В. И. Мироненко, Ганкелевы матрицы и дифференциальные системы с элементарными решениями, *Дифференц. уравнения*, 1977, том 13, номер 10, 1787–1791

ОКТЯБРЬ 1977 г., ТОМ XIII, № 10

УДК 517.925.6

В. И. МИРОНЕНКО

ГАНКЕЛЕВЫ МАТРИЦЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Система обыкновенных дифференциальных уравнений называется вложимой, если каждое ее решение является решением некоторой, своей для каждого решения, линейной стационарной системы, порядок которой не ниже порядка рассматриваемой системы. Системы такого рода изучались ранее автором с точки зрения возможности реализации тех или иных качественных свойств.

В настоящей работе устанавливаются связи между вложимыми системами и бесконечными ганкелевыми матрицами конечного ранга [1, 2], а также между вложимыми системами и системами, все траектории которых являются алгебраическими кривыми.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(t, x), \quad f:\mathscr{D}\to\mathbf{R}^n, \ \mathscr{D}\subset\mathbf{R}^{n+1}. \tag{1}$$

Будем считать, что f голоморфна в рассматриваемой области.

Определение 1. Компоненту x_i системы (1) будем называть вложимой компонентой, если для любого решения $x(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ $x_i(t)$ удовлетворяет некоторому линейному стационарному скалярному уравнению (своему для каждого решения).

Наряду с системой (1) рассмотрим бесконечную ганкелеву матрицу

$$H_i(t, x)\equiv\begin{bmatrix} X_i^{(0)} & X_i^{(1)} & X_i^{(2)} & \ldots \\ X_i^{(1)} & X_i^{(2)} & X_i^{(3)} & \ldots \\ X_i^{(2)} & X_i^{(3)} & X_i^{(4)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix},$$

где

$$X_i^{(0)}\equiv x_i;\ X_i^{(1)}\equiv f_i(t, x);\ X_i^{(k+1)}\equiv\frac{\partial X_i^{(k)}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_i^{(k)}}{\partial x_j}f_j.$$

Определение 2. Рангом функциональной матрицы H_i в области $\mathscr{D}$ назовем число $r_i\equiv\sup\limits_{(t,x)\in\mathscr{D}}\operatorname{rank}H_i(t, x)$. (Определение ранга числовой матрицы см. в [1]).

Теорема 1. *Для вложимости компоненты x_i системы (1) с голоморфной в области $\mathscr{D}$ функцией f необходимо и достаточно, чтобы матрица $H_i(t, x)$ имела конечный ранг в $\mathscr{D}$.*

Доказательство. Так как компонента x_i системы (1) вложима, то для любого решения $x(t)$ системы (1) существуют числа $m = m(t_0, x_0)\in\mathbf{N}$ и $a_k = a_k(t_0, x_0)\in\mathbf{R}$, для которых

$$a_0x_i(t)+a_1\dot{x}_i(t)+\ldots+a_mx_i^{(m)}(t)=0 \quad \forall t\in J_x,$$

где J_x — интервал существования рассматриваемого решения. Поэтому для любого $t\in J_x$ и любого $k\in\mathbf{N}_0\equiv\{0, 1, 2, \ldots\}$

$$a_0x_i^{(k)}(t)+a_1x_i^{(k+1)}(t)+\ldots+a_mx_i^{(k+m)}(t)=0 \quad \forall t\in J_x.$$

Из голоморфности функции f следует, что число m можно выбрать не зависящим от точки (t_0, x_0) (см. работы [3] и [4]). Для этого m и любого $k\in\mathbf{N}_0$

$$a_0x_i^{(k)}(t_0)+a_1x_i^{(k+1)}(t_0)+\ldots+a_mx_i^{(k+m)}(t_0)=0 \quad \forall (t_0, x_0)\in\mathscr{D}.$$

Полученные равенства можно переписать в виде

$$a_0X_i^{(k)}(t_0, x_0)+a_1X_i^{(k+1)}(t_0, x_0)+\ldots+a_mX_i^{(k+m)}(t_0, x_0)=0 \quad \forall (t_0, x_0)\in\mathscr{D},$$

откуда следует, что $\operatorname{rank} H_i(t_0, x_0)\leqslant m$ (см. теорему 7 на стр. 496 в [2]). Так как m не зависит от (t_0, x_0), то

$$\sup_{(t, x)\in\mathscr{D}} \operatorname{rank} H_i(t, x)\leqslant m.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Для вложимости системы (1) с голоморфной в области $\mathscr{D}$ правой частью необходимо и достаточно, чтобы каждая матрица $H_i(t, x)$, $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$, имела конечный ранг в $\mathscr{D}$.*

Следствие вытекает из того, что система вложима тогда и только тогда, когда вложимы все ее компоненты.

Следствие 2. *Для вложимости системы (1) с голоморфной в области $\mathscr{D}$ правой частью необходимо и достаточно, чтобы каждая из функций $F_i(z, t, x)$, определяемых бесконечным рядом:*

$$F_i(z, t, x)\equiv\frac{X_i^{(0)}}{z}+\frac{X_i^{(1)}}{z^2}+\frac{X_i^{(2)}}{z^3}+\ldots,$$

была рациональной по z.

Это следует из доказанной выше теоремы 1 и теоремы 8 на стр. 498 из [2].

Замечание. Число полюсов функции $F_i(z, t, x)$ совпадает с наименьшим из чисел $m=m(t_0, x_0)$, для каждого из которых возможно указать такие постоянные a_i, что $\sum_{k=0}^{m} a_kx_i^{(k)}(t, t_0, x_0)\overset{t}{\equiv}0$ (см. [2]).

Определение 3. Система (1) называется сильно вложимой, если множество ее решений является подмножеством множества решений некоторой линейной стационарной системы. Компонента x_i системы (1) называется сильно вложимой, если у любого решения $x(t)$ системы (1) $x_i(t)$ является решением некоторого линейного стационарного дифференциального уравнения, общего для всех решений системы (1) (см. также [3]).

Множество сильно вложимых систем является собственной частью множества вложимых систем и содержит в качестве своего собственного подмножества линейные стационарные системы. Действительно, вложимая система $\dot{x}=x\varphi(xy)$, $\dot{y}=-y\varphi(xy)$ с общим решением $x=c_1e^{\varphi(c)t}$,

$y=-\frac{c}{c_1}e^{-\varphi(c)t}$ не является сильно вложимой, а сильно вложимое уравнение $\dot{x}=\sqrt{x^2+1}$ с общим решением $x=\pm 0{,}5(e^{t-c}-e^{-t+c})$ не является линейным.

Рассмотрим теперь двумерную систему

$$\dot{x}=P(x, y), \quad \dot{y}=Q(x, y), \tag{2}$$

где P и Q — полиномы. Простейшим примером такой системы является линейная, а значит, сильно вложимая система. Как известно, линейная система может иметь среди своих траекторий и неалгебраические кривые. Тем не менее, верна следующая

Теорема 2. *Если у системы (2) с полиномиальной правой частью некоторая (хотя бы одна) компонента вложима, но не является сильно вложимой, то всякая траектория системы (2) представляет собой алгебраическую кривую или часть алгебраической кривой.*

Доказательство. Пусть у системы (2) вложима компонента x. Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ этой системы существуют числа $a_i \in \mathbf{R}$ и $m \in \mathbf{N}$, для которых верно тождество

$$a_0x(t)+a_1\dot{x}(t)+\ldots+a_mx^{(m)}(t)\overset{t}{\equiv}0.$$

Вычислив $x^{(i)}(t)$, в силу системы (2) убедимся в том, что $x^{(i)}(t)=P_i(x(t), y(t))$, где $P_i(x, y)$ есть некоторый полином от x и y. Таким образом,

$$a_0x(t)+a_1P(x(t), y(t))+\ldots+a_mP_m(x(t), y(t))\overset{t}{\equiv}0. \tag{3}$$

В связи с этим могут представиться два случая: 1) $\sum_{i=0}^{m} a_iP_i(x, y)\not\equiv 0$ и 2) $\sum_{i=0}^{m} a_iP_i(x, y)\overset{x,\,y}{\equiv}0$. В первом случае в силу тождества (3) решение $(x(t), y(t))$ задает алгебраическую траекторию. Второго случая быть не может, так как в противном случае компонента x должна быть сильно вложимой. Теорема доказана.

Замечание. Пользуясь теоремой 2 из работы [5], а точнее доказательством этой теоремы, нетрудно показать, что система (2), удовлетворяющая условиям доказанной теоремы обязана иметь общий интеграл вида $R(x, y)=c$, где $R(x, y)$ — дробно рациональная функция x и y. В случае, когда P и Q не полиномы, такого заключения сделать нельзя, если даже все траектории системы (2) суть алгебраические. Примером этого может служить вложимая система

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=[\sqrt{x^2+2y}-x]y$$

с интегралом $\sqrt{x^2+2y}-x=c$, все траектории которой представляют собой лучи.

Следствие. *Пусть у системы (2) с полиномиальной правой частью некоторая компонента вложима, но не является сильно вложимой. Тогда система (2) не может иметь особых точек типа «фокус».*

Доказательство следует из того факта, что любая алгебраическая кривая может иметь только конечное число общих точек с прямой.

Теорема 3. *Пусть система*

$$\dot{x}=y+P(x, y), \quad \dot{y}=-x+Q(x, y),$$

где P и Q — аналитические функции, разложения которых в окрестности особой точки $(0, 0)$ *не содержат свободных и линейных членов, вложима. Тогда особая точка* $(0, 0)$ *для этой системы является особой точкой типа «центр».*

Доказательство от противного. Допустим, что $(0, 0)$ является не центром, а фокусом. Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$, начинающегося в достаточно малой окрестности особой точки,

$$\lim x(t) = \lim y(t) = 0 \tag{4}$$

либо при $t \to \infty$, либо при $t \to -\infty$. Для определенности положим, что указанные равенства верны при $t \to \infty$.

Так как система вложима, то

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e^{\alpha_i t}, \quad y(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) e^{\alpha_i t}, \tag{5}$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ — постоянные, а $f_i(t)$ и $\varphi_i(t)$ являются многочленами по t с почти периодическими коэффициентами. Учитывая равенства (4), заключим, что все $\alpha_i < 0$. Подставляя (5) в рассматриваемую систему, после несложных выкладок получим соотношения

$$\begin{gathered} f'_n + \alpha_n f_n - \varphi_n \equiv e^{-\alpha_n t} P(x(t), y(t)) - \sum_{i=1}^{n-1} F_i(t) e^{(\alpha_i - \alpha_n)t}, \\ \varphi'_n + f_n + \alpha_n \varphi_n \equiv e^{-\alpha_n t} Q(x(t), y(t)) - \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_i(t) e^{(\alpha_i - \alpha_n)t}, \end{gathered} \tag{6}$$

где функции $F_i(t)$ и $\Phi_i(t)$ того же типа, что и функции $f_i(t)$ и $\varphi_i(t)$.

Из равенств (4) и свойств функций P и Q можно заключить, что при достаточно больших t для некоторой постоянной M выполнено неравенство

$$|P(x(t), y(t))| + |Q(x(t), y(t))| < M[x^2(t) + y^2(t)].$$

Тогда для указанных t верно следующее соотношение:

$$e^{-\alpha_n t}[|P(x(t), y(t))| + |Q(x(t), y(t))|] <$$

$$< M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \exp\left(\alpha_i - \frac{\alpha_n}{2}\right) t\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \exp\left(\alpha_i - \frac{\alpha_n}{2}\right) t\right)^2\right]$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $t \to \infty$ и учитывая, что $\alpha_i - \frac{\alpha_n}{2} < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, получим равенства

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha_n t} P(x(t), y(t)) = \lim_{t\to\infty} e^{-\alpha_n t} Q(x(t), y(t)) = 0.$$

Тогда, согласно (6), будем иметь

$$\lim_{t\to\infty} [f'_n + \alpha_n f_n - \varphi_n] = \lim_{t\to\infty} [\varphi'_n + f_n + \alpha_n \varphi_n] = 0.$$

Так как функции $f_n(t)$ и $\varphi_n(t)$ являются многочленами по t с почти периодическими коэффициентами, то полученное равенство может быть выполнено лишь при условии

$$f'_n + \alpha_n f_n - \varphi_n = \varphi'_n + f_n + \alpha_n \varphi_n = 0,$$

откуда

$$f_n(t) = e^{-\alpha_n t}[c_1 \sin t + c_2 \cos t], \quad \varphi_n(t) = e^{-\alpha_n t}[c_1 \cos t - c_2 \sin t].$$

Это противоречит виду функций $f_n(t)$ и $\varphi_n(t)$. Теорема доказана.

Замечание. Линейные стационарные преобразования искомых функций и независимого переменного не меняют свойства вложимости. Поэтому доказанную теорему можно сформулировать в более общей форме: *Особая точка голоморфной вложимой системы является центром, если только особая точка системы линейного приближения — центр.*

Литература

1. Иохвидов И. С. Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы. М., 1974.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, М., 1967.
3. Мироненко В. И. Вестник БГУ, сер. 1, № 3, 1971.
4. Мироненко В. И. Дифференц. уравнения, **10**, № 2, 1974.
5. Мироненко В. И. Дифференц. уравнения, **8**, № 12, 1972.

Поступила в редакцию 29 января 1976 г.

Гомельский государственный университет