп / А.Ф. Васильев // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 69–75. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_69

Abstract. Let $\mathfrak{X}$ be a saturated *S*-closed formation of finite soluble groups containing the class $\mathfrak{N}^k$ of all groups whose nilpotent length does not exceed *k*, where $k \geq 3$. In this paper, we obtain a constructive description of all Fitting formations $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{X}$ such that for any $\mathfrak{X}$-group $G = AB$, there is $A_{\mathfrak{F}} \cap B_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Keywords: *finite group*, *nilpotent length*, *di-$\mathfrak{F}$-group*, *$\mathfrak{F}$-radical*, *Fitting formation*, *radical formation with the Monakhov condition in the class $\mathfrak{X}$*.

For citation: *Vasil'ev*, *A.F.* On radicals of factorized finite $\mathfrak{X}$-groups / A.F. Vasil'ev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 69–75. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_69 (in Russian)

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Класс групп $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, содержащий единичную группу, называется радикальным в $\mathfrak{X}$, если всякая $\mathfrak{X}$-группа G имеет единственную максимальную нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу $G_{\mathfrak{F}}$, называемую $\mathfrak{F}$-радикалом группы G. S_n-замкнутый класс (формация) $\mathfrak{F}$, радикальный в $\mathfrak{X}$, называется классом (формацией) Фиттинга в $\mathfrak{X}$. Классическими примерами радикалов группы G являются наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа $F(G)$ (подгруппа Фиттинга) и ее наибольшая нормальная π-подгруппа $O_\pi(G)$, где π – некоторое множество простых чисел, которые относятся к радикальным классам $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп и $\mathfrak{G}_\pi$ всех π-групп соответственно.

Отметим, что рассмотрение радикальных классов в данном классе $\mathfrak{X}$ является содержательной задачей. Например, класс $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп не является радикальным в классе всех (разрешимых) групп. С другой стороны, в [1] установлена радикальность $\mathfrak{U}$ в классе $\mathfrak{N}A$ всех расширений нильпотентных групп с помощью групп с абелевыми силовскими подгруппами.

Пусть группа $G = AB$ является произведением своих подгрупп A и B. В работе [2] В.С. Монахов установил, что для подгрупп Фиттинга A, B и G соответственно, выполняется $F(A) \cap F(B) \subseteq F(G)$. Джонсон [3] доказал, что для разрешимой группы $G = AB$ для каждого множества простых чисел π имеет место $O_\pi(A) \cap O_\pi(B) \subseteq O_\pi(G)$. Амберг и Л.С. Казарин [4] показали, что результат Джонсона неверен в общем случае и нашли условия его справедливости в классе всех групп. В работе [5] нами в классе всех разрешимых групп было получено конструктивное описание формаций Фиттинга $\mathfrak{F}$, для которых для каждой группы $G = AB$ выполняется $A_{\mathfrak{F}} \cap B_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. В настоящей статье мы продолжаем исследования в отмеченном выше направлении.

***Определение* 1.** Класс групп $\mathfrak{F}$ назовем *радикальным классом с условием Монахова* в классе групп $\mathfrak{X}$ (кратко, радикальным $\mathcal{M}$-классом в $\mathfrak{X}$), если $\mathfrak{F}$ радикален в $\mathfrak{X}$ и для любой $\mathfrak{X}$-группы $G = AB$ выполняется $A_{\mathfrak{F}} \cap B_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

В настоящей работе мы исследуем следующую проблему.

***Проблема* 1.** *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– насыщенная S-замкнутая формация. Конструктивно описать все радикальные* $\mathcal{M}$*-формации в* $\mathfrak{X}$.

Нами получена следующая теорема. В дальнейшем ди-$\mathfrak{F}$-группой называется группа $G = AB$ с $\mathfrak{F}$-подгруппами A и B.

***Теорема* A.** *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– разрешимая насыщенная S-замкнутая формация, содержащая* $\mathfrak{N}^k$, $k \geq 3$, *и* $\mathfrak{F}$ *– формация Фиттинга в* $\mathfrak{X}$. *Тогда следующие утверждения попарно эквивалентны.*

(1) $\mathfrak{F}$ *является формацией с условием Монахова в* $\mathfrak{X}$.

(2) *Для каждой ди-*$\mathfrak{F}$*-группы* $G = AB$, *принадлежащей* $\mathfrak{X}$, *имеет место* $A \cap B \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

(3) *Существует разбиение* $\{\pi_i \mid i \in I\}$ *множества* $\pi(\mathfrak{F})$ *такое, что* $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{X}_{\pi_i}$.

Следствие [5]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– подформация Фиттинга в* $\mathfrak{S}$. *Тогда следующие утверждения попарно эквивалентны.*

(1) *Для каждой разрешимой группы* $G = AB$ *имеет место* $A_{\mathfrak{F}} \cap B_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

(2) *Для каждой разрешимой ди-*$\mathfrak{F}$*-группы* $G = AB$ *имеет место* $A \cap B \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

(3) *Существует разбиение* $\{\pi_i \mid i \in I\}$ *множества* $\pi(\mathfrak{F})$ *такое, что* $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$.

1 Необходимые сведения и результаты

В основе работы лежат определения, обозначения и результаты из [6] и [7]. Выделим некоторые обозначения:

π – некоторое множество простых чисел;

π' – множество всех простых чисел, отличных от $p \in \pi$;

C_p – группа, порядок которой равен простому числу p;

F_p – поле из p элементов;

$\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка $|G|$ группы G;

$\pi(\mathfrak{F}) = \cup\{\pi(G) \mid G \in \mathfrak{F}\}$; $O_\pi(G)$ – наибольшая нормальная π-подгруппа в G;

$F_p(G)$ – p-нильпотентный радикал группы G;

$[L]K$ – полупрямое произведение с нормальной подгруппой L;

если G – группа, то $S(G)$ обозначает множество всех ее подгрупп;

$\mathfrak{S}_\pi$ – класс всех разрешимых π-групп;

$\mathfrak{N}_\pi$ – класс всех нильпотентных π-групп;

$\mathfrak{X}^S$ – максимальный S-замкнутый подкласс класса $\mathfrak{X}$.

Напомним [7], что нильпотентной длиной разрешимой группы G (обозначается $l(G)$) называется наименьшее неотрицательное целое число k такое, что $F_k(G) = G$, где подгруппа $F_i(G)$ определяется рекурсивно следующим образом: $F_0(G) = 1$ и $F_i(G)/F_{i-1}(G) = F(G/F_{i-1}(G)$ для всех $i \geq 1$. Класс $\mathfrak{N}^k = (G \in \mathfrak{S} \mid l(G) \leq k)$ является насыщенной S-замкнутой формацией Фиттинга.

Пусть I – непустое множество. Для каждого $i \in I$ пусть $\mathfrak{F}_i$ – насыщенная S-замкнутая формация. Предположим, что $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \varnothing$ для всех $i, j \in I$, $i \neq j$. Обозначим $\pi_i = \pi(\mathfrak{F}_i)$, $i \in I$. Следуя [7], определим конструкцию следующего класса:

$$\times_{i \in I} \mathfrak{F}_i = (G = O_{\pi_{i_1}}(G) \times \cdots \times O_{\pi_{i_n}}(G) \mid O_{\pi_{i_j}}(G) \in \mathfrak{F}_i,$$
$$1 \leq j \leq n, \{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I).$$

***Лемма* 1.1.** *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– насыщенная S-замкнутая формация разрешимых групп,* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная* S_n*-замкнутая (S-замкнутая) формация, радикальная в* $\mathfrak{X}$. *Пусть* $\mathfrak{Y} = \times_{i \in I} \mathfrak{F}_{\pi_i}$ *для некоторого разбиения* $\{\pi_i \mid i \in I\}$ *множества* $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) $\mathfrak{Y}$ *– насыщенная* S_n*-замкнутая (S-замкнутая) формация, радикальная в* $\mathfrak{X}$;

(2) $\mathfrak{Y}$ *определяется локальной функцией* f *такой, что* $f(p) = \mathfrak{F}_{\pi_i}$ *для любого* $p \in \pi_i$ *и* $f(p) = \varnothing$ *для любого* $p \in \pi'$.

Доказательство. (1) Утверждение осуществляется проверкой соответствующих определений.

(2) Пусть формация $\mathfrak{Y}^*$ определяется локальной функцией f такой, что $f(p) = \mathfrak{F}_{\pi_i}$ для каждого $p \in \pi_i$ и $f(p) = \varnothing$ для каждого $p \in \pi'$. Нетрудно проверить $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}^*$. Предположим, что $\mathfrak{Y} \neq \mathfrak{Y}^*$. Пусть G – группа из $\mathfrak{Y}^* \setminus \mathfrak{Y}$, имеющая минимальный порядок. Ввиду того, что $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Y}^*$ – насыщенные формации, выводим, что в G подгруппа Фраттини тривиальная и цоколь совпадает с минимальной нормальной подгруппой $K = G^{\mathfrak{Y}}$. Из разрешимости формации $\mathfrak{X}$ следует разрешимость $\mathfrak{F}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Из строения локальной функции f получаем, что $\mathfrak{Y}^* \subseteq \mathfrak{S}$. Из полученного выше следует, что K – p-группа, где p – некоторое простое число, и $K = C_G(K)$. Из $G \in \mathfrak{Y}^*$ вытекает, что $G/C_G(K) = G/K \in f(p) = \mathfrak{F}_{\pi_i}$, где $p \in \pi_i$. Учитывая, что $\mathfrak{F}$ – насыщенная S-замкнутая формация, имеем $\mathfrak{F}_{\pi_i} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_{\pi_i}$ – насыщенная S-замкнутая формация. Отсюда следует, что

$G \in \mathfrak{F}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{Y}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{Y}^* \setminus \mathfrak{Y} = \varnothing$, а значит, $\mathfrak{Y}^* = \mathfrak{Y}$. □

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Согласно [7] группа G называется S-критической для $\mathfrak{X}$, если $G \notin \mathfrak{X}$, а все ее подгруппы $H \neq G$ принадлежат $\mathfrak{X}$. Класс всех S-критических групп для $\mathfrak{X}$ обозначается через $\mathrm{Crit}_s(\mathfrak{X})$. Всякая S-критическая группа для $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ иначе называется группой Шмидта [6]. Строение групп Шмидта можно найти в [6, теоремы 26.2, 26.2]. Через $E(q/p)$ обозначается группа Шмидта наименьшего порядка с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической q-подгруппой. Она существует и единственна [7].

***Лемма* 1.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация групп. Тогда*:

1) $\mathrm{Crit}_s(\mathfrak{F}) = \mathrm{Crit}_s(\mathfrak{F}^S)$;

2) $\mathfrak{F}^S$ *– формация*;

3) *если $\mathfrak{F}$ – разрешимая насыщенная формация, то $\mathfrak{F}^S$ – насыщенная формация.*

Доказательство. Справедливость утверждений (1) и (2) осуществляется проверкой. Утверждение (3) получается из [6, теорема 25.3].

***Лемма* 1.3.** *Для разрешимой S_n-замкнутой формации $\mathfrak{F}$ всегда $\pi(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F}^S)$.*

Доказательство. Достаточно установить, что $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi(\mathfrak{F}^S)$. Предположим, что существует $\mathfrak{F}$-группа G такая, что $p \in \pi(G)$, но $p \notin \pi(\mathfrak{F}^S)$. Возьмем среди таких групп группу G минимального порядка. Тогда $|G| > p$. Из разрешимости G следует, что G имеет неединичную нормальную максимальную подгруппу M. Если $|G:M| = p$, то из $G/M \simeq C_p \in \mathfrak{F}^S$ получаем противоречие с $p \notin \pi(\mathfrak{F}^S)$. Допустим, что $|G:M| \neq p$. Тогда $p \in \pi(M)$. Из S_n-замкнутости формации $\mathfrak{F}$ и $M \trianglelefteq G$ следует, что $M \in \mathfrak{F}$. Так как $|M| < |G|$ по выбору G имеем $p \in \pi(\mathfrak{F}^S)$. Получили противоречие. □

Напомним, что формацией с условием Шеметкова в классе $\mathfrak{X}$ (кратко, $\breve{S}$-формацией в $\mathfrak{X}$) называется формация $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, для которой любая S-критическая $\mathfrak{X}$-группа для $\mathfrak{F}$ является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. Нам понадобится следующий результат о таких формациях [9].

***Лемма* 1.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная S-замкнутая формация, h – ее каноническая локальная функция, $\mathfrak{X}$ – насыщенная S-замкнутая формация, x – ее максимальная S-замкнутая локальная функция. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является $\breve{S}$-формацией в $\mathfrak{X}$, когда $\mathfrak{F}$ определяется локальной функцией f такой, что*

$$f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(h(p))} \cap x(p), \text{ если } p \in \pi(\mathfrak{F});$$

$$f(p) = \varnothing, \text{ если } p \notin \pi(\mathfrak{F}), \text{ и } f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$$

для любого простого p.

2 Доказательство теоремы А

Для доказательства нашей теоремы А нам потребуются некоторые свойства формаций Фиттинга в $\mathfrak{X}$, которые устанавливаются в следующих леммах.

***Лемма* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{X}$ – разрешимая насыщенная S-замкнутая формация, содержащая $\mathfrak{N}^k$, $k \geq 3$, x – ее максимальная S-замкнутая локальная функция. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга в $\mathfrak{X}$ и для $\mathfrak{F}$ выполняется утверждение* (2) *теоремы А. Если $\mathfrak{F}^S$ – насыщенная $\breve{S}$-формация в $\mathfrak{X}$, то существует разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ такое, что $\mathfrak{F}^S = \times_{i \in I} \mathfrak{X}_{\pi_i}$.*

Доказательство. Положим $\mathfrak{Y} = \mathfrak{F}^S$. По лемме 1.3 множества $\pi(\mathfrak{Y})$ и $\pi(\mathfrak{F})$ совпадают. По лемме 1.4 имеется определяющая формацию $\mathfrak{Y}$ локальная функция f: $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(h(p))} \cap x(p)$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$; $f(p) = \varnothing$, если $p \notin \pi(\mathfrak{F})$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p. При этом h – каноническая локальная функция формации $\mathfrak{Y}$. Отметим, что $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$.

Предположим, что $\pi(\mathfrak{Y}) = \{p\}$. Ввиду насыщенности формации $\mathfrak{Y}$ получаем, что $\mathfrak{Y} = \mathfrak{N}_p$, и утверждение леммы выполняется.

Допустим, что $|\pi(\mathfrak{Y})| \geq 2$. Тогда в $\pi(\mathfrak{Y})$ найдутся два различных простых числа p и q. Пусть $p \in \pi(f(q))$. Докажем, что $q \in \pi(f(p))$. Предположим, что $q \notin \pi(f(p))$. Рассмотрим группу $X = [V]C_p$, где V – точный неприводимый F_qC_p-модуль над полем F_q, который существует ввиду [7, следствие 10.7.B]. Поскольку $C_p \in f(q)$, группа $X \in \mathfrak{F}$. Обозначим $Z = [W]X$, где W – точный неприводимый F_pX-модуль над F_p. Тогда $Z \in \mathfrak{X}$, так как $\mathfrak{N}^k \subseteq \mathfrak{X}$, $k \geq 3$. Установим, что $Z \notin \mathfrak{F}$. Допустим, что $Z \in \mathfrak{F}$. Из S_n-замкнутости $\mathfrak{F}$ следует, что $H = [W]V \in \mathfrak{F}$. Ясно, что $H \in \mathfrak{N}^2$. По [7, теорема 2.1.XI] $\mathfrak{N}^2 \cap \mathfrak{F}$ – S-замкнутая формация Фиттинга. Поэтому $S(H) \subseteq \mathfrak{F}$ и $H \in \mathfrak{Y} = \mathfrak{F}^S$. Заметим, что $C_Z(W) = C_H(W) = W$. Тогда $W \subseteq F_p(H) \neq H$. Ввиду [6, лемма 4.5] имеем $H/F_p(H) \in f(p)$. Значит, $q \in \pi(f(p))$. Полученное противоречие показывает, что $Z \notin \mathfrak{F}$.

Заметим, что $Z_{\mathfrak{F}} \le H$, $X = VC_p \in \mathfrak{F}$ и $Y = WC_p \in \mathfrak{F}$. Тогда $Z = XY$ – ди-$\mathfrak{F}$-группа и $X \cap Y \le Z_{\mathfrak{F}}$. Так как $C_p \le X \cap Y$ и $C_p \not\le Z_{\mathfrak{F}}$, получили противоречие. Итак, если $p \in \pi(f(q))$, то $q \in \pi(f(p))$.

Теперь установим, что если $q \in \pi(f(p))$, то $\pi(f(p)) = \pi(f(q))$. Возьмем число $r \ne p$ и $r \in \pi(f(p)) \setminus \pi(f(q))$. Пусть $R = [U]C_p$, где U – точный неприводимый F_rC_p-модуль (он существует по [7, следствие 10.7.B]). По доказанному выше из $r \in \pi(f(p))$ следует, что $p \in \pi(f(r))$. Ясно, $r \in \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $R \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. Рассмотрим группу $G = [L]R$, где L – точный неприводимый F_qR-модуль. Рассуждая, как выше, получим, что $G \notin \mathfrak{F}$ и $G_{\mathfrak{F}} \le LU$, причем $G = MN$, где $M = LC_p$ и $N = UC_p$. Так как $M \in \mathfrak{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, подгруппа $C_p \le M \cap N$. Ввиду $C_p \not\le G_{\mathfrak{F}}$ получили противоречие. Итак, $\pi(f(p)) \subseteq \pi(f(q))$. Значит, если $q \in \pi(f(p))$, то $\pi(f(p)) = \pi(f(q))$.

Итак, установлено, что в том и только в том случае $\pi(f(p)) = \pi_i$ для некоторого разбиения $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$, когда $p \in \pi_i$. Теперь из $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(h(p))} \cap x(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и леммы 1.1 следует утверждение $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{X}_{\pi_i}$. □

***Лемма* 2.2.** *Пусть $\mathfrak{X}$ – разрешимая насыщенная S-замкнутая формация и $\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга в $\mathfrak{X}$. Если существует разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ такое, что $\mathfrak{F}^S = \times_{i \in I} \mathfrak{X}_{\pi_i}$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^S$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{F}^S \ne \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^S \ne \varnothing$, так как $\mathfrak{F}^S \subseteq \mathfrak{F}$. Выберем в $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^S$ группу G наименьшего порядка. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа из G. Из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G/N \in \mathfrak{F}^S$. Ввиду того, что $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}^S$ – формации, N является единственной минимальной нормальной подгруппой G, причем N совпадает с $G^{\mathfrak{F}^S}$. Так как $\mathfrak{F}^S$ – насыщенная формация по лемме 1.1, заключаем, что $\Phi(G) = 1$. Тогда G – примитивная группа и в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, причем $\mathrm{Core}_G(M) = 1$. Из разрешимости G следует, что N абелева, $|N| = p^m$ для некоторого простого числа p, $N \cap M = 1$ и $N = C_G(N) = F(G)$.

Так как $G/N \cong M \in \mathfrak{F}^S$, подгруппа $M = M_1 \times \cdots \times M_t$, где $M_i \in \mathfrak{X}_{\pi_{i_j}}$, $j = 1, \ldots, t$.

Допустим, что $t \ge 2$. По лемме 1.1 $\pi(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F}^S)$. Тогда из $G \in \mathfrak{F}$ заключаем, что $p \in \pi(\mathfrak{F}^S)$. Значит, для некоторого $i_0 \in I$ число $p \notin \pi_{i_0}$ и $M_{i_0} \ne 1$.

Так как $NM_{i_0} \trianglelefteq G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая формация, заключаем, что $NM_{i_0} \in \mathfrak{F}$. Из $|NM_{i_0}| < |G|$ следует, что $NM_{i_0} \in \mathfrak{F}^S$. Ввиду строения $\mathfrak{F}^S$ имеем $NM_{i_0} = N \times M_{i_0}$. Поэтому $M_{i_0} \le C_G(N) = N$. Полученное противоречие говорит, что случай $t \ge 2$ невозможен.

Пусть теперь $t = 1$. Тогда найдется $i \ne j$ из I такое, что $p \in \pi_i$ и $\pi(M) \subseteq \pi_j$. Если предположить, что в M есть собственная нормальная подгруппа $R \ne 1$, то $NR \trianglelefteq G$, и рассуждая, как выше, получаем противоречие $1 \ne R \le C_G(N) = N$. Таким образом, в M все собственные нормальные подгруппы равны 1. Так как M разрешима, это возможно только, когда $|M|$ – простое число, причем оно отлично от p. Отсюда и из $G \in \mathfrak{F}$ следует, что $S(G) \subseteq \mathfrak{F}$. Но $\pi(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F}^S)$, поэтому $G \in \mathfrak{F}^S$. Получили противоречие с выбором G. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^S$. □

***Лемма* 2.3.** *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая разрешимая S-замкнутая радикальная формация и $\pi \subseteq \pi(\mathfrak{X})$. Тогда класс $\mathfrak{X}_\pi = \mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{X}$ является радикальной $\mathcal{M}$-формацией в $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. По условию $\mathfrak{X}$ является разрешимой S-замкнутой радикальной формацией. Такими свойствами обладает и класс $\mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, класс $\mathfrak{X}_\pi = \mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{X}$ также является разрешимой S-замкнутой радикальной формацией в $\mathfrak{X}$. Покажем, что $\mathfrak{X}_\pi$ является $\mathcal{M}$-формацией в $\mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{X}$-группа $G = AB$, $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{X})$. Так как G – разрешимая $\mathfrak{X}$-группа, нетрудно заметить, что $G_{\mathfrak{X}_\pi} = O_\pi(G)$, $A_{\mathfrak{X}_\pi} = O_\pi(A)$, $B_{\mathfrak{X}_\pi} = O_\pi(B)$. Применяя теорему 1 из [3], получаем

$$A_{\mathfrak{X}_\pi} \cap B_{\mathfrak{X}_\pi} \subseteq G_{\mathfrak{X}_\pi}.$$

Следовательно, $\mathfrak{X}_\pi$ является $\mathcal{M}$-формацией в $\mathfrak{X}$. □

***Лемма* 2.4.** *Пусть $\mathfrak{X}$ – S_n-замкнутая радикальная формация, $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – семейство $\mathcal{M}$-формаций Фиттинга в $\mathfrak{X}$ таких, что $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \varnothing$ для всех $i \ne j$ из I. Тогда формация $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{F}_{\pi_i}$ также является $\mathcal{M}$-формацией Фиттинга в $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. По лемме 2.1 $\mathfrak{F}$ является формацией Фиттинга в $\mathfrak{X}$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию Монахова. Пусть группа $G = AB$ – произведение подгрупп A и B. Заметим, что

$$\pi(G) \cap (\cup_{i\in I} \pi_i) = \cup_{i\in I} (\pi(G) \cap \pi_i).$$

Так как $\pi(G)$ – конечное множество, то

$$\pi(G) = \cup_{k=1}^{t} (\pi(G) \cap \pi_{i_k}),$$

где $\{\pi(G) \cap \pi_{i_k} \mid k = 1,\ldots,t\}$ является разбиением $\pi(G)$. Сейчас $G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}_{i_1}} \times\ldots\times G_{\mathfrak{F}_{i_k}}$, $A_{\mathfrak{F}} = A_{\mathfrak{F}_{i_1}} \times\ldots\times A_{\mathfrak{F}_{i_k}}$, $B_{\mathfrak{F}} = B_{\mathfrak{F}_{i_1}} \times\ldots\times B_{\mathfrak{F}_{i_k}}$, так как $\mathfrak{F} = \times_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ и $\pi(\mathfrak{F}_l) \cap \pi(\mathfrak{F}_k) = \varnothing$ для всех $l \neq k$ из I. Ясно, что $A_{\mathfrak{F}} \cap B_{\mathfrak{F}} = (A_{\mathfrak{F}_{i_1}} \cap B_{\mathfrak{F}_{i_1}})\times\ldots\times(A_{\mathfrak{F}_{i_k}} \cap B_{\mathfrak{F}_{i_k}})$. Учитывая $A_{\mathfrak{F}_{i_j}} \cap B_{\mathfrak{F}_{i_j}} \subseteq G_{\mathfrak{F}_{i_j}}$, $j = 1,\ldots,k$, получаем, что $A_{\mathfrak{F}} \cap B_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. □

Доказательство теоремы А. Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $G = AB$ – $\mathfrak{X}$-группа, где A и B – $\mathfrak{F}$-подгруппы G. Из $A = A_{\mathfrak{F}}$ и $B = B_{\mathfrak{F}}$ и утверждения (1) следует, что $A \cap B \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (3). Вначале покажем, что $\mathfrak{F}^S$ является $\breve{S}$-формацией в $\mathfrak{X}$. Пусть $G \in \mathrm{Crit}_s(\mathfrak{F}^S) \cap \mathfrak{X}$. По лемме 1.2 получаем, что $G \in \mathrm{Crit}_s(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{X}$.

Допустим, что $G \in \mathfrak{N}$. Если $|\pi(G)| \geq 2$, то в G все силовские подгруппы и их произведение принадлежат $\mathfrak{F}$, так как $G \in \mathrm{Crit}_s(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга $\mathfrak{X}$. Но это противоречит тому, что $G \notin \mathfrak{F}$. Значит, $|\pi(G)| = 1$ и G – p-группа для некоторого простого числа p. Возьмем в G подгруппу P, для которой $|P| = p$. Предположим, что $P \neq G$. Тогда $P \in \mathfrak{F}$ по выбору G. Заметим, что $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{X}$ ввиду насыщенности формации $\mathfrak{X}$. По условию $\mathfrak{F}$ – радикальный класс в $\mathfrak{X}$. Поэтому $\mathfrak{F}_p = \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{F}$ – S-замкнутая формация, радикальная в $\mathfrak{N}_p$. Дословно повторяя рассуждения из доказательстве леммы 1.8 из [7, с. 565], получаем $\mathfrak{N}_p \subseteq S_n N_0(P) \subseteq \mathfrak{F}_p$. Откуда $G \in \mathfrak{F}$, что противоречит $G \in \mathrm{Crit}_s(\mathfrak{F})$. Значит, $|G| = p$, причем $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Предположим, что $G \notin \mathfrak{N}$. Тогда $G = F(G)H$ для некоторой максимальной подгруппы H из G. Ввиду того, что $G \in \mathrm{Crit}_s(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ – радикальная формация в $\mathfrak{X}$, $G_{\mathfrak{F}}$ является единственной нормальной максимальной подгруппой группы G. Тогда $|G : G_{\mathfrak{F}}| = p$ для некоторого простого числа p. Отсюда и из $F(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ следует, что $p \in \pi(H)$ и любая силовская p-подгруппа H_p из H не содержится в $G_{\mathfrak{F}}$.

Рассмотрим подгруппу $S = F(G)H_p$.

Пусть $S \neq G$. Так как $G \in \mathrm{Crit}_s(\mathfrak{F})$, $S_{\mathfrak{F}} = S$ и $H_{\mathfrak{F}} = H$. Заметим, что $G = HS$. Из утверждения (3) теоремы следует, что $S \cap H \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Получили противоречие с тем, что $H_p \subseteq S \cap H$ и $H_p \not\subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Допустим, что $G = F(G)H_p$. Установим, что $F(G)$ – q-группа для некоторого простого числа q. Так как $\Phi(G)$ состоит из необразующих элементов, $\Phi(G) \neq F(G)$. Поэтому для некоторого простого числа q в $F(G)$ имеется силовская q-подгруппа Q, которая не содержится в $\Phi(G)$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа W такая, что $G = QW$. Из $G \in \mathrm{Crit}_s(\mathfrak{F})$ следует, что $W \in \mathfrak{F}$ и $G/Q \simeq W/W \cap Q \in \mathfrak{F}$. Значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq Q$ и $G^{\mathfrak{F}}$ – q-группа. Случай $q = p$ невозможен, так как $G \notin \mathfrak{N}$. Значит, $q \neq p$ и в G существует группа Шмидта R с нормальной силовской q-подгруппой и ненормальной циклической силовской p-подгруппой.

Предположим, что $R \neq G$. Тогда $R \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$. По [7, теорема 2.5.XI] всякое расширение q-группы с помощью группы простого порядка p принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Ввиду [7, предложение 2.4.XI] заключаем, что $\mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2 \subseteq \mathfrak{F}$. Отсюда следует противоречие $G \in \mathfrak{F}$.

Итак, $R = G$ – группа Шмидта, а $\mathfrak{F}^S$ – $\breve{S}$-формация.

Докажем насыщенность $\mathfrak{F}^S$. Допустим, что существуют группы G, для которых $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}^S$, а $G \notin \mathfrak{F}^S$. Пусть G – группа минимального порядка среди них. Так как $G/\Phi(G) \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ – насыщенная формация, получаем, что $G \in \mathfrak{X}$. Возьмем в G минимальную нормальную подгруппу N. Из $\Phi(G)N/N \subseteq \Phi(G/N)$ и $G/\Phi(G)N \in \mathfrak{F}^S$ заключаем, что $G/N/\Phi(G/N) \in \mathfrak{F}^S$. Из $|G/N| < |G|$ следует, что $G/N \in \mathfrak{F}^S$. Поскольку $\mathfrak{F}^S$ – формация, G не имеет отличных от N минимальных нормальных подгрупп. Тогда

$$N \subseteq \Phi(G) \subseteq F(G) \in \mathfrak{N}_p$$

и $O_{p'}(G) = 1$ для некоторого простого числа p.

Так как G не принадлежит $\mathfrak{F}^S$, в G найдется подгруппа H, которая является S-критической для $\mathfrak{F}^S$. Из $G \in \mathfrak{X}$ и S-замкнутости формации $\mathfrak{F}^S$ следует, что $H \in \mathfrak{X}$. Тогда по доказанному выше H является группой Шмидта. Из $G/N \in \mathfrak{F}^S$, следует $HN/N \in \mathfrak{F}^S$. Если $H \cap N = 1$, то $H \in \mathfrak{F}^S$. Противоречие с выбором H. Поэтому будем считать, что $H \cap N \neq 1$. Отсюда и строения групп

Шмидта следует, H является (p,q)-группой Шмидта, т. е. H имеет нормальную силовскую p-подгруппу и ненормальную циклическую q-подгруппу, $p \neq q$.

Предположим, что HN/N ненильпотентна. Тогда HN/N является (p,q)-группой Шмидта, принадлежащей $\mathfrak{F}^S$. Тогда единственная наименьшая (p,q)-группа Шмидта $E(q/p)$ является гомоморфным образом HN/N, а значит, $E(q/p) \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$. Заметим, что класс $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$ является формацией Фиттинга в $\mathfrak{X}$. Отсюда и из $\mathfrak{N}^2 \subseteq \mathfrak{X}$ получаем, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$ – формация Фиттинга в $\mathfrak{N}^2$. Так как $\mathfrak{N}^2$ – формация Фиттинга в классе всех групп, то нетрудно видеть, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$ – формация Фиттинга в классе всех групп. Теперь, применяя последовательно теорему 2.5 и предложение 2.4 из [7, с. 785–786], получаем, что $\mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_q \subseteq \mathfrak{F}^S$. Откуда следует, что $H \in \mathfrak{F}^S \subseteq \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Будем считать, что HN/N нильпотентна для любой (p,q)-подгруппы Шмидта H. Рассмотрим подгруппу $R = QF(G)$, где Q – силовская q-подгруппа группы G. Можно считать, что $H \subseteq R$. Так как

$$R/N = (QN/N)(F(G)/N) = \\ = (QN/N)F(G/N) \in \mathfrak{N},$$

то $QN/N \subseteq C_{G/N}(F(G)/N) \subseteq F(G)/N$.

Получили противоречие. Поэтому, $R = QF(G)$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Получили окончательное противоречие. Таким образом, доказано, что формация $\mathfrak{F}^S$ является насыщенной. Теперь утверждение (3) теоремы следует из лемм 2.1 и 2.2.

Докажем $(3) \Rightarrow (1)$. Предположим, что $\mathfrak{X}$ – разрешимая насыщенная S-замкнутая формация такая, что $\mathfrak{N}^k \subseteq \mathfrak{X}$, $k \geq 3$ и $\mathfrak{F} = \times_{i\in I} \mathfrak{X}_{\pi_i}$ для некоторого разбиения $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$. Применяя последовательно леммы 2.3 и 2.4, получаем, что $\mathfrak{F} = \times_{i\in I} \mathfrak{X}_{\pi_i}$ является $\mathcal{M}$-формацией Фиттинга в $\mathfrak{X}$. □

Доказательство следствия. Нетрудно видеть, что из $(1) \Rightarrow (2)$. Покажем, что из $(2) \Rightarrow (3)$. Допустим, что формация Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет (2). Тогда формация $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^k$ удовлетворяет (2) в $\mathfrak{N}^k$ для любого натурального k. Ввиду $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S} = \cup \mathfrak{N}^k$, имеем $\mathfrak{F} = \cup(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^k)$, где $k \in \mathbb{N}$.

Будем рассматривать $k \geq 3$. Тогда по теореме А существует разбиение $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ такое, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^k = \times_{i\in I} \mathfrak{N}^k_{\sigma_i}$.

Рассмотрим формацию $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^{k+1}$. Ввиду теоремы А существует разбиение $\tau = \{\tau_j \mid j \in I\}$ множества $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ такое, что

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^{k+1} = \times_{j\in I} \mathfrak{N}^{k+1}_{\tau_j}.$$

Покажем, что разбиения σ и τ множества π совпадают. Пусть σ_i – элемент разбиения σ для некоторого $i \in I$. Предположим, что найдутся номера j_1 и j_2 такие, что $\sigma_i \cap \tau_{j_1} \neq \varnothing$ и $\sigma_i \cap \tau_{j_2} \neq \varnothing$. Возьмем $p \in \sigma_i \cap \tau_{j_1}$ и $q \in \sigma_i \cap \tau_{j_2}$. Тогда существует (p,q)-группа Шмидта R такая, что $R \in \mathfrak{N}^k_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^k$. Заметим, что

$$R \notin \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^{k+1} = \times_{j\in I} \mathfrak{N}^{k+1}_{\tau_j}.$$

Отсюда следует, что $\sigma_i \subseteq \tau_j$ для некоторого $j \in J$. Рассуждая аналогично для τ_j по отношению к элементам разбиения σ_i, получим, что $\sigma_i = \tau_j$. Таким образом, разбиения σ и τ совпадают. Заметим, что

$$\mathfrak{F} = \cup_{n\in\mathbb{N}}(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^k) = \cup_{n\in\mathbb{N}}(\times_{i\in I} \mathfrak{N}^k_{\sigma_i}) = \times_{i\in I}(\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{N}^k_{\sigma_i}).$$

Теперь из $\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{N}^k_{\sigma_i} = \mathfrak{S}_{\sigma_i}$ следует, что $\mathfrak{F} = \times_{i\in I} \mathfrak{S}_{\sigma_i}$. □

3 Заключительные замечания. Открытые вопросы

(1) Решение проблемы 1 в случае произвольной насыщенной S-замкнутой формации $\mathfrak{X}$, даже в случае $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$ является трудной задачей. Поэтому для решения общей проблемы необходимо накопление результатов для конкретных формаций $\mathfrak{X}$. Отметим без доказательства следующий, полученный нами результат.

Теорема В. *Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}^2$ и $\mathfrak{F}$ – подформация Фиттинга в $\mathfrak{X}$. Тогда следующие утверждения попарно эквивалентны.*

(1) *$\mathfrak{F}$ является формацией с условием Монахова в $\mathfrak{X}$.*

(2) *Если $G = AB$ – $\mathfrak{X}$-группа, A и B – $\mathfrak{F}$-подгруппы G, то $A \cap B \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.*

(3) *$\mathfrak{F}$ является насыщенной S-замкнутой формацией и задается полной локальной функцией f со значениями $f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{\pi(f(p))}$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$; $f(p) = \varnothing$, если $p \in \pi'(\mathfrak{F})$.*

Отметим ряд открытых проблем.

Проблема 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга (разрешимых) групп. Найти (конструктивно описать) все $\mathcal{M}$-классы Фиттинга в $\mathfrak{X}$.*

В случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ проблема 2 записана в Коуровскую тетрадь [9] под номером 14.29 в следующей редакции.

***Проблема** 3.* *Существует ли разрешимый класс Фиттинга конечных групп $\mathfrak{F}$, не являющийся* *формацией и такой, что $A_{\mathfrak{F}} \cap B_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ для любой конечной разрешимой группы вида G = AB*?

Напомним, что классом Шунка называется непустой примитивно замкнутый гомоморф.

***Проблема* 4.** *Найти* (*конструктивно описать*) *все радикальные* (*разрешимые*) *классы Шунка с условием Монахова.*

(2) Хорошо известно, если группа $G = AB$ является диабелевой, то $A \cap B \subseteq Z(G)$, где $Z(G)$ – центр группы. В случае динильпотентной группы $G = AB$ Пеннингтон в [10] доказала аналогичный результат для $F(G)$. В [11] Хайнекен установил, что в такой группе для любой непустой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ имеет место $A \cap B \subseteq H$, где H – некоторый $\mathfrak{F}$-проектор G. Отмеченная выше линия исследований была продолжена в работе [12].

***Проблема* 5.** *Найти все насыщенные S-замкнутые* (*разрешимые*) *формации $\mathfrak{F}$ такие, что для каждой ди-$\mathfrak{F}$-группы $G = AB$ выполняется: $A \cap B$ содержится в некотором $\mathfrak{F}$-проекторе G.*

(3) Для формулировки следующей проблемы, напомним [13], что подгруппа R группы $G = AB$ называется факторизуемой, если $R = (A \cap R)(B \cap R)$ и $A \cap B \subseteq R$.

Исследованию факторизуемых подгрупп (радикалов, проекторов, инъекторов и др.) динильпотентных групп посвящены работы [11], [14], [15]. В [16]–[19] изучались факторизуемые подгруппы различных произведений из $\mathfrak{F}$-групп.

***Определение* 2.** Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Класс $\mathfrak{F}$ назовем *радикальным классом с условием Пеннингтон* в $\mathfrak{X}$ (кратко, радикальным $\mathcal{P}$-классом в $\mathfrak{X}$), если $\mathfrak{F}$ – радикальный класс в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$ является факторизуемой подгруппой для любой $\mathfrak{X}$-группы $G = AB$.

***Проблема* 6.** *Пусть $\mathfrak{X}$ – насыщенная S-замкнутая формация и $\mathfrak{F}$ – радикальный в $\mathfrak{X}$ класс* (*формация*) *групп. Найти все $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$, для которых выполняется следующее утверждение: $\mathfrak{F}$ является $\mathcal{M}$-классом* (*$\mathcal{M}$-формацией*) *в $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является $\mathcal{P}$-классом* (*$\mathcal{P}$-формацией*) *в $\mathfrak{X}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Известия вузов. Серия Математика. – 1997. – Т. 426, № 11. – С. 10–14.
2. *Монахов*, *В.С.* О трижды факторизуемых группах / В.С. Монахов // Известия академии наук БССР. Серия физ.-мат. наук. – 1981. – № 6. – С. 18–22.
3. *Johnson*, *P.M.* A property of factorisable groups / P.M. Johnson // Arch. Math. – 1993. – Vol. 60. – P. 414–419.
4. *Amberg*, *B.* On finite products of soluble groups / B. Amberg, L.S. Kasarin // Israel J. Math. – 1999. – Vol. 106. – P. 93–108.
5. *Vasil'ev*, *A.F.* On radicals of products of finite soluble groups / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 2000. – № 3 (16). – С. 43–47.
6. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
7. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
8. *Халимончик*, *И.Н.* Формации Шеметкова в классе $\mathfrak{X}$ / И.Н. Халимончик // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2009. – Т. 55, № 4. – С. 219–223.
9. *Коуровская тетрадь*. Нерешенные вопросы теории групп / Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН; сост.: В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро. – 14-е изд. – Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 1999. – 135 с.
10. *Pennington*, *E.A.* On products of finite nilpotent groups / E.A. Pennington // Math. Z. – 1973. – Bd. 134. – S. 81–83.
11. *Heineken*, *H.* Products of finite nilpotent groups / H. Heineken // Mat. Ann. – 1990. – Vol. 287. – P. 643–652.
12. *Васильев*, *А.Ф.* О пересечении факторов конечных разрешимых произведений групп / А.Ф. Васильев // Труды Института математики. – 2006. – Т. 14, № 2. – С. 20–27.
13. *Amberg*, *B.* Products of Groups / B. Amberg, S. Franciosi and F. De Giovanni.– Oxford, 1992. – 220 p.
14. *Heineken*, *H.* The products of two finite nilpotent groups its Fitting series / H. Heineken // Arch. Math. – 1992. – Vol. 59. – P. 209–214.
15. *Amberg*, *B.* On finite products of nilpotent groups / B. Amberg, B. Höfling // Arch. Math. – 1994. – Vol. 63. – P. 1–8.
16. *Васильев*, *А.Ф.* О факторизуемых инъекторах конечных разрешимых групп / А.Ф. Васильев // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. – 2005. – № 4 (38). – С. 108–111.
17. *Васильев*, *А.Ф.* О факторизаторах подгрупп конечных разрешимых ди-$\mathfrak{F}$-групп / А.Ф. Васильев // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2006. – № 4. – С. 55–60.
18. *Васильева*, *Т.И.* О свойствах подгрупп конечных π-разрешимых ди-π-разложимых групп / Т.И. Васильева, Е.А. Рябченко // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2009. – № 4. – С. 15–19.
19. *Ballester-Bolinches*, *A.* Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Walter de Gruyter, Berlin. – 2010. – 334 p.

Поступила в редакцию 24.07.2021.

Информация об авторах

Васильев Александр Фёдорович – д.ф.-м.н., доцент