А. В. Астафьева
(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)

СВОЙСВА АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА−ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Будем рассматривать аппроксимации Эрмита-Паде Latin type, введенные Ш. Эрмитом [1] в 1883 году при доказательстве трансцендентности числа e. Для набора экспоненциальных функций $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=0}^{k}$ эти аппроксимации совпадают с многочленами $A_n^0(z), A_n^1(z), ..., A_n^k(z)$ степени не выше $n-1$, для которых верно $\sum_{p=0}^{k} A_n^p(z)e^{\lambda_p z} = O(z^{kn+n-1}),\ z \to 0.$

Предполагается, что хотя бы один из многочленов $A_n^p(z)$ тождественно не равен нулю.

В данной работе рассматривается $k=3$, и $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3-$ произвольные действительные числа. Рассмотрим функцию $\phi(\xi)=\xi(\xi-\lambda_1)(\xi-\lambda_2)(\xi-\lambda_3)$, тогда через x_j $j=1,2,3$ обозначим нули функции $\phi'(\xi)$, т.е. $\phi(x_j)\neq 0$, $j=1,2,3$. Ясно, что $x_1\in(0,\lambda_1)$, $x_2\in(\lambda_1,\lambda_2)$, $x_3\in(\lambda_2,\lambda_3)$. И введем при $\xi\in C\setminus\left\{\lambda_j\right\}_{j=0}^{3}$ однозначную функцию (главную ветвь логарифма)

$$S(\xi) = -\ln\phi(\xi) = -\ln\left|\phi(\xi)\right| - i\arg_0\phi(\xi),$$

где $\arg_0\phi(\xi)\in(-\pi,\pi]$.

Тогда верна теорема.

Теорема. *При* $n\to\infty$ *локально равномерно по* z

$$A_n^0(z) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_1)}}e^{nS(x_1)}e^{x_1 z}(1+O(1/n)),$$

$$A_n^3(z) = -\sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_3)}}e^{nS(x_3)}e^{(x_3-\lambda_3)z}(1+O(1/n)),$$

а при $p=2,3$

$$A_n^p(z) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_{p+1})}}e^{nS(x_{p+1})}e^{(x_{p+1}-\lambda_p)z}(1+O(1/n)) -$$
$$-\sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_p)}}e^{nS(x_p)}e^{(x_p-\lambda_p)z}(1+O(1/n)).$$

Литература

1 Hermite, C. Sur la generalisation des fractions continues algebriques/ C. Hermite// Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A − 1883. − V. 21. − P. 289 − 308.

2 Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. − М.: Наука, 1989. − 408 с.