УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_101

ОБ ОДНОПОРОЖДЕННЫХ И ОГРАНИЧЕННЫХ ТОТАЛЬНО ω-КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

И.П. Лось, В.Г. Сафонов

Белорусский государственный университет, *Минск*

ON ONE-GENERATED AND BOUNDED TOTALLY ω-COMPOSITION FORMATIONS OF FINITE GROUPS

I.P. Los, V.G. Safonov

Belarusian State University, *Minsk*

Аннотация. Все рассматриваемые группы конечны. Пусть G – группа. Тогда через $c_\infty^\omega\mathrm{form}(G)$ обозначают пересечение всех тотально ω-композиционных формаций, содержащих группу G. Формацию $c_\infty^\omega\mathrm{form}(G)$ называют тотально ω-композиционной формацией, порожденной группой G или однопорожденной тотально ω-композиционной формацией. Тотально ω-композиционная формация $\mathfrak{F}$ называется ограниченной, если она является подформацией некоторой однопорожденной тотально ω-композиционной формации, т. е. $\mathfrak{F} \subseteq c_\infty^\omega\mathrm{form}(G)$ для некоторой группы G. В работе получены критерии однопорожденности (ограниченности) тотально ω-композиционной формации.

Ключевые слова: *формация конечных групп*, *ω-композиционная формация*, *однопорожденная формация*, *ограниченная формация*, *тотально ω-композиционная формация.*

Для цитирования: *Лось*, *И.П.* Об однопорожденных и ограниченных тотально ω-композиционных формациях конечных групп / И.П. Лось, В.Г. Сафонов // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 101–107. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_101

Abstract. All considered groups are finite. Let G be a group. Then $c_\infty^\omega\mathrm{form}(G)$ denotes the intersection of all totally ω-composition formations containing G. The formation $c_\infty^\omega\mathrm{form}(G)$ is called a totally ω-composition formation generated by G or a one-generated totally ω-composition formation. A totally ω-composition formation $\mathfrak{F}$ is called a bounded, if $\mathfrak{F}$ is a subformation of some one-generated totally ω-composition formation, that is, $\mathfrak{F} \subseteq c_\infty^\omega\mathrm{form}(G)$ for some group G. In this paper, criteria for the one-generation (boundedness) of a totally ω-composition formation are obtained.

Keywords: *formation of finite groups*, *ω-composition formation*, *one-generated formation*, *bounded formation*, *totally ω-composition formation.*

For citation: *Los*, *I.P.* On one-generated and bounded totally ω-composition formations of finite groups / I.P. Los, V.G. Safonov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 101–107. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_101 (in Russian)

Введение

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Мы используем терминалогию и обозначения, принятые в [1]–[3].

Пусть ω – непустое подмножество множества всех простых чисел. Всякую функцию вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}$$

называют ω-*композиционным спутником*. Для произвольного ω-композиционного спутника f полагают

$$CF_\omega(f) = \{G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(Com(G)) \cap \omega\},$$

где $Com(G)$ обозначает множество всех композиционных абелевых факторов G, $R_\omega(G)$ – наибольшая нормальная разрешимая ω-подгруппа группы G, $C^p(G)$ – пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют порядок p (если таких факторов у группы G нет, то полагают $C^p(G) = G$).

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторого ω-композиционного спутника f, то $\mathfrak{F}$ называют ω-*композиционной* формацией, а f – ω-*композиционным спутником* $\mathfrak{F}$.

Всякую формацию считают 0-*кратно* ω-*композиционной.* При $n \geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют *n-кратно* ω-*композиционной* [1], если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-композиционными формациями. Формация $\mathfrak{F}$

называется *тотально ω-композиционной*, если она является n-кратно ω-композиционной для всякого целого неотрицательного n.

Формации такого вида введены А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым в работе [1], где были установлены основные свойства n-кратно ω-композиционных (или, иначе, кратно частично композиционных) формаций, изучались n-кратно ω-композиционные произведения формаций такого вида, а также доказана алгебраичность и модулярность решетки всех n-кратно ω-композиционных формаций. В отмеченной работе было поставлено более двух десятков открытых вопросов, определивших перспективные направления исследований в теории частично композиционных формаций.

Полученные за последующее десятилетие результаты в этом направлении нашли свое отражение в монографиях [4], [5]. При этом необходимо отметить, что особое место при изучении свойств n-кратно (тотально) ω-композиционных формаций, их решеток и полугрупп занимают формации, порождаемые одной единственной группой, так называемые однопорожденные n-кратно (тотально) ω-композиционные формации. Напомним [1], что через $c_n^\omega\mathrm{form}(G)$ $(c_\infty^\omega\mathrm{form}(G))$ обозначают пересечение всех n-кратно (тотально) ω-композиционных формаций, содержащих данную группу G, а формацию $c_n^\omega\mathrm{form}(G)$ (соответственно, $c_\infty^\omega\mathrm{form}(G)$) называют n-кратно (тотально) ω-композиционной формацией, порожденной группой G или однопорожденной n-кратно (тотально) ω-композиционной формацией.

Как было показано в работе [1], однопорожденные n-кратно ω-композиционные формации являются компактными элементами решетки c_n^ω всех n-кратно ω-композиционных формаций. В недавно опубликованной работе В.В. Щербины [6] доказана, в частности, алгебраичность решетки c_∞^ω всех тотально ω-композиционных формаций, компактными элементами которой являются однопорожденные тотально ω-композиционные формации. Кроме того, при изучении тотально ω-композиционных формаций с заданными системами (структурой) подформаций (см., например, [7]) существенную роль играют минимальные тотально ω-композиционные не $\mathfrak{H}$-формации ($\mathfrak{H}$ – некоторый заданный класс групп), которые также однопорождены. Поэтому задача изучения однопорожденных ω-композиционных формаций весьма актуальна.

Не менее важными и интересными объектами исследований теории n-кратно (тотально) ω-композиционных формаций являются так называемые ограниченные формации. При этом n-кратно (тотально) ω-композиционную формацию $\mathfrak{F}$ называют *ограниченной*, если она является подформацией некоторой однопорожденной n-кратно (тотально) ω-композиционной формации, т. е. имеет место включение $\mathfrak{F}\subseteq c_n^\omega\mathrm{form}(G)$ (соответственно, $\mathfrak{F}\subseteq c_\infty^\omega\mathrm{form}(G)$) для некоторой группы G.

Необходимо отметить, что до настоящего времени менее изученными остаются тотально ω-композиционные формации. Накопленный идейный и технический материал позволил в последние годы несколько активизировать исследования по теории тотально композиционных формаций (см, например, работы А.А. Царева [8]–[10]), а также тотально ω-композиционных формаций (см. работы авторов [7], [11]–[13], В.В. Щербины [6], [14]). Данное обстоятельство подтверждает перспективность таких исследований.

Совокупность всех тотально ω-композиционных формаций будем обозначать через c_∞^ω, формации, принадлежащие c_∞^ω, называть *c_∞^ω формациями.*

Пусть f – ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда если все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то спутник f называют *внутренним* (или *приведенным*). Спутник f называют *c_∞^ω-значным*, если все его значения принадлежат c_∞^ω. Пусть $\{f_i \mid i\in I\}$ – набор всех c_∞^ω-значных ω-композиционных спутников формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\bigcap_{i\in I} f_i$ – c_∞^ω-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, который называют *минимальным c_∞^ω-значным ω-композиционным спутником* формации $\mathfrak{F}$.

В данной работе мы доказываем следующие критерии однопорожденности (ограниченности) тотально ω-композиционной формации.

***Теорема* 0.1.** *Пусть $\mathfrak{F}=CF_\omega(f)$, где f – минимальный c_∞^ω-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, $\pi=\pi(Com(\mathfrak{F}))\cap\omega$. Тогда $\mathfrak{F}$ является однопорожденной тотально ω-композиционной формацией в том и только в том случае, когда $|\pi|<\infty$ и $f(a)$ – однопороженная c_∞^ω-формация для всех $a\in\pi\cup\{\omega'\}$.*

***Теорема* 0.2.** *Пусть $\mathfrak{F}=CF_\omega(f)$, где f – минимальный c_∞^ω-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, $\pi=\pi(Com(\mathfrak{F}))\cap\omega$. Тогда $\mathfrak{F}$ является ограниченной тотально ω-композиционной формацией в том и только в том случае, когда $|\pi|<\infty$ и $f(a)$ – ограниченная c_∞^ω-формация для всех $a\in\pi\cup\{\omega'\}$.*

1 Вспомогательные результаты

Для доказательства основных результатов работы нам понадобятся некоторые известные факты теории частично композиционных формаций, которые мы сформулируем в виде следующих лемм.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторая совокупность групп. Тогда через $c_\infty^\omega\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ обозначают пересечение всех c_∞^ω-формаций, содержащих $\mathfrak{X}$ и называют *тотально ω-композиционной формацией, порожденной* $\mathfrak{X}$, а если $\mathfrak{X}=\{G\}$, то $c_\infty^\omega\mathrm{form}(G)$ называют *однопорожденной тотально ω-композиционной формацией*.

Лемма 1.1 [1, Лемма 5]. *Если* $\mathfrak{F}=c_\infty^\omega\mathrm{form}(\mathfrak{X})$, $\pi=\omega\cap\pi(Com(\mathfrak{X}))$ *и f – минимальный* c_∞^ω*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$, *то справедливы следующие утверждения*:

1) $f(\omega')=c_\infty^\omega\mathrm{form}(G/R_\omega(G)\mid G\in\mathfrak{X})$;

2) $f(p)=c_\infty^\omega\mathrm{form}(G/C^p(G)\mid G\in\mathfrak{X})$ для всех $p\in\pi$;

3) $f(p)=\varnothing$ для всех $p\in\omega\setminus\pi$;

4) если $\mathfrak{F}=CF_\omega(h)$, *спутник* h c_∞^ω*-значен, то для всех* $p\in\pi$ *имеет место*

$$f(p)=c_\infty^\omega\mathrm{form}(A\mid A\in h(p)\cap\mathfrak{F},O_p(G)=1)$$

и

$$f(\omega')=c_\infty^\omega\mathrm{form}(A\mid A\in h(\omega')\cap\mathfrak{F},R_\omega(A)=1).$$

Лемма 1.2 [15, Лемма 2]. *Пусть* Z_p *– группа порядка p и G – группа с* $O_p(G)=1$. *Тогда база регулярного сплетения* $T=Z_p\wr G$ *совпадает с* $C^p(T)=O_p(T)$.

Лемма 1.3 [1, Лемма 4]. *Если* $\mathfrak{F}=CF_\omega(f)$ *и* $G/O_p(G)\in\mathfrak{F}\bigcap f(p)$ *для некоторого* $p\in\omega$, *то* $G\in\mathfrak{F}$.

Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ и всякого простого числа *p* класс групп $\mathfrak{X}(C^p)$ определяется следующим образом [1]:

$$\mathfrak{X}(C^p)=\mathrm{form}(G/C^p(G)\mid G\in\mathfrak{X}),$$

если $p\in\pi(Com(\mathfrak{X}))$ и $\mathfrak{X}(C^p)=\varnothing$, если $p\notin\pi(Com(\mathfrak{X}))$.

Всякая ω-композиционная формация $\mathfrak{F}$ имеет такой ω-композиционный спутник *f*, что $f(\omega')=\mathfrak{F}$ и $f(p)=\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(C^p)$ для всех $p\in\omega$. Такой спутник называют каноническим.

Лемма 1.4 [1, Замечание 2]. *Если формация* $\mathfrak{F}=CF_\omega(F)=CF_\omega(f)$, *то* $F(p)=\mathfrak{N}_p(f(p)\bigcap\mathfrak{F})$ *для всех* $p\in\pi(Com(\mathfrak{F}))\cap\omega$.

Напомним, что формацию $\mathfrak{F}$ называют [16], [17]

1) *ω-разрешимо насыщенной, если из условия* $G/N\in\mathfrak{F}$ *для нормальной в G ω-подгруппы N из* $\Phi(G_{\omega-\mathfrak{S}})$, *всегда следует, что* $G\in\mathfrak{F}$ (*здесь* $G_{\omega-\mathfrak{S}}$ *обозначает ω-разрешимый радикал группы G*);

2) $\mathfrak{N}_\omega$*-насыщенной*, если для любого $p\in\omega$ из того, что $G/\Phi(O_p(G))\in\mathfrak{F}$ всегда следует, что $G\in\mathfrak{F}$.

Для всякого простого числа *p* через Z_p обозначают группу порядка *p*. Если *G* – группа, $\mathfrak{F}$ – класс групп, то через $\mathcal{K}(G)$ обозначают класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы *G*, $\mathcal{K}(\mathfrak{F})=\cup_{G\in\mathfrak{F}}\mathcal{K}(G)$. Совокупность всех гомоморфных образов групп из $\mathfrak{F}$ обозначают через $\mathrm{Q}(\mathfrak{F})$.

Лемма 1.5 [17, Теорема 4.5]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая формация, ω – непустое множество простых чисел. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{N}_\omega$-насыщенной;

2) формация $\mathfrak{F}$ ω-разрешимо насыщенна;

3) $c\mathrm{form}(\mathfrak{F})\subseteq\mathfrak{N}_{\omega'}\mathfrak{F}$;

4) $\mathfrak{F}=CF_\omega(f)$, где *f* – ω-композиционный спутник, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $f(p)=\mathrm{Q}(G/C^p(G)\mid G\in\mathfrak{F})$, если $p\in\omega$ и $Z_p\in Com(\mathfrak{F})$;

б) $f(p)=\varnothing$,

в) $f(S)=\mathfrak{F}$, если $S\in\mathfrak{J}\setminus\{Z_p\mid p\in\omega\}$, где $\mathfrak{J}$ – класс всех простых групп.

Для двух ω-композиционных спутников *f* и *h* полагают $f\le h$, если $f(a)\subseteq h(a)$ для всех $a\in\omega\cup\{\omega'\}$. Отметим, что если $\mathfrak{F}=CF_\omega(F)$ и *f* – произвольный внутренний ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, то $f\le F$.

Лемма 1.6 [1, Лемма 6]. *Пусть* f_1 *и* f_2 *– минимальные ω-композиционные* c_∞^ω*-значные спутники формаций* $\mathfrak{F}_1$ *и* $\mathfrak{F}_2$ *соответственно. Тогда* $\mathfrak{F}_1\subseteq\mathfrak{F}_2$ *в том и только в том случае, когда* $f_1\le f_2$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация групп. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначают пересечение всех нормальных подгрупп *K* группы *G* с $G/K\in\mathfrak{F}$ и называют $\mathfrak{F}$*-корадикалом* группы *G*. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – формации, то гашюцово произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ определяется следующим образом: $G\in\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $G^{\mathfrak{H}}\in\mathfrak{F}$.

Лемма 1.7 [18, Гл. IV.], [19, Предложение 2.2.11]. *Пусть* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ *и* $\mathfrak{M}$ *– формации. Тогда*:

1) $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{H}$, если $\mathfrak{F}\ne\varnothing$;

2) $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является формацией;

3) $G^{\mathfrak{F}\mathfrak{H}}=(G^{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{F}}$ для всех $G\in\mathfrak{G}$;

4) $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})\mathfrak{M} = \mathfrak{F}(\mathfrak{H}\mathfrak{M})$.

***Лемма* 1.8** [1]. *Пусть формация* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, *где* $\mathfrak{H} = CF_{\omega}(h)$, $\mathfrak{M} = CF_{\omega}(m)$ *и спутники h и m являются внутренними. Тогда если* $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, *то формация* $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, *где* $f(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $f(p) = m(p)\mathfrak{H}$, *если* $m(p) \neq \varnothing$, $f(p) = h(p)$, *если* $m(p) = \varnothing$.

2 Доказательство основных результатов

***Лемма* 2.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация,* $\varnothing \neq \omega \subseteq \pi \subseteq \mathbb{P}$. *Тогда произведение* $\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}$ *является тотально ω-композиционной формацией. В частности, формация* $\mathfrak{S}_{\omega}\mathfrak{F}$ *тотально ω-композиционна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}$. Покажем прежде, что формация $\mathfrak{M}$ является $\mathfrak{N}_p$-насыщенной для любого $p \in \omega$. Действительно, пусть $p \in \omega$ и $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{M}$. Тогда

$$G^{\mathfrak{M}} \subseteq \Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{N}_p.$$

Значит, $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{M}$. Поскольку ввиду леммы 1.7 (4) имеет место

$$\mathfrak{N}_p\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}) = (\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{\pi})\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F} = \mathfrak{M},$$

то $G \in \mathfrak{M}$. Поэтому $\mathfrak{M}$ – $\mathfrak{N}_p$-насыщенная формация для любого $p \in \omega$. В силу леммы 1.5 формация $\mathfrak{M}$ является ω-композиционной.

Рассмотрим формацию всех нильпотентных π-групп $\mathfrak{N}_{\pi}$. Поскольку $\mathfrak{N}_{\pi}$ является композиционной формацией, то она ω-композиционна. Понятно также, что для любого $p \in \omega$ имеет место $\mathfrak{N}_{\pi}(C^p) = (1)$, где (1) – формация всех единичных групп. Согласно лемме 1.5 (2) имеем $\mathfrak{N}_{\pi} = CF_{\omega}(t)$, где t – такой ω-композиционный спутник, что $t(\omega') = \mathfrak{N}_{\pi}$, $t(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{\pi}(C^p) = \mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$. В силу леммы 1.7 (4) имеют место равенства

$$\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{\pi}(\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}) = (\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi})\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F} = \mathfrak{M}.$$

Применяя теперь лемму 1.8 заключаем, что формация $\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{M}$ имеет такой ω-композиционный спутник m, что $m(\omega') = \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ и

$$m(p) = t(p)\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$$

для всех $p \in \omega$. Поскольку при этом формация $\mathfrak{M}$ является ω-композиционной и $m(\omega') = \mathfrak{M}$, $m(p) = \mathfrak{M}$ для всех $p \in \omega$, то $\mathfrak{M}$ – 2-кратно ω-композиционная формация. Но тогда $\mathfrak{M}$ – *n*-кратно ω-композиционная формация для любого натурального *n*. Значит, $\mathfrak{M}$ – тотально ω-композиционная формация. В частности, если $\pi = \omega$, то $\mathfrak{S}_{\omega}\mathfrak{F}$ – тотально ω-композиционная формация. □

Доказательство теоремы 0.1. *Необходимость*. Пусть $\mathfrak{F} = c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(G)$ и f – минимальный c_{∞}^{ω}-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда ввиду леммы 1.1 ω-композиционный спутник f является внутренним, а также имеют место следующие равенства:

$$\pi = \omega \cap \pi(Com(G)), \quad f(p) = c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(G/C^p(G))$$

для всех $p \in \pi$ и $f(\omega') = c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(G/R_{\omega}(G))$. Таким образом, $|\pi| < \infty$ и $f(a)$ – однопорожденная тотально ω-композиционная формация для всех $a \in \pi \cup \{\omega'\}$.

Достаточность. Пусть

$$\pi = \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{F})) = \{p_1, \ldots, p_m\}$$

– конечное множество, $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, где f – такой внутренний c_{∞}^{ω}-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, что $f(p_i) = c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(H_i)$ для любого $p_i \in \pi$ и $f(\omega') = c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(H_0)$.

Для каждого $p_i \in \pi$ через P_i обозначим группу порядка p_i и пусть B_i – регулярное сплетение групп P_i и $H_i/O_{p_i}(H_i)$. Тогда для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ имеем

$$B_i = P_i \wr (H_i/O_{p_i}(H_i)) = K_i \rtimes (H_i/O_{p_i}(H_i)),$$

где K_i – база сплетения B_i. В силу леммы 1.2 имеем $C^{p_i}(B_i) = O_{p_i}(B_i) = K_i$. Пусть $B_0 = H_0/R_{\omega}(H_0)$. Тогда $R_{\omega}(B_0) = 1$ и ввиду леммы 1.1 (4) имеет место равенство

$$f(\omega') = c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(A \mid A \in f(\omega'), R_{\omega}(A) = 1).$$

В силу леммы 2.1 формация $\mathfrak{S}_{\omega}\mathrm{form}(H_0)$ является тотально ω-композиционной. Поэтому

$$f(\omega') = c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(H_0) \subseteq \mathfrak{S}_{\omega}\mathrm{form}(H_0).$$

Кроме того, очевидно включение

$$\mathrm{form}(H_0) \subseteq \mathrm{form}(R_{\omega}(H_0))\mathrm{form}(H_0/R_{\omega}(H_0)).$$

Таким образом, с учетом леммы 1.7 (4) имеем

$$f(\omega') \subseteq c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(H_0) \subseteq \mathfrak{S}_{\omega}\mathrm{form}(H_0) \subseteq$$
$$\subseteq \mathfrak{S}_{\omega}(\mathrm{form}(R_{\omega}(H_0))\mathrm{form}(H_0/R_{\omega}(H_0))) =$$
$$= (\mathfrak{S}_{\omega}\mathrm{form}(R_{\omega}(H_0)))\mathrm{form}(H_0/R_{\omega}(H_0)) =$$
$$= \mathfrak{S}_{\omega}\mathrm{form}(H_0/R_{\omega}(H_0)) = \mathfrak{S}_{\omega}\mathrm{form}(B_0).$$

Следовательно, если $A \in f(\omega') \subseteq \mathfrak{S}_{\omega}\mathrm{form}(B_0)$ и $R_{\omega}(A) = 1$, то $A \in \mathrm{form}(B_0) \subseteq c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(B_0)$. Так как при этом $B_0 \in f(\omega')$, то $f(\omega') = c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(B_0)$.

Покажем, что $\mathfrak{F} = c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(B)$, где

$$B = B_0 \times B_1 \times \ldots \times B_m.$$

Пусть $\mathfrak{L} = c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(B)$, $\pi_1 = \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{L}))$, а L – канонический ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{L}$. Ввиду леммы 1.1 имеем $\pi_1 = \omega \cap \pi(Com(B))$. Заметим, что по построению группы B имеет место равенство

$$\omega \cap \pi(Com(B)) = \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{F})).$$

Следовательно, $\pi_1 = \pi$. Поскольку

$$B_i / O_{p_i}(B_i) = B_i / K_i \simeq H_i / O_{p_i}(H_i) \in f(p_i)$$

и f внутренний ω-композиционный спутник, то в силу леммы 1.3 имеем $B_i \in \mathfrak{F}$ для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$. Кроме того, $B_0 \in f(\omega') \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $B \in \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$.

Покажем теперь обратное включение. Поскольку $B_i \in \mathfrak{L}$, то

$$B_i / C^{p_i}(B_i) = B_i / K_i \simeq H_i / O_{p_i}(H_i) \in L(p_i).$$

Следовательно, $H_i \in \mathfrak{N}_{p_i} L(p_i)$. Но $L(p_i) = \mathfrak{N}_{p_i} L(p_i)$ по лемме 1.4. Значит, для всех $p_i \in \pi$ имеем

$$f(p_i) = c_\infty^\omega \mathrm{form}(H_i) \subseteq L(p_i).$$

Кроме того, поскольку $B_0 \in \mathfrak{L}$ и $R_\omega(B_0) = 1$, то $B_0 \simeq B_0 / R_\omega(B_0) \in L(\omega')$. Значит,

$$f(\omega') = c_\infty^\omega \mathrm{form}(B_0) \subseteq L(\omega').$$

Таким образом, для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ имеет место включение $f(a) \subseteq L(a)$. Следовательно, $f \le L$. Последнее влечет $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} = c_\infty^\omega \mathrm{form}(B)$ – однопорожденная тотально ω-композиционная формация. □

В случае, когда $\omega = \{p\}$ из теоремы 0.1 получаем

***Следствие* 2.1.** *Пусть* $\mathfrak{F} = CF_p(f)$ *– тотально p-композиционная формация, f – минимальный* c_∞^p *-значный p-композиционный спутник формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *является однопорожденной тотально p-композиционной формацией в том и только в том случае, когда* $f(p)$ *и* $f(p')$ *– однопорожденные тотально p-композиционные формации.*

Если $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы 0.1 вытекает следующий результат

***Следствие* 2.2.** *Пусть* $\mathfrak{F} = CF(f)$ *– тотально композиционная формация, f – минимальный* c_∞ *-значный композиционный спутник формации* $\mathfrak{F}$, $\pi = \pi(Com(\mathfrak{F}))$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *является однопорожденной тотально композиционной формацией в том и только в том случае, когда* $|\pi| < \infty$ *и* $f(p)$ *– однопорожденная тотально композиционная формация для всех* $p \in \pi$.

***Лемма* 2.2.** *Пусть G – группа и* $\mathfrak{H}$ *– класс всех таких групп H, что* $Com(H) \subseteq Com(G)$. *Тогда* $\mathfrak{H} = CF_\omega(h)$, *где h – такой внутренний* c_∞^ω *-значный ω-композиционный спутник, что* $h(p) = \mathfrak{H}$ *для всех* $p \in \omega \cap \pi(Com(G))$, $h(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \omega \setminus \pi(Com(G))$ *и* $h(\omega') = \mathfrak{H}$.

Доказательство. Заметим прежде, что класс групп $\mathfrak{H}$ является формацией. Действительно, пусть $A \in \mathfrak{H}$ и $K \trianglelefteq A$. Тогда $Com(A) \subseteq Com(G)$ и поскольку $Com(A/K) \subseteq Com(A)$, то $Com(A/K) \subseteq Com(G)$. Значит, $A/K \in \mathfrak{H}$. Пусть теперь $A/K_1 \in \mathfrak{H}$, $A/K_2 \in \mathfrak{H}$, где $K_1 \cap K_2 = 1$. Тогда $Com(A/K_i) \subseteq Com(G)$, $i = 1, 2$. Понятно, что $K_1K_2/K_2 \trianglelefteq A/K_2$. Следовательно,

$$Com(K_1K_2/K_2) \subseteq Com(A/K_2) \subseteq Com(G).$$

А поскольку

$$K_1K_2/K_2 \simeq K_1/K_1 \cap K_2 \simeq K_1,$$

то $Com(K_1) \subseteq Com(G)$. Поэтому $Com(A) \subseteq Com(G)$. Последнее влечет $A \in \mathfrak{H}$. Следовательно, класс групп $\mathfrak{H}$ является формацией.

Пусть теперь h – такой ω-композиционный спутник, что $h(p) = \mathfrak{H}$ для всех $p \in \omega \cap \pi(Com(G))$, $h(p) = \varnothing$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(Com(G))$ и $h(\omega') = \mathfrak{H}$. Покажем, что $CF_\omega(h) = \mathfrak{H}$. Заметим, что если $B \in \mathfrak{H}$, то $B/R_\omega(B) \in \mathfrak{H} = h(\omega')$ и $B/C^p(B) \in \mathfrak{H} = h(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(Com(B)) \subseteq \omega \cap \pi(Com(G))$, поскольку $\mathfrak{H}$ формация. Следовательно, $B \in CF_\omega(h)$ и, значит, $\mathfrak{H} \subseteq CF_\omega(h)$. Последнее означает, что h внутренний ω-композиционный спутник формации $CF_\omega(h)$.

Допустим, что $CF_\omega(h) \not\subseteq \mathfrak{H}$ и пусть D – группа минимального порядка из $CF_\omega(h) \setminus \mathfrak{H}$. Тогда D монолитическая группа с монолитом $N = D^{\mathfrak{H}}$ и $Com(D/N) \subseteq Com(G)$.

Предположим, что $R_\omega(D) = 1$. Тогда поскольку $D \in CF_\omega(h)$, то $D \simeq D/R_\omega(D) \in h(\omega') = \mathfrak{H}$. Противоречие. Значит, $R_\omega(D) \ne 1$. Поэтому N – абелева p-группа для некоторого $p \in \omega$. Поскольку $D \in CF_\omega(h)$, то $D/C^p(D) \in h(p)$ и $h(p) \ne \varnothing$, т. е. $p \in \omega \cap \pi(Com(G))$. Но тогда $Com(N) \subseteq Com(G)$ и, значит, $Com(D) \subseteq Com(G)$. Следовательно, $D \in \mathfrak{H}$. Противоречие.

Таким образом, $CF_\omega(h) = \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}$ – ω-композиционная формация. Поскольку при этом все значения ω-композиционного спутника h являются ω-композиционными формациями ($h(a) = \mathfrak{H}$ для любого $a \in (\omega \cap \pi(Com(G))) \cup \{\omega'\}$ и $h(a) = \varnothing$ для любого $a \in \omega \setminus \pi(Com(G))$), то $CF_\omega(h)$ – 2-кратно ω-композиционная формация и т. д. Последнее означает, что формация $CF_\omega(h)$ является n-кратно ω-композиционной для любого натурального n, т. е. $CF_\omega(h) = \mathfrak{H}$ – тотально ω-композиционная формация, а h – c_∞^ω -значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{H}$. □

Доказательство теоремы 0.2. *Необходимость*. Пусть $\mathfrak{F}$ – ограниченная тотально ω-композиционная формация. Тогда найдется такая группа G, что

$$\mathfrak{F} \subseteq c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(G) = \mathfrak{X}.$$

Пусть $\mathfrak{H}$ – класс всех таких групп H, что $Com(H) \subseteq Com(G)$. Понятно, что $G \in \mathfrak{H}$ и $Com(\mathfrak{H}) = Com(G)$. В силу леммы 2.2 формация $\mathfrak{H}$ является тотально ω-композиционной. Поэтому имеет место следующее включение

$$\mathfrak{X} = c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(G) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Значит, $Com(\mathfrak{X}) = Com(G)$. Следовательно, $Com(\mathfrak{F}) \subseteq Com(\mathfrak{X}) = Com(G)$ и $|\pi| < \infty$.

Обозначим через x – минимальный c_{∞}^{ω}-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{X}$. Тогда ввиду леммы 1.6 $f \le x$. В силу леммы 1.1 имеем

$$f(p) = c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(A / C^{p}(A) \mid A \in \mathfrak{F}) \subseteq x(p) = $$
$$= c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(G / C^{p}(G))$$

для всех $p \in \omega \cap \pi(Com(G))$ и

$$f(\omega') = c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(A / R_{\omega}(A) \mid A \in \mathfrak{F}) \subseteq x(\omega') =$$
$$= c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(G / R_{\omega}(G)).$$

Таким образом, $|\pi| < \infty$ и для всех $a \in \pi \cup \{\omega'\}$ формация $f(a)$ является ограниченной тотально ω-композиционной формацией.

Достаточность. Пусть

$$\pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega = \{p_1, \ldots, p_m\}$$

– конечное множество, $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, где f – минимальный c_{∞}^{ω}-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$ и $f(\omega')$, $f(p_1), \ldots, f(p_m)$ – ограниченные тотально ω-композиционные формации. Тогда найдется группа K_0 такая, что $f(\omega') \subseteq c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(K_0)$ и для каждого $p_i \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ найдется группа K_i такая, что $f(p_i) \subseteq c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(K_i)$.

Пусть P_i – группа порядка p_i и пусть D_i – регулярное сплетение групп P_i и $K_i / O_{p_i}(K_i)$. Тогда $D_i = P_i \wr (K_i / O_{p_i}(K_i)) = T_i \rtimes (K_i / O_{p_i}(K_i))$, где T_i – база регулярного сплетения D_i. Из леммы 1.2 следует, что $C^{p_i}(D_i) = O_{p_i}(D_i) = T_i$. Пусть $D_0 = K_0 / R_{\omega}(K_0)$. Тогда $R_{\omega}(D_0) = 1$. Ввиду леммы 1.1 (4) имеет место равенство

$$f(\omega') = c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(A \mid A \in f(\omega'), R_{\omega}(A) = 1).$$

В силу леммы 2.1 формация $\mathfrak{S}_{\omega}\mathrm{form}(K_0)$ является тотально ω-композиционной. Поэтому

$$f(\omega') \subseteq c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(K_0) \subseteq \mathfrak{S}_{\omega}\mathrm{form}(K_0).$$

Кроме того, очевидно включение

$$\mathrm{form}(K_0) \subseteq \mathrm{form}(R_{\omega}(K_0))\mathrm{form}(K_0 / R_{\omega}(K_0)).$$

Таким образом, ввиду леммы 1.7 (4) имеет место

$$f(\omega') \subseteq c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(K_0) \subseteq \mathfrak{S}_{\omega}\mathrm{form}(K_0) \subseteq$$
$$\subseteq \mathfrak{S}_{\omega}(\mathrm{form}(R_{\omega}(K_0))\mathrm{form}(K_0 / R_{\omega}(K_0))) =$$
$$= (\mathfrak{S}_{\omega}\mathrm{form}(R_{\omega}(K_0)))\mathrm{form}(K_0 / R_{\omega}(K_0)) =$$
$$= \mathfrak{S}_{\omega}\mathrm{form}(K_0 / R_{\omega}(K_0)) = \mathfrak{S}_{\omega}\mathrm{form}(D_0).$$

Следовательно, если $A \in f(\omega')$ и $R_{\omega}(A) = 1$, то $A \in \mathfrak{S}_{\omega}\mathrm{form}(D_0)$. Значит,

$$A \in \mathrm{form}(D_0) \subseteq c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(D_0).$$

Поэтому имеет место включение

$$f(\omega') = c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(A \mid A \in f(\omega'), R_{\omega}(A) = 1) \subseteq$$
$$\subseteq c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(D_0).$$

Пусть $\mathfrak{L} = c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(D)$, где $D = D_0 \times D_1 \times \ldots \times D_m$. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}$. Пусть $\pi = \pi(Com(\mathfrak{L})) \cap \omega$ и l – минимальный c_{∞}^{ω}-значный ω-композиционный спутник $\mathfrak{L}$. Ввиду леммы 1.1 имеем $\pi = \omega \cap \pi(Com(D))$. Заметим, что по построению группы D имеет место равенство

$$\omega \cap \pi(Com(D)) = \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{F})).$$

Следовательно, $\pi = \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{F}))$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{L}$ и пусть A – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{L}$. Тогда A – монолитическая группа с монолитом $T = A^{\mathfrak{L}}$. Предположим, что $R_{\omega}(A) = 1$. Тогда поскольку $A \in \mathfrak{F}$, то в силу леммы 1.1 имеем

$$A \simeq A / 1 = A / R_{\omega}(A) \in f(\omega') \subseteq c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(D_0).$$

Однако поскольку $D_0 \simeq D / (D_1 \times \ldots \times D_m) \in \mathfrak{L}$, то $A \in \mathfrak{L}$. Полученное противоречие показывает, что $R_{\omega}(A) \ne 1$. Поэтому T – абелева p-группа для некоторого простого $p \in \omega$. Так как при этом $p \in \pi(Com(A))$ и $A \in \mathfrak{F}$, то $p \in \pi$. Не ограничивая общности мы можем считать, что $p = p_1$. Поскольку ввиду леммы 1.5 (1) формация $\mathfrak{L}$ является $\mathfrak{N}_p$-насыщенной, то $T \not\subseteq \Phi(O_p(A))$. Поэтому $T = O_p(A) = C^{p}(A)$. Тогда поскольку $A \in \mathfrak{F}$, то

$$A / C^{p}(A) \in f(p) \subseteq c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(K_1).$$

Так как $T = O_p(A) = C^{p}(A)$, то $O_p(A / C^{p}(A)) = 1$. По лемме 1.1 имеем

$$A / C^{p}(A) \in c_{\infty}^{\omega}\mathrm{form}(K_1 / O_p(K_1)).$$

Понятно, что $D_1 \in \mathfrak{L}$. Значит, $D_1 / C^{p}(D_1) \in l(p)$. Ввиду леммы 1.2 имеем $T_1 = C^{p}(D_1)$. Следовательно,

$$K_1 / O_p(K_1) \simeq D_1 / T_1 = D_1 / C^{p}(D_1) \in l(p).$$

Таким образом, $D_1 / C^{p}(D_1) \in l(p)$. Поскольку $A / T \in \mathfrak{L}$, то в силу леммы 1.1 имеем

$$(A / T) / R_{\omega}(A / T) \in l(\omega'),$$

и $(A / T) / C^{q}(A / T) \in l(q)$ для всех

$$q \in \pi(Com(A / T)) \cap \omega.$$

С другой стороны, поскольку $R_\omega(A/T) = R_\omega(A)/T$ и $C^q(A/T) = C^q(A)/T$ для всех простых чисел $q \neq p$, то

$$A/R_\omega(A) \simeq (A/T)/(R_\omega(A)/T) \simeq$$
$$\simeq (A/T)/R_\omega(A/T) \in l(\omega')$$

и $A/C^q(A) \simeq (A/T)/C^q(A/T) \in l(q)$.

Значит, $A \in \mathfrak{L}$. Последнее противоречит выбору группы A. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}$. Таким образом, $\mathfrak{F}$ – ограниченная c_∞^ω-формация. □

Пусть $\omega = \{p\}$. Тогда из теоремы 0.2 вытекает следующее

***Следствие* 2.3.** *Пусть* $\mathfrak{F} = CF_p(f)$ *– тотально p-композиционная формация, f – её минимальный* c_∞^p*-значный p-композиционный спутник. Тогда* $\mathfrak{F}$ *является ограниченной тотально p-композиционной формацией в том и только в том случае, когда* $f(p)$ *и* $f(p')$ *– ограниченные тотально p-композиционные формации.*

Пусть $\omega = \mathbb{P}$, тогда из теоремы 0.2 получаем

***Следствие* 2.4.** *Пусть* $\mathfrak{F} = CF(f)$ *– тотально композиционная формация, f – её минимальный* c_∞*-значный композиционный спутник,* $\pi = \pi(Com(\mathfrak{F}))$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *является ограниченной тотально композиционной формацией в том и только в том случае, когда* $|\pi| < \infty$ *и* $f(p)$ *является ограниченной тотально композиционной формацией для всех* $p \in \pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скиба*, *А.Н.* Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский математический журнал. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.
2. *Шеметков*, *Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989.
3. *Скиба*, *А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997.
4. *Селькин*, *В.М.* Однопорожденные формации / В.М. Селькин. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2011.
5. *Воробьев*, *Н.Н.* Алгебра классов конечных групп / Н.Н. Воробьев. – Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2012.
6. *Щербина*, *В.В.* О двух задачах теории частично тотально композиционных формаций конечных групп / В.В. Щербина // Прикладная математика & Физика. – 2020. – Т. 52, № 1. – С. 18–32. – DOI: https://doi.org/10.18413/2687-0959-2020-52-1-18-32.
7. *Лось*, *И.П.* τ-Замкнутые тотально ω-композиционные формации конечных групп с булевыми подрешетками / И.П. Лось, В.Г. Сафонов // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского // Материалы Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии. – Казань: Изд-во Академии наук РТ. – 2021. – Т. 60. – С. 92–94.
8. *Tsarev*, *A.A.* Inductive lattices of totally composition formations / A.A. Tsarev // Revista Colombiana de Matematicas. – 2018. – Vol. 52, № 2. – P. 161–169. – DOI: https://dx.doi.org/10.15446/recolma.v52n2.77156.
9. *Tsarev*, *A.A.* On the lattice of all totally composition formations of finite groups / A.A. Tsarev // Ricerche di Matematica. – 2019. – Vol. 68, № 2. – P. 693–698. – DOI: 10.1007/s11587-019-00433-3.
10. *Tsarev*, *A.A.* On the lattice of all totally composition formations of finite groups / A.A. Tsarev // Ricerche Mat. – 2019. – Vol. 68, № 2. – P. 693–698.
11. *Los*, *I.P.* Separability of the lattice of τ-closed totally ω-composition formations of finite groups / I.P. Los, V.G. Safonov // The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. July 02-06, 2019. – Vinnytsia, Ukraine. – 2019. – P. 64–65.
12. *Лось*, *И.П.* Модулярность решетки τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций конечных групп / И.П. Лось, В.Г. Сафонов // XIII школа-конференция по теории групп, посвященная 85-летию В.А. Белоногова, 3–7 августа 2020. – Екатеринбург. – 2020. – С. 62–63.
13. *Лось*, *И.П.* On sublattices of the lattice of all totally ω-composition formations of finite groups / И.П. Лось, В.Г. Сафонов // Международная математическая конференция «Мальцевские чтения», посвященная 80-летию Ю.Л. Ершова, 16–20 ноября 2020. – Новосибирск. – 2020. – С. 178.
14. *Щербина*, *В.В.* Частично композиционные формации с заданной структурой. I. / В.В. Щербина // Прикладная математика & Физика. – 2021. – Т. 53, № 3. – С. 171–204.
15. *Скиба*, *А.Н.* О минимальном композиционном экране композиционной формации / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Вопросы алгебры. – 1992. – № 7. – С. 39–43.
16. *Shemetkov*, *L.A.* Frattini extensions of finite groups and formations / L.A. Shemetkov // Comm. Algebra. – 1997. – Vol. 25, № 3. – P. 955–964.
17. *Шеметков*, *Л.А.* Локальные задания формаций конечных групп / Л.А. Шеметков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2010. – Т. 16, № 8. – С. 229–244.
18. *Doerk*, *K.* Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter. – 1992.
19. *Ballester-Bolinches*, *A.* Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer. – 2006.

Поступила в редакцию 21.09.2021.

Информация об авторах

Лось Инна Павловна – младший научный сотрудник

Сафонов Василий Григорьевич – д.ф.-м.н., профессор